

## 1 Treillis et adjonctions

**Exercice 1.1**  $\Leftrightarrow$  Dans un espace topologique, en utilisant la définition

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ fermé}}} F,$$

montrer qu'on a bien une adjonction  $\tau \dashv i$  où  $i$  est l'inclusion des fermés de  $X$  dans les parties de  $X$ .

**Solution :** On commence par noter que la définition donnée pour  $\overline{A}$  fournit bien un fermé car une intersection de fermés est fermée. Soit  $A$  une partie de  $X$  et  $C$  un fermé de  $X$ . On doit montrer que  $\overline{A} \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq i(C)$  où  $i(C)$  est simplement la partie  $C$ , en oubliant qu'elle est fermée. Supposons d'abord que  $\overline{A} \subseteq C$ . Comme  $A$  est inclus dans tous les  $F$  dont on prend l'intersection,  $A \subseteq \overline{A}$  et donc  $A \subseteq i(C)$ . Ici on pourrait s'inquiéter du fait que la collection dont on prend l'intersection pourrait être vide. D'une part elle ne l'est pas car  $X$  en fait partie et d'autre part cela n'a aucune importance car l'intersection d'une famille vide de parties de  $X$  est  $X$  tout entier. En effet, pour tout  $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ , par définition,  $\bigcap_{U \in S} U = \{x \in X \mid \forall U \in S, x \in U\}$  qui définit sans ambiguïté  $\bigcap_{U \in \emptyset} U = X$  (la définition 27 et la remarque 31 donneront une explication plus conceptuelle). Le point crucial est qu'il ne s'agit pas d'une intersection dans l'univers de tous les ensembles mais bien d'une intersection de parties de  $X$ .

Réciproquement, supposons  $A \subseteq i(C)$ . Ainsi  $C$  fait partie de la collection de fermés intersectés dans la définition de  $\overline{A}$  donc  $\overline{A} \subseteq C$ .

Remarque : ces vérifications un peu fastidieuses seront complètement systématisées dans le corollaire 39.

**Exercice 1.2**  $\square$  Montrer directement que tout adjoint à droite est croissant, sans se ramener au cas des adjoints à gauche.

**Solution :** Soit  $(l, r)$  une adjonction entre des ensembles ordonnés  $X$  et  $Y$ . Montrons que  $r$  est croissante. Soit  $y$  et  $y'$  dans  $Y$  tels que  $y \leq y'$ . Montrons que  $r(y) \leq r(y')$ . Par unité de  $l \dashv r$ , on a  $y' \leq l(r(y'))$ . Par transitivité, on en déduit  $y \leq l(r(y'))$ . Par adjonction, on conclut que  $r(y) \leq r(y')$ .

**Exercice 1.3**  $\square$  Montrer directement qu'une application entre ensembles ordonnés admet au plus un adjoint à gauche, sans se ramener au cas des adjoints à droite.

**Solution :** Supposons que  $l$  et  $l'$  sont adjoints à gauche d'une application  $r$  entre deux ensembles ordonnés  $Y$  et  $X$ . Soit  $x$  dans  $X$ . La co-unité de  $l \dashv r$  assure que  $x \leq r(l(x))$ . Comme  $l' \dashv r$ , on en déduit que  $l'(x) \leq l(x)$ . En échangeant les rôles de  $l$  et  $l'$  on montre de même que  $l(x) \leq l'(x)$  et donc  $l(x) = l'(x)$ .

**Exercice 1.4**  $\Leftrightarrow$

1. On note  $\iota : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  l'inclusion. Montrer que l'application partie entière  $\lfloor \cdot \rfloor$  est, par définition, adjointe à droite de  $\iota$ .

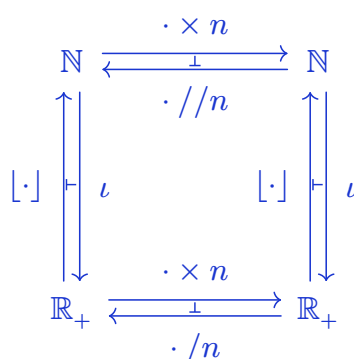
**Solution :** Soit  $k$  un entier et  $x$  un réel positif. On a bien  $k \leq \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow \iota(k) \leq x$  puisque  $\lfloor x \rfloor$  est le plus grand entier inférieur à  $x$ .

2. Dans toute la suite de cet exercice, on fixe un entier  $n > 0$ . Montrer que  $\cdot \times n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , la multiplication par  $n$ , est adjointe à gauche de  $\cdot // n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , le quotient dans la division euclidienne par  $n$ . Quel est l'énoncé analogue pour  $\cdot \times n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  ?

