

10 Théorème de Mayer-Vietoris

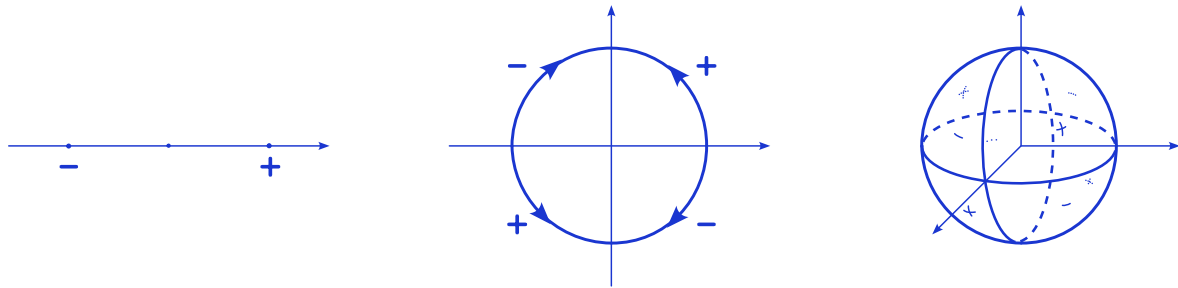
Exercice 6.6 $\square$ Le but de cet exercice est de décrire très explicitement un générateur de $H_n(\mathbb{S}^n)$ pour tout n , en reprenant la démonstration du théorème 260 (on utilisera vraiment la démonstration et pas seulement l'énoncé). On note ι l'inclusion de Δ_n dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ on note s_i la symétrie par rapport au i -ème hyperplan de coordonnées. Pour tout ensemble $I \subseteq \{0, \dots, n\}$ on note s_I la composée des s_i pour $i \in I$ (ces transformations commutent donc l'ordre de composition n'a pas d'importance). On note $|I|$ le cardinal d'un tel ensemble. On note $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$ la projection radiale. Nous allons montrer que

$$c_n := \sum_I (-1)^{|I|} p \circ s_I \circ \iota$$

est un cycle et que $[c_n]$ engendre $H_n(\mathbb{S}^n)$ (pour tout anneau de coefficients).

1. Faire un dessin de c_n pour $n \in \{0, 1, 2\}$.

Solution :



2. Soit I une partie de $\{0, \dots, n\}$ et $i \in I^c$. Montrer que $s_I \circ \iota \circ \partial_n^i = s_{I \cup \{i\}} \circ \iota \circ \partial_n^i$ où les $\partial_n^i \in \Sigma_{n-1}(\Delta_n)$ sont les simplexes intervenant dans la définition de l'opérateur ∂ .

Solution : On a $\partial_p^i = s_{p+1}(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p)$ par définition. Comme s_I est linéaire, la composition est aussi de ce type.

$$s_I \circ \iota \circ \partial_n^i = s_{p+1}(s_I(e_0), \dots, \widehat{s_I(e_i)}, \dots, s_I(e_p)).$$

En utilisant que $i \notin I$, on a $\forall j \neq i, s_{I \cup \{i\}}(e_j) = s_I(e_j)$ et donc le résultat annoncé (le seul vecteur qui change est celui omis dans la liste).

3. En déduire que $\partial c_n = 0$.

Solution : L'opérateur de bord est une somme sur i et, pour chaque i on peut remplacer la somme sur I qui intervient dans la définition de c_n par une somme sur les I ne contenant pas i de la contribution de I et de celle $I \cup \{i\}$ puis utiliser la question précédente.

$$\begin{aligned}
\partial c_n &= \sum_i (-1)^i \left(\sum_I (-1)^{|I|} p \circ s_I \circ \iota \right) \circ \partial_n^i \\
&= \sum_i (-1)^i \left(\sum_{\substack{I \\ i \notin I}} \left((-1)^{|I|} p \circ s_I \circ \iota \circ \partial_n^i + \underbrace{(-1)^{|I|+1} p \circ s_{I \cup \{i\}} \circ \iota \circ \partial_n^i}_{= -(-1)^{|I|} p \circ s_I \circ \iota \circ \partial_n^i} \right) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

4. On voit $\mathbb{S}^{n-1}$ comme l'intersection entre $\mathbb{S}^n$ et l'hyperplan $\{x_n = 0\}$ identifié à $\mathbb{R}^n$. Comme dans la démonstration du théorème calculant l'homologie des sphères, on applique le théorème de Mayer-Vietoris à la décomposition $\mathbb{S}^n = U \cup V$ où $U = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$ et $V = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ de sorte que $U \cap V$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{S}^{n-1}$ et le connectant δ peut être vu comme allant de $H_n(\mathbb{S}^n)$ dans $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$. Montrer que $\delta[c_n] = [c_{n-1}]$.

