Université Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématiques

Feuille 7
Géodésiques et transport parallèle en géométrie riemannienne

Master 2 AAG
Géométrie Riemannienne
2012-2013

Dans toute la suite, les variétés, métriques, champs de vecteurs considérés sont supposés être lisses.

Exercice 1 – Géodésiques et équations d'Euler-Lagrange
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ munie de coordonnées notées $(x_1, \ldots, x_n)$. On note $(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ les coordonnées correspondantes sur TU. Soit g une métrique pseudo-riemannienne sur U. Le lagrangien correspondant à g est :

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix} TU & \to & \mathbb{R} \\ (x,v) & \mapsto & g(v,v) \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les relevés à TU des géodésiques pour g dans U sont exactement les solutions du système d'équations :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}.$$

En pratique cette équation permet d'établir l'équation de géodésiques bien plus vite qu'en calculant la connexion de Levi-Civita. De plus on peut alors obtenir l'information sur la connexion en la lisant sur l'équation des géodésiques. L'équation ci-dessus est appelée équation d'Euler-Lagrange associée à $\mathcal{L}$, elle provient du calcul des variations.

Exercice 2 – Géométrie des surfaces de révolution
Soit $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane, de classe C^∞, paramétrée par longueur d'arc. On écrit, pour tout $u \in I$, $c(u) = (r(u), z(u))$. On suppose que r est une fonction strictement positive, et que l'image de c est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. On considère la surface de révolution S de $\mathbb{R}^3$ obtenue en faisant « tourner » c autour de l'axe (Oz). On la paramètre par

$$f : (u, \theta) \mapsto (r\sin\theta,\ r\cos\theta,\ z), \quad u \in I,\ \theta \in \mathbb{S}^1.$$

On munit S de la métrique riemannienne g induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que dans les coordonnées (u, θ), $g = du^2 + r^2 d\theta^2$.
2. En utilisant l'exercice précédent, montrer que le champ de vecteurs géodésique de g est

$$R = \dot{u}\partial_u + \dot{\theta}\partial_\theta + r'r\dot{\theta}^2\partial_{\dot{u}} - 2\frac{r'}{r}\dot{\theta}\dot{u}\partial_{\dot{\theta}}.$$

3. On paramètre le fibré unitaire tangent de S par $I \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ via

$$(u, \theta, \varphi) \mapsto \left(f(u,\theta),\ \cos(\varphi)\partial_u + \frac{\sin(\varphi)}{r}\partial_\theta\right).$$

Rappeler pourquoi R est tangent au fibré unitaire tangent et montrer que :

$$R = \cos(\varphi)\partial_u + \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\theta - \frac{r'\sin\varphi}{r}\partial_\varphi.$$

4. Montrer que les méridiens $\{\theta = \text{cte}\}$ sont des géodésiques de S. Quels sont les parallèles $\{u = \text{cte}\}$ qui sont des géodésiques ?
5. Montrer que la fonction de Clairaut $C : (u, \theta, \varphi) \mapsto r\sin\varphi$ est préservée par le flot géodésique.
6. Décrire les niveaux critiques de C. Montrer que les niveaux réguliers sont des cylindres ou des tores (on pourra utiliser $dC(\partial_\theta) = 0$). Décrire les projections de ces niveaux sur S.
7. On note φ_t le flot géodésique et φ_s^θ celui de ∂_θ. Montrer que $(s,t) \mapsto \varphi_t \circ \varphi_s^\theta$ définit une action de $\mathbb{R}^2$ qui préserve C. Montrer que cette action est localement libre et transitive sur les niveaux réguliers de C.

8. Montrer que le flot géodésique sur un niveau régulier de C est $\mathcal{C}^\infty$-conjugué à un flot linéaire sur le tore $\mathbb{T}^2$ ou le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Expliquer pourquoi les niveaux critiques sont des réunions de cercles et de cylindres munis d'un flot linéaire.
9. Faire des dessins dans le fibré unitaire tangent et dans S. On pourra supposer pour simplifier que la fonction r est de Morse : $r'(u_0) = 0 \implies r''(u_0) \neq 0$. Dessiner par exemple le fibré unitaire tangent avec les lignes de niveaux de C et le flot géodésique quand $r = 1 + (u^2 - 1)^2$.

Exercice 3 – Isométries et géodésiques

1. Montrer que si une courbe dans une variété pseudo-riemannienne est le lieu des points fixes d'une isométrie alors elle est l'image d'une géodésique.

Exercice 4 – Transport parallèle sur un cône, holonomie

1. Exprimer la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ en coordonnées polaires.

On considère dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ un cône de révolution C, de sommet s, et d'angle au sommet 2α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. On munit $C \setminus \{s\}$ de la métrique g induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit Δ une demi-droite de C issue de s. Montrer que $C \setminus \Delta$ est isométrique à l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ défini par $U = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\mid \theta \in]0, 2\pi \sin\alpha[\}$, muni de la métrique euclidienne.
3. Si c est un lacet tracé sur $C \setminus \{s\}$ qui fait une fois le tour du sommet s dans le sens direct, montrer que son holonomie est une rotation d'angle $2\pi(1 - \sin\alpha)$.

Exercice 5 – Transport parallèle sur la sphère $\mathbb{S}^2$

On considère $\mathbb{S}^2$ la sphère unité dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On munit $\mathbb{S}^2$ de la métrique riemannienne g induite par la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. On considère un cône de révolution C de sommet l'origine et d'angle au sommet 2θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. On appelle c le cercle obtenu en intersectant $\mathbb{S}^2$ et C.

1. Montrer que le cône de révolution tangent à $\mathbb{S}^2$ le long de c a un angle au sommet de $\pi - 2\theta$.
2. En utilisant l'exercice précédent, montrer que l'holonomie de c est une rotation d'angle $\pm 2\pi(1 - \cos\theta)$.
3. En déduire qu'un ouvert de $\mathbb{S}^2$ n'est jamais isométrique à un ouvert du plan euclidien.