**Solution :** Soit  $k$  et  $l$  des entiers. On a  $kn \leq l \Leftrightarrow k \leq l/n$  où la division est à valeur dans  $\mathbb{Q}$  a priori. Or  $l//n$  est le plus grand entier inférieur à  $l/n$  donc cette condition équivaut à  $k \leq l//n$  comme annoncé. Pour la multiplication des réels par  $n$  on a l'adjonction avec  $x \mapsto \frac{x}{n}$  par l'exemple 7 puisque ces deux fonctions croissantes sont inverses l'une de l'autre.

3. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lfloor x/n \rfloor = \lfloor x \rfloor // n$ .

**Solution :** Il s'agit d'une conséquence directe des questions précédentes et du corollaire 20 puisque  $\iota \circ (\cdot \times n) = (\cdot \times n) \circ \iota$ .



**Exercice 1.5**  $\square$  Montrer que si la relation d'ordre sur  $X$  est *totale* alors, pour toute partie  $S$ , un élément  $x_0$  de  $X$  est borne inférieure de  $S$  si et seulement s'il minore  $S$  et,  $\forall x > x_0, \exists s \in S, s < x$ .

**Solution :** Il suffit d'utiliser la remarque 23 et de contraposer  $x$  minore  $S \Rightarrow x \leq x_0$  en utilisant que, parce que la relation d'ordre est totale, pour tous  $x$  et  $y$ , la négation de  $x \leq y$  est  $y < x$ .

**Exercice 1.6**  $\square$  Soit  $X$  un treillis complet (ou plus généralement un treillis).

1. Montrer que les opérations d'inf et de sup binaires sont associatives et commutatives : pour tous  $x, y$  et  $z$ ,

$$\begin{aligned} x \wedge y &= y \wedge x, & x \wedge (y \wedge z) &= (x \wedge y) \wedge z, \\ x \vee y &= y \vee x, & x \vee (y \vee z) &= (x \vee y) \vee z. \end{aligned}$$

**Solution :** Démontrons les formules pour les inf, le cas des sup s'en déduit par passage à la relation d'ordre opposée (ou s'établit directement par des arguments complètement analogues). La commutativité est claire :  $x \wedge y$  et  $y \wedge x$  sont tous deux  $\inf(\{x, y\})$  par définition. Pour l'associativité, l'idée est que les deux expressions calculent  $\inf(\{x, y, z\})$ , mais il y a un petit quelque chose à démontrer, en utilisant essentiellement l'associativité de la conjonction en logique. Soit  $w$  un élément de  $X$ . On a

$$\begin{aligned}
w \text{ minore } \{x, y, z\} &\Leftrightarrow w \leq x \text{ et } (w \leq y \text{ et } w \leq z) \\
&\Leftrightarrow w \leq x \text{ et } w \leq y \wedge z \\
&\Leftrightarrow w \text{ minore } \{x, y \wedge z\} \\
&\Leftrightarrow w \leq x \wedge (y \wedge z).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien  $x \wedge (y \wedge z) = \inf(\{x, y, z\})$ , et un raisonnement analogue montre que  $(x \wedge y) \wedge z = \inf(\{x, y, z\})$ .

2. Montrer que, pour tous  $x, y$  et  $z$ ,

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z).$$

Lorsqu'il y a toujours égalité, on dit que le treillis est *distributif*.

**Solution :** Soit  $x, y$  et  $z$  dans  $X$ . Montrons que  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$ . Par définition de l'inf, il suffit de montrer que le membre de gauche minore  $\{x, y \vee z\}$ . Pour cela, par définition du sup, il suffit de montrer que  $x$  et  $y \vee z$  majorent  $\{x \wedge y, x \wedge z\}$ , ce qui est clair, car  $x \wedge y$  minore  $\{x, y\}$ ,  $x \wedge z$  minore  $\{x, z\}$  et  $y \vee z$  majore  $\{y, z\}$ .

*Remarque :* l'inégalité dans l'autre direction n'est pas toujours vraie. Par exemple les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel fixé forment un treillis où l'inf est donné par l'intersection et le sup est le sous-espace vectoriel engendré par la réunion (on peut le vérifier directement et cela découle de résultats généraux suite du chapitre). Dans  $\mathbb{R}^2$ , on peut considérer pour  $x, y$  et  $z$  les droites engendrées par  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  respectivement. On a  $x \wedge y = x \wedge z = \{0\}$ ,  $y \vee z = \mathbb{R}^2$  et  $x \wedge (y \vee z) = x$ .