Solution : On veut décomposer c_n en somme d'une chaîne dans U et d'une chaîne dans V . On pose bien sûr :

$$a_n = \sum_{\substack{I \\ n \notin I}} (-1)^{|I|} p \circ s_I \circ \iota \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{\substack{I \\ n \in I}} (-1)^{|I|} p \circ s_I \circ \iota.$$

Le théorème de Mayer-Vietoris assure que $\delta[c_n] = [\partial a_n]$. Pour calculer ∂a_n , on reprend le calcul de la question précédente, mais en mettant de côté le terme $i = n$ de la somme externe. On obtient

$$\begin{aligned}
\partial c_n &= \sum_i (-1)^i \left(\sum_I (-1)^{|I|} p \circ s_I \circ \iota \right) \circ \partial_n^i \\
&= \sum_{\substack{I \\ n \notin I}} (-1)^{|I|} p \circ s_I \circ \iota \circ \partial_n^n
\end{aligned}$$

Et ∂_n^n restreint à $\mathbb{R}^n$ est simplement l'inclusion de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ donc on retrouve bien c_{n-1} .

5. Conclure.

Solution : Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que c_n engendre $H_n(\mathbb{S}^n)$. Pour $n = 1$, on a vu dans la démonstration du théorème 260 que δ fournit un isomorphisme entre $H_1(\mathbb{S}^1)$ et le noyau de $H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V)$. Or c_0 engendre bien ce noyau donc c_1 engendre $H_1(\mathbb{S}^1)$ vu la question précédente.

Supposons maintenant que c_{n-1} engendre $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ pour $n \geq 2$. On a vu dans la démonstration du théorème 260 que δ fournit un isomorphisme entre $H_n(\mathbb{S}^n)$ et $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ donc la question précédente et l'hypothèse de récurrence permettent de conclure immédiatement.

Exercice 6.7 ☞ Cet exercice est la suite de l'exercice 6.2 dont il faut relire les trois premières questions (simplement les définitions et énoncés). Dans tout cet exercice, on fixe un entier $n > 0$.

1. Soit P un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$, $S \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ la sphère équatoriale correspondante : $S = \mathbb{S}^n \cap P$. En utilisant la suite de Mayer-Vietoris associée à P comme dans le calcul de l'homologie de $\mathbb{S}^n$, montrer que si $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ préserve S et chacun des hémisphères délimités par S alors $\deg(f) = \deg(f|_S)$.

Solution : La suite exacte de Mayer-Vietoris associée à P dans le cours montre que le connectant δ induit un isomorphisme φ de $H_n(\mathbb{S}^n)$ dans $H_{n-1}(S)$ (φ est la composée de δ et de l'isomorphisme induit par la rétraction de l'intersection sur S). Comme f préserve chaque hémisphère, la fonctorialité de la suite exacte de Mayer-Vietoris donne le diagramme commutatif suivant (où, contrairement à l'étude de la symétrie hyperplane, il n'y a pas de changement de signe, car f n'échange pas les ouverts de la décomposition) :

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\varphi} & H_{n-1}(S) \\ f_* \downarrow & & \downarrow (f|_S)_* \\ H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\varphi} & H_{n-1}(S) \end{array}$$

Ainsi $\deg(f) \text{Id}_{H_n(\mathbb{S}^n)} = \varphi^{-1} \circ (\deg(f|_S) \text{Id}_{H_{n-1}(S)}) \circ \varphi = \deg(f|_S) \text{Id}_{H_n(\mathbb{S}^n)}$ et donc $\deg(f) = \deg(f|_S)$ en utilisant que $H_n(\mathbb{S}^n)$ est libre et non trivial (ici, il suffirait de savoir qu'il admet un élément qui n'est pas de torsion).

