

10 Théorème de Mayer-Vietoris

Exercice 6.6 $\square$ Le but de cet exercice est de décrire très explicitement un générateur de $H_n(\mathbb{S}^n)$ pour tout n , en reprenant la démonstration du théorème 260 (on utilisera vraiment la démonstration et pas seulement l'énoncé). On note ι l'inclusion de Δ_n dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ on note s_i la symétrie par rapport au i -ème hyperplan de coordonnées. Pour tout ensemble $I \subseteq \{0, \dots, n\}$ on note s_I la composée des s_i pour $i \in I$ (ces transformations commutent donc l'ordre de composition n'a pas d'importance). On note $|I|$ le cardinal d'un tel ensemble. On note $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$ la projection radiale. Nous allons montrer que

$$c_n := \sum_I (-1)^{|I|} p \circ s_I \circ \iota$$

est un cycle et que $[c_n]$ engendre $H_n(\mathbb{S}^n)$ (pour tout anneau de coefficients).

1. Faire un dessin de c_n pour $n \in \{0, 1, 2\}$.
2. Soit I une partie de $\{0, \dots, n\}$ et $i \in I^c$. Montrer que $s_I \circ \iota \circ \partial_n^i = s_{I \cup \{i\}} \circ \iota \circ \partial_n^i$ où les $\partial_n^i \in \Sigma_{n-1}(\Delta_n)$ sont les simplexes intervenant dans la définition de l'opérateur ∂ .
3. En déduire que $\partial c_n = 0$.
4. On voit $\mathbb{S}^{n-1}$ comme l'intersection entre $\mathbb{S}^n$ et l'hyperplan $\{x_n = 0\}$ identifié à $\mathbb{R}^n$. Comme dans la démonstration du théorème calculant l'homologie des sphères, on applique le théorème de Mayer-Vietoris à la décomposition $\mathbb{S}^n = U \cup V$ où $U = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$ et $V = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ de sorte que $U \cap V$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{S}^{n-1}$ et le connectant δ peut être vu comme allant de $H_n(\mathbb{S}^n)$ dans $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$. Montrer que $\delta[c_n] = [c_{n-1}]$.
5. Conclure.

Exercice 6.7 $\exists$ Cet exercice est la suite de l'exercice 6.2 dont il faut relire les trois premières questions (simplement les définitions et énoncés). Dans tout cet exercice, on fixe un entier $n > 0$.

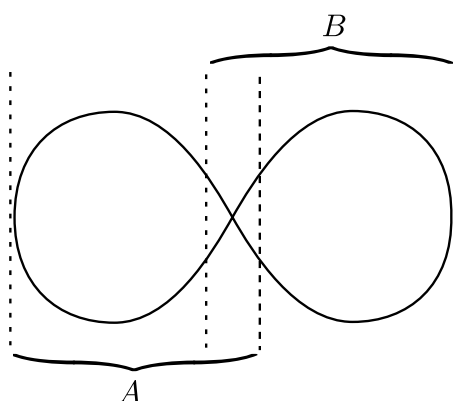
1. Soit P un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$, $S \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ la sphère équatoriale correspondante : $S = \mathbb{S}^n \cap P$. En utilisant la suite de Mayer-Vietoris associée à P comme dans le calcul de l'homologie de $\mathbb{S}^n$, montrer que si $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ préserve S et chacun des hémisphères délimités par S alors $\deg(f) = \deg(f|_S)$.

On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ comme d'habitude et on identifie $\mathbb{R}^2$ au complémentaire d'un point dans $\mathbb{S}^2$ par projection stéréographique.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré au moins 1. On notera également P la fonction polynomiale associée. Montrer que cette fonction s'étend en fonction continue de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{S}^2$.

2. Montrer que la fonction P étendue est homotope à $z \mapsto z^{\deg(P)}$ étendue (parmi les fonctions de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{S}^2$), où $\deg(P)$ désigne le degré de P au sens de l'algèbre.
3. Montrer que le degré de P au sens de cet exercice est égal à son degré algébrique.
4. Montrer le théorème de d'Alembert-Gauß : tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré strictement positif admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6.8 $\square$ Le but de cet exercice est de calculer l'homologie d'un bouquet X de deux cercles (un huit dans le plan). On utilise comme anneau de coefficients un anneau commutatif R quelconque et on l'omet dans les notations. On note A et B les parties de X suggérées par la figure ci-dessous (intersections entre X et des bandes verticales).



On note A' le cercle de gauche et B' celui de droite. On voit sur le dessin que A se rétracte par déformation sur A' et B sur B' , et que l'intersection $A \cap B$ se rétracte par déformation sur le point central.

1. Calculer $H_0(X)$.
2. La suite exacte de Mayer-Vietoris associée à A et B comporte pour chaque entier p ,

$$H_p(A) \oplus H_p(B) \longrightarrow H_p(X) \longrightarrow H_{p-1}(A \cap B)$$

En déduire $H_p(X)$ pour $p > 1$.

3. La suite exacte de Mayer-Vietoris associée à A et B comporte

$$H_1(A \cap B) \longrightarrow H_1(A) \oplus H_1(B) \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow H_0(A \cap B) \longrightarrow H_0(A) \oplus H_0(B)$$

En déduire $H_1(X)$ est libre de rang 2 et en décrire une base.