**Exercice 1.7**  $\square$  Montrer que tout produit de treillis complets est un treillis complet (pour la relation d'ordre produit de la définition 5).

**Solution :** Soit  $X$  une famille de treillis complets indexée par un ensemble  $I$ . D'après le théorème 32, il suffit de montrer que toute partie du produit admet une borne inférieure (on pourrait aussi faire directement la démonstration analogue pour la borne supérieure). Soit  $S$  une partie de  $\prod_i X_i$ . Pour tout  $i \in I$ , on définit  $x_i = \inf_{s \in S} s_i$  (il s'agit d'un inf dans  $X_i$ ). On note  $x$  l'élément du produit dont les composantes sont les  $x_i$ . Montrons que  $x$  est borne inférieure de  $S$ . Soit  $x' \in S$ . On a

$$\begin{aligned}
x' \text{ minore } S &\Leftrightarrow \forall s \in S, x' \leq s \\
&\Leftrightarrow \forall s \in S, \forall i \in I, x'_i \leq s_i \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I, \forall s \in S, x'_i \leq s_i \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I, x'_i \leq \inf_{s \in S} s_i \\
&\Leftrightarrow x' \leq x.
\end{aligned}$$

**Exercice 1.8**  $\Rightarrow$  Soit  $X$  et  $Y$  des ensembles et  $Z$  un treillis complet. Soit  $f : X \times Y \rightarrow Z$  une fonction. Montrer que, pour toutes parties  $A$  de  $X$  et  $B$  de  $Y$ , on a

$$\inf_{x \in A} \left( \inf_{y \in B} f(x, y) \right) = \inf_{y \in B} \left( \inf_{x \in A} f(x, y) \right) = \inf(f_*(A \times B)).$$

On peut donc utiliser la notation  $\inf_{x \in A, y \in B} f(a, b)$  pour cette valeur commune.

**Solution :** Montrons que  $\inf_{x \in A} (\inf_{y \in B} f(x, y)) = \inf(f_*(A \times B))$ , l'autre égalité étant complètement analogue (et pouvant s'en déduire). On utilise bien sûr la définition de borne inférieure. Soit  $z \in Z$ . On a

$$\begin{aligned} z \text{ minore } f_*(A \times B) &\Leftrightarrow \forall a \in A, \forall b \in B, z \leq f(a, b) \\ &\Leftrightarrow \forall a \in A, z \text{ minore } f_*(\{a\} \times B) \\ &\Leftrightarrow \forall a \in A, z \leq \inf_{b \in B} f(a, b) \\ &\Leftrightarrow z \leq \inf_{a \in A} \left( \inf_{b \in B} f(a, b) \right). \end{aligned}$$

**Exercice 1.9**  $\Rightarrow$  Expliciter les bornes supérieures fournies par le théorème 32 dans l'exemple des sous-groupes d'un groupe fixé.

**Solution :** Soit  $G$  un groupe et  $\mathcal{S}(G)$  l'ensemble des sous-groupes de  $G$ . Soit  $A$  une partie de  $\mathcal{S}(G)$ . Le théorème 32 assure que la borne supérieure de  $A$  est l'inf de l'ensemble des majorants de  $S$ , c'est-à-dire l'ensemble des sous-groupes contenant tous les éléments de  $S$ . Vu la construction de l'inf dans cet exemple,  $\sup S$  est l'intersection des sous-groupes contenant tous les éléments de  $S$ .

**Exercice 1.10**  $\Rightarrow$  Expliciter les sups dans le treillis des fermés d'un espace topologique et les inf dans celui des ouverts :

**Solution :** Soit  $X$  un espace topologique. Comme les parties de  $X$  forment un treillis complet et qu'une intersection de fermés est fermée, les fermés de  $X$  forment un treillis complet  $F(X)$  et l'inclusion de ce treillis dans  $\mathcal{P}(X)$  préserve les inf. De plus la borne supérieure d'un ensemble  $S$  de fermés est l'intersection de tous les fermés contenant tous les éléments de  $S$ , c'est-à-dire l'adhérence de la réunion des éléments de  $S$ .

De même l'ensemble  $O(X)$  est un treillis complet car toute réunion d'ouverts est un ouvert. La borne inférieure d'un ensemble  $S$  d'ouverts est la réunion de tous les ouverts contenus dans tous les éléments de  $S$ , c'est-à-dire l'intérieur de l'intersection des éléments de  $S$ .

**Exercice 1.11**  $\square$  Soit  $X$  et  $Y$  des treillis complets,  $S$  une partie de  $X$  et  $f : X \rightarrow Y$  une fonction croissante. Montrer directement, sans se ramener au cas de l'inf, que  $f(\sup S) \geq \sup f_*(S)$ .