On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ comme d'habitude et on identifie $\mathbb{R}^2$ au complémentaire d'un point dans $\mathbb{S}^2$ par projection stéréographique.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré au moins 1. On notera également P la fonction polynomiale associée. Montrer que cette fonction s'étend en fonction continue de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{S}^2$.

Solution : Notons N le point de $\mathbb{S}^2$ qui n'est pas dans $\mathbb{R}^2$. On étend la fonction en envoyant N sur N . Il suffit de montrer que la fonction étendue est continue en tout point. Comme $\mathbb{R}^2$ est ouvert dans $\mathbb{S}^2$, et que la fonction de départ est continue, il suffit de montrer la continuité en N . Or la fonction de départ tend vers l'infini en l'infini donc l'extension est bien continue (voir le corollaire 176 pour plus de détails).

2. Montrer que la fonction P étendue est homotope à $z \mapsto z^{\deg(P)}$ étendue (parmi les fonctions de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{S}^2$), où $\deg(P)$ désigne le degré de P au sens de l'algèbre.

Solution : Notons d le degré (algébrique) de P . On écrit $P = aX^d + Q$ avec Q de degré au plus $d-1$. Le complémentaire de 0 dans $\mathbb{C}$ est connexe par arcs donc on obtient un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ qui relie a à 1. Parmi les fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ on considère l'homotopie $(t, z) \mapsto \gamma(t)z^d + (1-t)Q(z)$. Il s'agit d'une homotopie parmi les fonctions polynomiales de degré $\deg(P)$. Pour chaque t on étend cette fonction à $\mathbb{S}^2$ en envoyant N sur N . Une variante de l'argument de la question précédente assure qu'on obtient ainsi une homotopie d'applications entre $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{S}^2$ (il faut être un peu plus prudent pour la continuité).

3. Montrer que le degré de P au sens de cet exercice est égal à son degré algébrique.

Solution : L'invariance par homotopie du degré topologique (provenant de l'invariance par homotopie de l'application induite en homologie) et la question précédente permettent

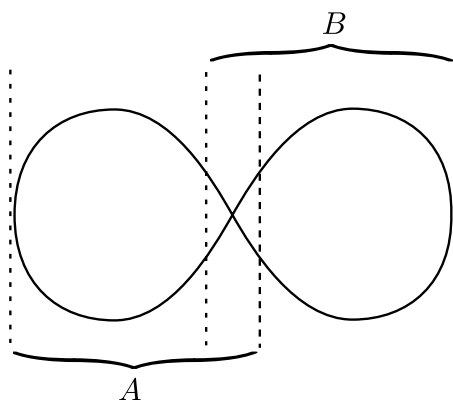
de supposer que $P = X^d$. La fonction associée préserve alors la sphère équatoriale $\mathbb{S}^1$ et chaque hémisphère. La question 7 permet donc de calculer le degré de P comment étant le degré de $z \mapsto z^d$ vue comme application de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^1$. Or l'homologie en degré 1 de $\mathbb{S}^1$ est engendrée par la chaîne $t \mapsto \exp(2i\pi t)$ qui fait une fois le tour. Cette chaîne est envoyée sur d fois elle-même donc on a bien le résultat annoncé.

4. Montrer le théorème de d'Alembert-Gauß : tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré strictement positif admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Solution : Soit P un polynôme de degré $p > 0$. La question précédente assure que le degré topologique de P vu comme fonction sur $\mathbb{S}^2$ est d . La question 2 de l'exercice 6.2 assure que cette fonction est surjective. En particulier 0 est dans son image. Comme N n'est pas envoyé sur 0, on obtient bien $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$.

On notera que cette démonstration est jolie, mais ridiculement coûteuse par rapport à la difficulté du théorème de d'Alembert-Gauß puisque qu'elle utilise toute la technologie développée en cours sur l'homologie singulière.

Exercice 6.8 $\square$ Le but de cet exercice est de calculer l'homologie d'un bouquet X de deux cercles (un huit dans le plan). On utilise comme anneau de coefficients un anneau commutatif R quelconque et on l'omet dans les notations. On note A et B les parties de X suggérées par la figure ci-dessous (intersections entre X et des bandes verticales).