Exercice 6.9 $\square$ L'espace projectif réel de dimension n est l'ensemble $\mathbb{R}P^n$ des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Chaque droite vectorielle dans $\mathbb{R}^{n+1}$ intersecte la sphère $\mathbb{S}^n$ en deux points antipodaux. On peut donc voir $\mathbb{R}P^n$ comme le quotient de $\mathbb{S}^n$ par la relation d'équivalence qui identifie les paires de points antipodaux. En particulier cela fournit une topologie sur $\mathbb{R}P^n$. On considère maintenant la boule fermée $\mathbb{B}^n$ vu comme hémisphère sud dans $\mathbb{S}^n$ (disons par projection stéréographique depuis le pôle Nord). La relation d'antipodie est presque triviale sur $\mathbb{B}^n$, mais les points de l'équateur $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$ sont toujours identifiés par antipodie. Ainsi $\mathbb{R}P^n$ est également le quotient de $\mathbb{B}^n$ par la relation qui identifie les points antipodaux du bord. On travaillera avec ces deux modèles. On note que l'image de l'équateur dans $\mathbb{R}P^n$ est une copie de $\mathbb{R}P^{n-1}$ dans $\mathbb{R}P^n$. Nous allons calculer l'homologie de $\mathbb{R}P^n$ pour $n \leq 3$, en supposant que l'anneau de base R soit $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ pour $n = 3$. Il n'y a pas d'obstruction

à traiter le cas où n et R sont quelconques avec les outils introduits ici, mais cela devient plus technique.

1. Montrer que $\mathbb{R}P^0$ est un singleton. En déduire son homologie.
2. Montrer que $\mathbb{R}P^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$. En déduire son homologie.

On note U_n l'image de l'intérieur de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{R}P^n$. De façon équivalente, U_n est l'image dans $\mathbb{R}P^n$ du complémentaire de l'équateur dans $\mathbb{S}^n$. On note V_n l'image dans $\mathbb{R}P^n$ du complémentaire de la boule $\frac{1}{2}\mathbb{B}^n$. De façon équivalente, V_n est l'image d'une région tropicale de $\mathbb{S}^n$.

1. Montrer que les ensembles U_n et V_n sont ouverts et recouvrent $\mathbb{R}P^n$.
2. Montrer que U_n se rétracte par déformation sur un point.
3. Montrer que V_n se rétracte par déformation sur $\mathbb{R}P^{n-1}$.
4. Montrer que $U_n \cap V_n$ se rétracte par déformation sur une sphère de dimension $n - 1$.
5. Dans le cas $n = 2$, $U_2 \cap V_2$ et V_2 sont tous deux homotopiquement équivalents à des cercles, donc leur H_1 est isomorphe à R . Montrer que l'application induite entre ces H_1 par l'inclusion de $U_2 \cap V_2$ dans V_2 est la multiplication par 2 quitte à changer de base pour l'un des deux.
6. En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris, montrer que

$$H_p(\mathbb{R}P^2, R) \simeq \begin{cases} R & \text{si } p = 0 \\ R/2R & \text{si } p = 1 \\ T_2R & \text{si } p = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $T_2R := \{x \in R \mid 2x = 0\}$ est la 2-torsion de R . Expliciter ce que devient la formule ci-dessus dans les deux cas $R = \mathbb{Z}$ et $R = \mathbb{Q}$.

7. En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris, montrer que si $T_2R = 0$ alors

$$H_p(\mathbb{R}P^3, R) \simeq \begin{cases} R & \text{si } p = 0 \\ R/2R & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{si } p = 2 \\ R & \text{si } p = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Expliciter ce que devient la formule ci-dessus dans les deux cas $R = \mathbb{Z}$ et $R = \mathbb{Q}$.

On considère maintenant le groupe $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ des rotations de l'espace euclidien de dimension

3. Une rotation est spécifiée par un axe de rotation, qui est une droite vectorielle orientée, et un angle. Chaque axe de rotation est dirigée par un unique vecteur dans $\mathbb{S}^2$. La rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé par u est égale à la rotation d'angle $-\theta$ autour de l'axe dirigé par $-u$ donc on peut se restreindre aux angles dans $[0, \pi]$. On a donc une application surjective de $\mathbb{S}^2 \times [0, \pi]$ dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ qui présente $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ comme quotient de $\mathbb{S}^2 \times [0, \pi]$. Cette relation n'est pas triviale. D'abord toutes les rotations d'angle 0 sont Id, donc tout $\mathbb{S}^2 \times \{0\}$ est quotienté sur un point pour transformer $\mathbb{S}^2 \times [0, \pi]$ en boule de rayon π . Ensuite la rotation d'axe dirigé par u et d'angle π est égale à la rotation d'axe dirigé par $-u$ et d'angle π . Donc $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est le

quotient d'une boule fermée de dimension 3 par la relation qui identifie les points antipodaux du bord. On admet que la topologie ainsi obtenue sur $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ coïncide avec sa topologie induite par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ainsi $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^3$ donc on connaît son homologie.

On termine par un peu de maths appliquées. On considère un bras robotique au bout duquel est fixé un pointeur laser. La direction pointée par le laser est une droite orientée dans $\mathbb{R}^3$, et l'espace de ces droites est naturellement une sphère $\mathbb{S}^2$. Ce bras est articulé et commandé par un certain nombre de curseurs dont l'état forme un espace topologique X . Par exemple on peut imaginer que X est un produit de cercles et d'intervalles si les articulations sont des liaisons pivots dont certaines peuvent faire un tour complet et d'autres non. On obtient donc une application continue $\varphi : X \rightarrow \mathbb{S}^2$. On suppose le bras suffisamment complexe pour assurer que φ est surjective (on peut réaliser cela avec deux liaisons pivot). En comparant l'orientation du morceau de robot qui tient le pointeur laser avec une orientation de référence, on voit que φ se factorise à travers l'action de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{S}^2$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{S}^2 \\ & \searrow f \quad \nearrow \psi & \\ & \text{SO}_3(\mathbb{R}) & \end{array}$$

8. Montrer que φ n'admet aucun inverse à droite continu : on ne peut pas choisir continument la commande du bras robotique en fonction de la direction souhaitée pour le rayon laser.