**Solution :** Vu la propriété universelle de  $\sup f_*(S)$ , il suffit de montrer que  $f(\sup S)$  est un majorant de  $f_*(S)$ . Soit  $s \in S$ . Montrons que  $f(\sup S) \geq f(s)$ . Comme  $\sup S$  majore  $S$ , on a  $\sup S \geq s$ . Comme  $f$  est croissante, on en déduit  $f(\sup S) \geq f(s)$ .

**Exercice 1.12**  $\Rightarrow$  Soit  $f : X \rightarrow Y$  une fonction. Calculer  $f_! : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  de deux façons différentes : en utilisant la formule fournie par le théorème 37 pour l'adjoint ou en utilisant l'involution de passage au complémentaire qui commute aux images réciproques et renverse les inclusions.

**Solution :** On peut « calculer » cette opération en utilisant la formule fournie par le théorème pour l'adjoint. Soit  $S \subseteq A$ .

$$\begin{aligned}
f_!(S) &= \sup\{T \mid f^*T \subseteq S\} \\
&= \bigcup_{\{T \mid f^*T \subseteq S\}} T \\
&= \{y \mid \exists T, f^*T \subseteq S \text{ et } y \in T\} \\
&= \{y \mid f^*\{y\} \subseteq S\} \\
&= \{y \mid \forall x, f(x) = y \Rightarrow x \in S\}
\end{aligned}$$

Ainsi les éléments de  $f_!(S)$  sont les éléments de  $Y$  qui soit n'appartiennent pas à l'image de  $S$  soit sont uniquement des images d'éléments de  $S$ .

On peut également trouver une formule pour  $f_!(S)$  en utilisant l'involution  $\cdot^c$  de passage au complémentaire qui commute aux images réciproques et l'adjonction  $f_* \dashv f^*$ . En effet, pour tout  $S \subseteq X$  et  $T \subseteq Y$

$$\begin{aligned}
f^*(T) \subseteq S &\Leftrightarrow S^c \subseteq (f^*(T))^c \\
&\Leftrightarrow S^c \subseteq f^*(T^c) \\
&\Leftrightarrow f_*(S^c) \subseteq T^c \\
&\Leftrightarrow T \subseteq (f_*(S^c))^c.
\end{aligned}$$

Ainsi  $f_!(S) = (f_*(S^c))^c$ .

**Exercice 1.13**  $\mathbb{H}$  Soit  $G$  un groupe. Nous avons vu que l'application sous-groupe engendré  $\langle \cdot \rangle : \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{S}(G)$  admet comme adjoint à droite l'inclusion de  $\mathcal{S}(G)$  dans  $\mathcal{P}(G)$ . Admet-elle un adjoint à gauche ?

**Solution :** D'après le théorème de l'application adjointe, un tel adjoint existe si et seulement si  $\langle \cdot \rangle$  commute aux intersections. Or cette commutation est fautive en général. Par exemple, on peut trouver  $G$  non trivial et deux parties  $S$  et  $S'$  tels que  $\langle S \rangle = \langle S' \rangle = G$ , mais  $S \cap S' = \emptyset$ . Par exemple  $G = \mathbb{Z}^2$ ,  $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$  et  $S' = \{(1, 1), (2, 1)\}$ .

**Exercice 1.14**  $\square$  Pour chacune des affirmations suivantes, dire s'il s'agit d'une relation d'adjonction ou bien d'un exemple d'un résultat de ce chapitre (en précisant lequel).

1. pour  $f : X \rightarrow Y$  une fonction,  $A$  et  $A'$  des parties de  $X$ ,  $B$  et  $B'$  des parties de  $Y$ ,

- $f_*(A \cap A') \subseteq f_*A \cap f_*A'$
- $f^*(B \cup B') = f^*B \cup f^*B'$
- $f_*f^*B \subseteq B$
- $f_*(A \cup A') = f_*A \cup f_*A'$
- $f^*(B \cap B') = f^*B \cap f^*B'$
- $A \cap A' = A' \cap A$
- $f_*A \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq f^*B$
- $A \subseteq f^*f_*A$

**Solution :**

- Fonction croissante et infs (lemme 36)
- Un adjoint à gauche commute aux sups.
- Adjonction entre image directe et image réciproque.
- Un adjoint à gauche commute aux infs.
- Unité de l'adjonction image directe image réciproque.
- Co-unité de l'adjonction image directe image réciproque.
- L'inf est commutatif.