On note A' le cercle de gauche et B' celui de droite. On voit sur le dessin que A se rétracte par déformation sur A' et B sur B' , et que l'intersection $A \cap B$ se rétracte par déformation sur le point central.

1. Calculer $H_0(X)$.

Solution : Comme X est connexe par arc, $H_0(X)$ est isomorphe à R (vu comme R -module).

2. La suite exacte de Mayer-Vietoris associée à A et B comporte pour chaque entier p ,

$$H_p(A) \oplus H_p(B) \longrightarrow H_p(X) \longrightarrow H_{p-1}(A \cap B)$$

En déduire $H_p(X)$ pour $p > 1$.

Solution : Comme A se rétracte par déformation sur le cercle A' , on connaît l'homologie de A : c'est celle d'un cercle. Elle est isomorphe à R en degré 0 et 1, et elle est nulle en tous les autres degrés. C'est la même chose pour B .

L'intersection $A \cap B$ se rétracte par déformation sur un point donc son homologie est celle d'un point: isomorphe à R en degré 0 et nulle pour tous les autres degrés.

Dans le cas $p > 1$, le morceau de suite exacte cité se réduit donc à $0 \rightarrow H_p(X) \rightarrow 0$ et l'exercice 6.3 assure que $H_p(X) = 0$.

3. La suite exacte de Mayer-Vietoris associée à A et B comporte

$$H_1(A \cap B) \longrightarrow H_1(A) \oplus H_1(B) \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow H_0(A \cap B) \longrightarrow H_0(A) \oplus H_0(B)$$

En déduire $H_1(X)$ est libre de rang 2 et en décrire une base.

Solution : Vu les rétractions par déformation évoquées précédemment, on peut réécrire la suite exacte

$$0 \longrightarrow R \oplus R \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow R \longrightarrow R \oplus R$$

Il faut comprendre la dernière application en utilisant l'étude de H_0 en cours. L'unique composante connexe de $A \cap B$ est envoyée par l'inclusion dans A (resp. B) sur l'unique composante connexe de A (resp. B). Donc l'application correspondante de R dans $R \oplus R$ est $x \mapsto (x, x)$ qui est injective. Donc son noyau est trivial. Ce noyau est l'image de l'application précédente dans la suite exacte. Cette application est donc nulle et on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow R \oplus R \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow 0$$

On en déduit que $H_1(X)$ est libre de rang 2. Mieux, l'application $H_1(A) \oplus H_1(B) \rightarrow H_1(X)$ est un isomorphisme. Et on sait que le H_1 du cercle est engendré par l'image du cycle « faire le tour du cercle ». Donc $H_1(X)$ est engendré librement par l'image des deux chaînes qu'on imagine: une qui fait le tour du cercle de gauche et une pour le cercle de droite.

Exercice 6.9 ☐ L'espace projectif réel de dimension n est l'ensemble $\mathbb{R}P^n$ des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Chaque droite vectorielle dans $\mathbb{R}^{n+1}$ intersecte la sphère $\mathbb{S}^n$ en deux points antipodaux. On peut donc voir $\mathbb{R}P^n$ comme le quotient de $\mathbb{S}^n$ par la relation d'équivalence qui identifie les paires de points antipodaux. En particulier cela fournit une topologie sur $\mathbb{R}P^n$. On considère maintenant la boule fermée $\mathbb{B}^n$ vu comme hémisphère sud dans $\mathbb{S}^n$ (disons par projection stéréographique depuis le pôle Nord). La relation d'antipodie est presque triviale sur $\mathbb{B}^n$, mais les points de l'équateur $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$ sont toujours identifiés par antipodie. Ainsi $\mathbb{R}P^n$ est également le quotient de $\mathbb{B}^n$ par la relation qui identifie les points antipodaux du bord. On travaillera avec ces deux modèles. On note que l'image de l'équateur dans $\mathbb{R}P^n$ est une copie de $\mathbb{R}P^{n-1}$ dans $\mathbb{R}P^n$. Nous allons calculer l'homologie de $\mathbb{R}P^n$ pour $n \leq 3$, en supposant que l'anneau de base R soit $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ pour $n = 3$. Il n'y a pas d'obstruction à traiter le cas où n et R sont quelconques avec les outils introduits ici, mais cela devient plus technique.

