Feuille 8
Géodésiques, distance et complétude

Exercice 1 – Métriques bi-invariantes sur les groupes de Lie
Soient G un groupe de Lie connexe et H un sous-groupe fermé de G.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur le sous-groupe $Ad(H)$ de $GL(\mathfrak{g})$, pour qu'il existe une métrique riemannienne G-invariante sur G/H.
2. En déduire que tout groupe de Lie compact admet une métrique riemannienne bi-invariante (c'est-à-dire invariante par multiplication à gauche et à droite). On pourra par exemple considérer l'action de $G \times G$ sur G par multiplication à gauche et à droite.
3. Soient G un groupe de Lie et h une métrique riemannienne bi-invariante sur G. Montrer que la connexion de Levi-Civita de h coïncide avec la connexion de l'exercice 2 de la feuille 6. En déduire une description des géodésiques de h.
4. En utilisant ce qui précède et le théorème de Hopf-Rinow, montrer que l'application exponentielle sur un groupe de Lie compact est toujours surjective.

Exercice 2 –
Montrer qu'une variété riemannienne sur laquelle son groupe d'isométries agit transitivement est complète.

Exercice 3 –
Soit (M, g) une variété riemannienne. Soient $c : [0, L] \to M$ une courbe lisse et Y un champ de vecteurs lisse le long de c.

1. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que l'application $(s, t) \mapsto c_s(t) = \exp_{c(t)}(sY(t))$ soit définie sur $[-\epsilon, \epsilon] \times [0, L]$.

On note $\dot{c}_s(t) = \frac{\partial}{\partial t} c_s(t)$. On note $L(c_s)$ la longueur de la courbe c_s et on suppose que c_0 est une géodésique.

2. Montrer que $\frac{d}{ds}_{|s=0} L(c_s) = g_{c(L)}(Y(L), \dot{c}(L)) - g_{c(0)}(Y(0), \dot{c}(0))$.
3. Soit (M, g) une variété riemannienne. Soient N et N' deux sous-variétés de M. On suppose qu'il existe une courbe continue c reliant N à N' telle que la longueur de c soit minimale au sein des courbes continues reliant N à N'. Montrer que c est une géodésique de M, et qu'elle est orthogonale à N et N' aux extrémités.

Exercice 4 – Tore de Clifton-Pohl
Sur $\hat{M} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on considère la métrique pseudo-riemannienne $\hat{g} = \frac{2}{x^2+y^2} dx\, dy$.

1. Montrer que $\hat{g}$ induit une métrique pseudo-riemannienne g sur le quotient M de $\hat{M}$ par l'homothétie de centre l'origine et de rapport 2.
2. Montrer que M est un tore et que g n'est pas complète (bien que M soit compacte).