Feuille 9
Courbures

Exercice 1 – Effondrement de Heis(3)/Γ par le flot de Ricci
On considère le sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathrm{Heis}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

On rappelle que son algèbre de Lie possède une base (X_1, X_2, X_3) pour laquelle $[X_1, X_2] = X_3$ et $[X_i, X_j] = 0$ pour tous les autres couples (i, j) avec $i < j$. On note $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ la base duale vu comme base de l'ensemble des 1-formes invariantes à gauche sur Heis(3). On s'intéresse aux métriques invariantes à gauche sur Heis(3) de la forme $g_{A,B} = A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + B\omega_3^2$.

1. Calculer la courbure sectionnelle des champs de plans $\ker \omega_i$.
2. Calculer le tenseur de Ricci de $g_{A,B}$.

Sur une variété V quelconque, une courbe de métriques riemanniennes est une application $t \mapsto g(t)$ d'un intervalle I vers l'ensemble des métriques riemanniennes sur V. Elle est dite lisse si, pour tout x dans V, la fonction de I dans $S^2 T_x^* M$ qui envoie t sur $g(t)_x$ est lisse. On appelle solution du flot de Ricci sur V avec condition initiale g_0 toute courbe lisse de métriques $g(t)$ vérifiant, en tout point x,

$$\frac{d}{dt}\big(g(t)_x\big) = -2\,\mathrm{Ric}_x^{g(t)} \quad \text{et} \quad g(0) = g_0.$$

3. Montrer que, pour toute condition initiale de la forme g_{A_0,B_0} sur Heis(3), il existe une solution du flot de Ricci $t \mapsto g_{A(t),B(t)}$ où A et B sont des fonctions qu'on exprimera en fonction de A_0 et B_0.

On considère l'action par multiplication à gauche du sous-groupe discret de Heis(3)

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. Montrer que l'application
$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (x, y)$$
induit une submersion de $V = \Gamma\backslash\mathrm{Heis}(3)$ sur $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$. Décrire les fibres de cette submersion et en déduire que V est compacte.
5. Montrer qu'il existe des constantes c_1 et c_2, dépendant de A_0 et B_0, telles que les métriques $g(t)$ induisent sur V une courbe de métriques riemanniennes dont la courbure sectionnelle et le diamètre vérifient
$$|K| \leq \frac{c_1}{t} \quad \text{et} \quad \mathrm{diam}(V) \leq c_2 t^{1/6}.$$
6. En déduire que V est une variété presque plate : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une métrique dont la courbure sectionnelle et le diamètre vérifient
$$|K| \leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{diam}(V)^2}.$$
7. Montrer que si, on remplace le carré de la formule précédente par n'importe quelle autre puissance, on obtient une définition stupide. Montrer que les tores sont presque plats (ouf).
8. Montrer que V admet une courbe de métriques pour laquelle le diamètre et la courbure tendent vers zéro.

Exercice 2 – Courbure sectionnelle et longueur des petits cercles
Soient (M,g) une variété riemannienne et m un point de M. Soient P un 2-plan dans T_mM et (u,v) une base orthonormée de P. On pose

$$H(r,\theta) = \exp_m\big(r\cos(\theta)u + r\sin(\theta)v\big)$$

pour $r > 0$ suffisamment petit pour que l'exponentielle soit bien définie et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour un tel r, on note C_r la courbe $\theta \mapsto H(r,\theta)$.

1. Montrer que, pour tout θ, $J_\theta(r) = \frac{d}{d\theta}H(r,\theta)$ est un champ de Jacobi.
2. Montrer que $\|J_\theta(r)\| = r - \frac{K(P)}{6}r^3 + o(r^3)$.
3. En déduire que $L(C_r) = 2\pi r\left(1 - \frac{K(P)}{6}r^2 + o(r^2)\right)$.

Exercice 3 – Applications du théorème de Myers aux groupes de Lie.
Soit G un groupe de Lie connexe admettant une métrique riemannienne bi-invariante et dont le centre de l'algèbre de Lie est trivial. En utilisant le théorème de Myers, montrer que G et son revêtement universel sont compacts.

Affiner la preuve précédente pour montrer :

1. Si G est un groupe de Lie connexe dont la forme de Killing est définie négative alors son revêtement universel est compact.
2. Si dans un groupe de Lie connexe G, tous les sous-groupes abéliens connexes sont d'adhérence compacte, alors G est compact.