1. Montrer que $\mathbb{R}P^0$ est un singleton. En déduire son homologie.

Solution : C'est un quotient de la boule $\mathbb{B}^0$ qui est déjà un singleton. Alternativement, on peut aussi dire que c'est le quotient de $\mathbb{S}^0$ qui est une paire de points par la relation qui identifie les deux points. Son homologie est donc isomorphe à R en degré zéro et nulle en tous les autres degrés.

2. Montrer que $\mathbb{R}P^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$. En déduire son homologie.

Solution : C'est un quotient de la boule $\mathbb{B}^1 = [-1, 1]$ par la relation qui identifie -1 et 1 . On voit qu'on obtient un cercle. Montrons-le plus formellement. L'application f de $[-1, 1]$ dans le cercle $\mathbb{S}^1$ qui envoie t sur $(\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ est continue et compatible avec la relation d'équivalence donc descend en fonction continue φ de $\mathbb{R}P^1$ dans $\mathbb{S}^1$. La fonction f de départ est surjective donc π aussi. De plus le défaut d'injectivité de f est exactement la relation par laquelle on quotiente : $f(t) = f(t')$ si et seulement si $\{t, t'\} = \{-1, 1\}$. Donc φ est bijective. Comme $\mathbb{R}P^1$ est compact (comme image continue du compact $\mathbb{B}^1$) et $\mathbb{S}^1$ est séparé, φ^{-1} est automatiquement continue par le lemme 162. Ainsi φ est un homéomorphisme.

L'homologie de $\mathbb{R}P^1$ est donc libre de rang 1 en degré 0 et 1, nulle en les autres degrés.

On note U_n l'image de l'intérieur de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{R}P^n$. De façon équivalente, U_n est l'image dans $\mathbb{R}P^n$ du complémentaire de l'équateur dans $\mathbb{S}^n$. On note V_n l'image dans $\mathbb{R}P^n$ du complémentaire de la boule $\frac{1}{2}\mathbb{B}^n$. De façon équivalente, V_n est l'image d'une région tropicale de $\mathbb{S}^n$.

1. Montrer que les ensembles U_n et V_n sont ouverts et recouvrent $\mathbb{R}P^n$.

Solution : Ces ensembles sont images d'ouverts saturés dans $\mathbb{B}^n$ qui recouvrent $\mathbb{B}^n$ donc on a bien des ouverts qui recouvrent $\mathbb{R}P^n$.

Rappel : une partie A d'un ensemble X muni d'une relation d'équivalence $\sim$ est saturée si, pour tous x et x' équivalents, $x \in A$ implique $x' \in A$. Si (Y, π) est un quotient de $(X, \sim)$ alors A est saturée si et seulement si $\pi^*(\pi_*A) = A$. En particulier si X est muni d'une topologie T et qu'on munit Y de la topologie quotient π_*T alors l'image π_*A d'un ouvert saturé A est ouverte puisque sa préimage $\pi^*(\pi_*A)$ est ouverte.

2. Montrer que U_n se rétracte par déformation sur un point.

Solution : L'ouvert U_n est l'image d'une boule (ouverte non vide) sur laquelle la relation d'équivalence est triviale. Il est donc homéomorphe à une boule ouverte non vide de $\mathbb{R}^n$. On a vu en cours qu'une telle boule se rétracte par déformation sur son centre.

3. Montrer que V_n se rétracte par déformation sur $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Solution : Dans $\mathbb{B}^n$, le complémentaire de la boule de rayon $1/2$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{S}^n$ par $(x, t) \mapsto (1-t)x + tx / \|x\|$.

Cette homotopie entre l'identité et une rétraction descend en homotopie de V_n puisque qu'elle est compatible avec la relation d'équivalence. L'image de la sphère est précisément le $\mathbb{R}P^{n-1}$ dont parle l'énoncé, par définition.