2. pour  $X$  un espace topologique et  $A, B, F$  et  $U$  des parties de  $X$  avec  $F$  fermée et  $U$  ouverte,

- $A \subseteq \overline{A}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overline{A \cup B}$
- $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$
- $\mathring{A} \subseteq A$

**Solution :**

- Unité de l'adjonction entre adhérence et inclusion des fermés.
- Un adjoint à gauche commute aux sups.
- Fonction croissante et sups (lemme 36)
- Fonction croissante et infs (lemme 36)
- Un adjoint à droite commute aux infs
- Co-unité de l'adjonction entre inclusion des ouverts et intérieur

3. pour  $E$  un espace vectoriel,  $S$  et  $S'$  des parties de  $E$

- $\text{Vect}(S \cap S') \subseteq \text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(S')$
- $\text{Vect}(S \cup S') = \text{Vect}(\text{Vect}(S) \cup \text{Vect}(S'))$

**Solution :**

- Fonction croissante et infs (lemme 36)
- Un adjoint à gauche commute aux sups, et construction du sup par le corollaire 39

**Exercice 1.15**  $\mathbb{H}$  Soit  $A$  et  $B$  des ensembles. Soit  $X$  un treillis complet. Soit  $\varphi : B \rightarrow X$  et  $\psi : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$  des fonctions. Montrer que

$$\inf_{b \in \bigcup_{a \in A} \psi(a)} \varphi(b) = \inf_{a \in A} \left( \inf_{b \in \psi(a)} \varphi(b) \right).$$

**Solution :** Il s'agit de montrer que les ensembles  $S := \{\varphi(b); b \in \bigcup_{a \in A} \psi(a)\}$  et  $T := \{\inf_{b \in \psi(a)} \varphi(b); a \in A\}$  ont le même inf dans  $X$ . Il suffit de montrer qu'ils ont les mêmes minorants. Soit  $x \in X$ .

$$\begin{aligned} x \text{ minore } S &\Leftrightarrow \forall b \in \bigcup_{a \in A} \psi(a), x \leq \varphi(b) \\ &\Leftrightarrow \forall a \in A, \forall b \in \psi(a), x \leq \varphi(b) \\ &\Leftrightarrow \forall a \in A, x \leq \inf_{b \in \psi(a)} \varphi(b) \\ &\Leftrightarrow x \text{ minore } T \end{aligned}$$

**Exercice 1.16**  $\mathbb{H}$  Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  une fonction croissante d'un ensemble ordonné dans un treillis complet. Montrer que, pour tout  $x \in X$ ,  $\inf \varphi_* \{x' \mid x \leq x'\} = \varphi(x)$ .

**Solution :** Il s'agit de montrer que  $\varphi(x)$  est un inf de  $A := \varphi_* \{x' \mid x \leq x'\}$ . Comme  $x \leq x$ , on obtient  $\varphi(x) \in A$  donc il suffit de montrer que  $\varphi(x)$  minore  $A$ . Soit  $a \in A$ . Montrons que  $\varphi(x) \leq a$ . Par définition de  $\varphi_*$ , on obtient  $x'$  tel que  $x \leq x'$  et  $a = \varphi(x')$ . Comme  $\varphi$  est croissante, on obtient  $\varphi(x) \leq \varphi(x') = a$ .

On remarquera qu'un cas particulier de ce résultat est  $\inf \{x' \mid x \leq x'\} = x$ .

**Exercice 1.17**  $\mathbb{H}$  Soit  $X$  un ensemble ordonné et  $y, z : I \rightarrow X$  des fonctions. Montrer que  $(\inf_i y_i) \wedge (\inf_i z_i) = \inf_i (y_i \wedge z_i)$ . En particulier si  $y$  est une fonction constante de valeur  $x$  on obtient  $x \wedge \inf_i y_i = \inf_i (x \wedge y_i)$ .

**Solution :** Il suffit de montrer que les ensembles  $\{\inf_i y_i, \inf_i z_i\}$  et  $\{y_i \wedge z_i; i \in I\}$  ont les mêmes minorants. Soit  $x$  dans  $X$ . On a

$$\begin{aligned} x \text{ minore } \left\{ \inf_i y_i, \inf_i z_i \right\} &\Leftrightarrow x \leq \inf_i y_i \text{ et } x \leq \inf_i z_i \\ &\Leftrightarrow (\forall i, x \leq y_i) \text{ et } (\forall i, x \leq z_i) \\ &\Leftrightarrow \forall i, (x \leq y_i \text{ et } x \leq z_i) \\ &\Leftrightarrow \forall i, x \leq y_i \wedge z_i \\ &\Leftrightarrow x \text{ minore } \{y_i \wedge z_i; i \in I\}. \end{aligned}$$