

1 Treillis et adjonctions

Exercice 1.1 $\Leftrightarrow$ Dans un espace topologique, en utilisant la définition

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ fermé}}} F,$$

montrer qu'on a bien une adjonction $\tau \dashv i$ où i est l'inclusion des fermés de X dans les parties de X .

Exercice 1.2 $\square$ Montrer directement que tout adjoint à droite est croissant, sans se ramener au cas des adjoints à gauche.

Exercice 1.3 $\square$ Montrer directement qu'une application entre ensembles ordonnés admet au plus un adjoint à gauche, sans se ramener au cas des adjoints à droite.

Exercice 1.4 $\Leftrightarrow$

1. On note $\iota : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ l'inclusion. Montrer que l'application partie entière $\lfloor \cdot \rfloor$ est, par définition, adjointe à droite de ι .
2. Dans toute la suite de cet exercice, on fixe un entier $n > 0$. Montrer que $\cdot \times n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la multiplication par n , est adjointe à gauche de $\cdot // n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, le quotient dans la division euclidienne par n . Quel est l'énoncé analogue pour $\cdot \times n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$?
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lfloor x/n \rfloor = \lfloor x \rfloor // n$.

Exercice 1.5 $\square$ Montrer que si la relation d'ordre sur X est *totale* alors, pour toute partie S , un élément x_0 de X est borne inférieure de S si et seulement s'il minore S et, $\forall x > x_0, \exists s \in S, s < x$.

Exercice 1.6 $\square$ Soit X un treillis complet (ou plus généralement un treillis).

1. Montrer que les opérations d'inf et de sup binaires sont associatives et commutatives : pour tous x, y et z ,

$$\begin{aligned} x \wedge y &= y \wedge x, & x \wedge (y \wedge z) &= (x \wedge y) \wedge z, \\ x \vee y &= y \vee x, & x \vee (y \vee z) &= (x \vee y) \vee z. \end{aligned}$$

2. Montrer que, pour tous x, y et z ,

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z).$$

Lorsqu'il y a toujours égalité, on dit que le treillis est *distributif*.

Exercice 1.7 $\square$ Montrer que tout produit de treillis complets est un treillis complet (pour la relation d'ordre produit de la définition 5).

Exercice 1.8 $\Leftrightarrow$ Soit X et Y des ensembles et Z un treillis complet. Soit $f : X \times Y \rightarrow Z$ une fonction. Montrer que, pour toutes parties A de X et B de Y , on a

$$\inf_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} f(x, y) \right) = \inf_{y \in B} \left(\inf_{x \in A} f(x, y) \right) = \inf(f_*(A \times B)).$$

On peut donc utiliser la notation $\inf_{x \in A, y \in B} f(a, b)$ pour cette valeur commune.

Exercice 1.9 $\mathfrak{H}$ Expliciter les bornes supérieures fournies par le théorème 32 dans l'exemple des sous-groupes d'un groupe fixé.

Exercice 1.10 $\mathfrak{H}$ Expliciter les sups dans le treillis des fermés d'un espace topologique et les infs dans celui des ouverts :

Exercice 1.11 $\mathfrak{H}$ Soit X et Y des treillis complets, S une partie de X et $f : X \rightarrow Y$ une fonction croissante. Montrer directement, sans se ramener au cas de l'inf, que $f(\sup S) \geq \sup f_*(S)$.

Exercice 1.12 $\mathfrak{H}$ Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Calculer $f_! : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ de deux façons différentes : en utilisant la formule fournie par le théorème 37 pour l'adjoint ou en utilisant l'involution de passage au complémentaire qui commute aux images réciproques et renverse les inclusions.

Exercice 1.13 $\mathfrak{H}$ Soit G un groupe. Nous avons vu que l'application sous-groupe engendré $\langle \cdot \rangle : \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{S}(G)$ admet comme adjoint à droite l'inclusion de $\mathcal{S}(G)$ dans $\mathcal{P}(G)$. Admet-elle un adjoint à gauche ?

Exercice 1.14 $\mathfrak{H}$ Pour chacune des affirmations suivantes, dire s'il s'agit d'une relation d'adjonction ou bien d'un exemple d'un résultat de ce chapitre (en précisant lequel).

1. pour $f : X \rightarrow Y$ une fonction, A et A' des parties de X , B et B' des parties de Y ,

$\bullet f_*(A \cap A') \subseteq f_*A \cap f_*A'$	$\bullet f^*(B \cup B') = f^*B \cup f^*B'$	$\bullet f_*f^*B \subseteq B$
$\bullet f_*(A \cup A') = f_*A \cup f_*A'$	$\bullet f^*(B \cap B') = f^*B \cap f^*B'$	$\bullet A \cap A' = A' \cap A$
$\bullet f_*A \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq f^*B$	$\bullet A \subseteq f^*f_*A$	
2. pour X un espace topologique et A, B, F et U des parties de X avec F fermée et U ouverte,

$\bullet A \subseteq \overline{A}$	$\bullet \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{A \cup B}$	$\bullet \overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
$\bullet \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\bullet \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$	$\bullet \overset{\circ}{A} \subseteq A$
3. pour E un espace vectoriel, S et S' des parties de E

$\bullet \text{Vect}(S \cap S') \subseteq \text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(S')$	$\bullet \text{Vect}(S \cup S') = \text{Vect}(\text{Vect}(S) \cup \text{Vect}(S'))$
--	---

Exercice 1.15 $\mathfrak{H}$ Soit A et B des ensembles. Soit X un treillis complet. Soit $\varphi : B \rightarrow X$ et $\psi : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$ des fonctions. Montrer que

$$\inf_{b \in \bigcup_{a \in A} \psi(a)} \varphi(b) = \inf_{a \in A} \left(\inf_{b \in \psi(a)} \varphi(b) \right).$$

Exercice 1.16 $\mathfrak{H}$ Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une fonction croissante d'un ensemble ordonné dans un treillis complet. Montrer que, pour tout $x \in X$, $\inf \varphi_* \{x' \mid x \leq x'\} = \varphi(x)$.

Exercice 1.17 $\mathfrak{H}$ Soit X un ensemble ordonné et $y, z : I \rightarrow X$ des fonctions. Montrer que $(\inf_i y_i) \wedge (\inf_i z_i) = \inf_i (y_i \wedge z_i)$. En particulier si y est une fonction constante de valeur x on obtient $x \wedge \inf_i y_i = \inf_i (x \wedge y_i)$.