4. Montrer que $U_n \cap V_n$ se rétracte par déformation sur une sphère de dimension $n-1$.

Solution : L'intersection $U_n \cap V_n$ est l'image de $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 1/2 < \|x\| < 1\} \subseteq \mathbb{B}^n$. Cet ensemble se rétracte par déformation sur la sphère de rayon $3/4$ par exemple. En effet on peut utiliser l'homotopie radiale

$$(x, t) \mapsto (1-t)x + t \frac{3}{4\|x\|} x.$$

La relation d'équivalence est triviale sur cette région donc cette homotopie descend trivialement au quotient.

5. Dans le cas $n = 2$, $U_2 \cap V_2$ et V_2 sont tous deux homotopiquement équivalents à des cercles, donc leur H_1 est isomorphe à R . Montrer que l'application induite entre ces H_1 par l'inclusion de $U_2 \cap V_2$ dans V_2 est la multiplication par 2 quitte à changer de base pour l'un des deux.

Solution : On sait que l'homologie en degré 1 d'un cercle est engendrée par tout cycle qui fait une fois le tour du cercle. On a vu que $U_2 \cap V_2$ se rétracte sur le cercle de rayon $3/4$ autour du centre de $\mathbb{B}^2$. On réalise ce cercle comme image d'un cycle $c = x + y$ où x et y sont des 1-simplexes qui font un demi-tour. Disons par exemple que x envoie $te_0 + (1-t)e_1 \in \Delta_1$ sur $3/4(\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ et y l'envoie sur $3/4(\cos(\pi + \pi t), \sin(\pi + \pi t))$. La classe de c dans $H_1(U_2 \cap V_2)$ engendre librement ce R -module, on la choisit comme base pour identifier $H_1(U_2 \cap V_2)$ à R .

L'image de cette classe dans $H_1(V_2)$ est simplement la classe de c vu comme cycle dans V_2 . La rétraction de V_2 sur $\mathbb{R}P^1$ envoie x et y sur le même cycle qui fait le tour de $\mathbb{R}P^1$. En effet dans $\mathbb{B}^2$ elle les envoie bien sûr sur des demi-tours, mais le quotient identifie les points antipodaux et ces demi-tours deviennent le même tour complet. Ce tour complet engendre $H_1(V_2)$, on le choisit comme base pour identifier $H_1(V_2)$ à R . L'application linéaire induite par l'inclusion de $U_2 \cap V_2$ dans V_2 est bien la multiplication par 2 sur R dans ces bases.

6. En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris, montrer que

$$H_p(\mathbb{R}P^2, R) \simeq \begin{cases} R & \text{si } p = 0 \\ R/2R & \text{si } p = 1 \\ T_2R & \text{si } p = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $T_2R := \{x \in R \mid 2x = 0\}$ est la 2-torsion de R . Expliciter ce que devient la formule ci-dessus dans les deux cas $R = \mathbb{Z}$ et $R = \mathbb{Q}$.

Solution : En toute dimension, l'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ est connexe par arc, car c'est l'image de la boule $\mathbb{B}^n$ qui est connexe par arc par la projection au quotient qui est continue. On a donc $H_0(\mathbb{R}P^n) \simeq R$ pour tout n .

Les questions précédentes et le calcul de l'homologie du point et des sphères en cours donnent :

$$H_p(U_2) \simeq \begin{cases} R & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$H_p(V_2) \simeq H_p(U_2 \cap V_2) \simeq \begin{cases} R & \text{si } p = 0 \text{ ou } p = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Prenons un extrait de la suite exacte de Mayer-Vietoris.

$$H_p(U_2) \oplus H_p(V_2) \rightarrow H_p(\mathbb{R}P^2) \rightarrow H_{p-1}(U_2 \cap V_2)$$

Si $p \geq 3$, les deux extrémités sont nulles donc on obtient $H_p(\mathbb{R}P^2) = 0$.

Pour $p = 2$, il nous faut un extrait plus long :

$$H_2(U_2) \oplus H_2(V_2) \rightarrow H_2(\mathbb{R}P^2) \rightarrow H_1(U_2 \cap V_2) \rightarrow H_1(U_2) \oplus H_1(V_2)$$

qu'on peut récrire au vu des isomorphismes ci-dessus

$$0 \longrightarrow H_2(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow R \xrightarrow{\times 2} R$$

L'exactitude en $H_2(\mathbb{R}P^2)$ assure que $H_2(\mathbb{R}P^2)$ est isomorphe à son image dans le premier R de la suite. L'exactitude au terme suivant assure que cette image est le noyau de la dernière flèche, c'est-à-dire T_2R par définition. On notera que $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ n'ont pas de 2-torsion.

Pour $p = 1$, on a besoin d'un extrait encore plus long :

$$H_1(U_2 \cap V_2) \rightarrow H_1(U_2) \oplus H_1(V_2) \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow H_0(U_2 \cap V_2) \rightarrow H_0(U_2) \oplus H_0(V_2)$$

qu'on peut récrire au vu des isomorphismes ci-dessus, de la question précédente et du fait que l'unique composante connexe par arcs de $U_2 \cap V_2$ s'envoie dans l'unique composante de U_2 et dans l'unique composante de V_2 :

$$R \xrightarrow{\times 2} R \longrightarrow H_1(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow R \xrightarrow{x \mapsto (x, x)} R \oplus R$$

La dernière flèche est injective donc l'image de l'avant dernière flèche est nulle donc on a la suite exacte

$$R \xrightarrow{\times 2} R \longrightarrow H_1(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow 0$$

Par exactitude, la flèche du milieu est surjective et $H_1(\mathbb{R}P^2)$ est isomorphe au quotient de R par l'image de la première flèche, c'est-à-dire à $R/2R$.

On a bien obtenu les modules d'homologie annoncés. Les spécialisations demandées sont

$$H_p(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$H_p(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Q}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Car tout rationnel est multiple de 2 donc $\mathbb{Q}/2\mathbb{Q} = 0$.

7. En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris, montrer que si $T_2R = 0$ alors

$$H_p(\mathbb{R}P^3, R) \simeq \begin{cases} R & \text{si } p = 0 \\ R/2R & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{si } p = 2 \\ R & \text{si } p = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Expliciter ce que devient la formule ci-dessus dans les deux cas $R = \mathbb{Z}$ et $R = \mathbb{Q}$.

Solution : Les questions précédentes et le calcul de l'homologie du point et des sphères en cours donnent :

$$H_p(U_2) \simeq \begin{cases} R & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$H_p(V_2) \simeq \begin{cases} R & \text{si } p = 0 \\ R/2R & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$H_p(U_2 \cap V_2) \simeq \begin{cases} R & \text{si } p = 0 \\ R & \text{si } p = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Prenons un extrait de la suite exacte de Mayer-Vietoris.

$$H_p(U_3) \oplus H_p(V_3) \rightarrow H_p(\mathbb{R}P^3) \rightarrow H_{p-1}(U_3 \cap V_3)$$

Si $p \geq 4$ ou $p = 2$, les deux extrémités sont nulles donc on obtient $H_p(\mathbb{R}P^3) = 0$.

Pour $p = 3$, il nous faut un extrait plus long :

$$H_3(U_3) \oplus H_3(V_3) \rightarrow H_3(\mathbb{R}P^3) \rightarrow H_2(U_3 \cap V_3) \rightarrow H_2(U_3) \oplus H_2(V_3)$$

qu'on peut récrire au vu des questions précédentes

$$0 \rightarrow H_3(\mathbb{R}P^3) \rightarrow R \rightarrow 0$$

Donc $H_3(\mathbb{R}P^3) \simeq R$.

Pour $p = 1$, on a besoin d'un extrait encore plus long :

$$H_1(U_3 \cap V_3) \rightarrow H_1(U_3) \oplus H_1(V_3) \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^3) \rightarrow H_0(U_3 \cap V_3) \rightarrow H_0(U_3) \oplus H_0(V_3)$$

qu'on peut récrire au vu des questions précédentes et du fait que l'unique composante connexe par arcs de $U_3 \cap V_3$ s'envoie dans l'unique composante de U_3 et dans l'unique composante de V_3 :

$$0 \longrightarrow R/2R \longrightarrow H_1(\mathbb{R}P^3) \xrightarrow{x \mapsto (x, x)} R \longrightarrow R \oplus R$$

La dernière flèche est injective donc l'image de l'avant dernière flèche est nulle donc on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow R/2R \longrightarrow H_1(\mathbb{R}P^3) \longrightarrow 0$$

Donc $H_1(\mathbb{R}P^3) \simeq R/2R$.

On a bien obtenu les modules d'homologie annoncés. Les spécialisations demandées sont

$$H_p(\mathbb{R}P^3, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{si } p = 2 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$H_p(\mathbb{R}P^3, \mathbb{Q}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{si } p = 2 \\ \mathbb{Q} & \text{si } p = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère maintenant le groupe $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ des rotations de l'espace euclidien de dimension 3. Une rotation est spécifiée par un axe de rotation, qui est une droite vectorielle orientée, et un angle. Chaque axe de rotation est dirigée par un unique vecteur dans $\mathbb{S}^2$. La rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé par u est égale à la rotation d'angle $-\theta$ autour de l'axe dirigé par $-u$ donc on peut se restreindre aux angles dans $[0, \pi]$. On a donc une application surjective de $\mathbb{S}^2 \times [0, \pi]$ dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ qui présente $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ comme quotient de $\mathbb{S}^2 \times [0, \pi]$. Cette relation n'est pas triviale. D'abord toutes les rotations d'angle 0 sont Id, donc tout $\mathbb{S}^2 \times \{0\}$ est quotienté sur un point pour transformer $\mathbb{S}^2 \times [0, \pi]$ en boule de rayon π . Ensuite la rotation d'axe dirigé par u et d'angle π est égale à la rotation d'axe dirigé par $-u$ et d'angle π . Donc $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est le quotient d'une boule fermée de dimension 3 par la relation qui identifie les points antipodaux du bord. On admet que la topologie ainsi obtenue sur $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ coïncide avec sa topologie induite par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ainsi $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^3$ donc on connaît son homologie.

On termine par un peu de maths appliquées. On considère un bras robotique au bout duquel est fixé un pointeur laser. La direction pointée par le laser est une droite orientée dans $\mathbb{R}^3$, et l'espace de ces droites est naturellement une sphère $\mathbb{S}^2$. Ce bras est articulé et commandé par un certain nombre de curseurs dont l'état forme un espace topologique X . Par exemple on peut imaginer que X est un produit de cercles et d'intervalles si les articulations sont des liaisons pivots dont certaines peuvent faire un tour complet et d'autres non. On obtient donc une application continue $\varphi : X \rightarrow \mathbb{S}^2$. On suppose le bras suffisamment complexe pour assurer que φ est surjective (on peut réaliser cela avec deux liaisons pivot). En comparant l'orientation du morceau de robot qui tient le pointeur laser avec une orientation de référence, on voit que φ se factorise à travers l'action de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{S}^2$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{S}^2 \\ & \searrow f & \nearrow \psi \\ & \text{SO}_3(\mathbb{R}) & \end{array}$$

8. Montrer que φ n'admet aucun inverse à droite continu : on ne peut pas choisir continument la commande du bras robotique en fonction de la direction souhaitée pour le rayon laser.

Solution : Supposons qu'il existe un inverse à droite θ de φ . On a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & \theta & \\
 X & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{S}^2 \\
 & \varphi & \\
 & \searrow f & \nearrow \psi \\
 & \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) &
 \end{array}$$

Avec $\varphi \circ \theta = \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^2}$ et $\psi \circ f = \varphi$ donc $\psi \circ f \circ \theta = \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^2}$ qui donne le diagramme suivant en homologie en degré 2.

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_2(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{\theta_*} & H_2(X) & \xrightarrow{f_*} & H_2(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\psi_*} & H_2(\mathbb{S}^2) \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & & & \mathrm{Id}_{H_2(\mathbb{S}^2)} &
 \end{array}$$

On utilise l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et les calculs des questions précédentes pour convertir ce diagramme en

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{\theta_*} & H_2(X) & \xrightarrow{f_*} & 0 & \xrightarrow{\psi_*} & \mathbb{Z} \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & & & \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}} &
 \end{array}$$

qui est absurde puisqu'il factorise l'identité de $\mathbb{Z}$ à travers un groupe abélien trivial.