

11 Compléments d'homologie singulière

Exercice 6.10 ☞ Cet exercice présente une autre application des ingrédients du théorème de Mayer-Vietoris (lemme des petites chaînes et suite exacte longue en homologie associée à une suite exacte courte de complexes). Elle n'est pas au programme de l'examen, mais il est vivement conseillé de prendre le temps de faire cet exercice durant les vacances si vous voulez profiter à fond de ce chapitre, y compris les techniques de démonstrations des théorèmes fondamentaux.

On fixe un anneau commutatif qu'on ne fait pas apparaître dans les notations, mais qui sert d'anneau des scalaires pour tous nos modules.

1. Soit M un module gradué et N un sous-module. Montrer qu'il existe une unique graduation sur le quotient M/N telle que la projection $\pi : M \rightarrow M/N$ soit une application graduée de degré 0. Montrer que, pour tout n , π induit un isomorphisme de $M_n/(M_n \cap N)$ vers $(M/N)_n$.

Solution : Montrons l'unicité. Comme π est surjective et graduée de degré 0, on a nécessairement, pour tout n , $(M/N)_n = \pi(M_n)$. La deuxième partie de la question est alors automatique par le cours d'algèbre linéaire (c'est une version du second théorème d'isomorphisme de Noether).

Pour l'existence, on définit la graduation $n \mapsto \pi(M_n)$ comme suggéré par l'unicité. On a bien une famille de sous-modules, car π est linéaire. La somme de ces sous-modules est l'image de la somme des M_n donc totale. Il reste à montrer que ces sous-modules sont en somme directe.

On munit N de la graduation induite par $M : n \mapsto N \cap M_n$. Soit n et m entiers distincts et soit $z \in (M/N)_n \cap (M/N)_m$. Par construction, on obtient $x \in M_n$ et $y \in M_m$ tels que $z = \pi(x) = \pi(y)$. Ainsi $x - y \in \ker \pi = N$. De plus $x - y$ est dans $M_n \oplus M_m$ dont l'intersection avec N est dans $N_n \oplus N_m$. Donc, on obtient $x' \in N_n$ et $y' \in N_m$ tels que $x - y = x' + y'$. On a donc $x - x' = y + y'$ et cette valeur commune est dans $M_n \cap M_m$ qui est trivial donc $x = x'$ (et $y = -y'$). Or $z = \pi(x)$ donc $z = \pi(x') = 0$.

2. Soit (C, d) un complexe différentiel et C' un sous-complexe, c'est-à-dire un sous-module stable par d . Montrer qu'il existe une unique structure de complexe différentiel sur C/C' telle que la projection soit un morphisme de complexes.

Solution : Soit D une différentielle sur le module gradué quotient C/C' . Demander à π d'être un morphisme de modules différentiels signifie demander $\pi \circ d = D \circ \pi$. La théorie des modules quotients affirme que D existe comme application linéaire si et seulement si d envoie C' dans C' , ce qui est précisément l'hypothèse de stabilité, et qu'il est alors unique. Il reste à voir que D est bien de carré nul : $D \circ D = 0$. Comme π est surjective, il suffit de vérifier que $D \circ D \circ \pi = 0$. Or $D \circ D \circ \pi = D \circ \pi \circ d = \pi \circ d \circ d = 0$.

Soit X un espace topologique et A une partie de X . On voit naturellement le complexe $C(A)$ des chaînes singulières dans A comme une partie de $C(X)$.

3. Montrer que $C(A)$ est un sous-complexe de $C(X)$.

Solution : Il s'agit de montrer que $C(A)$ est préservé par ∂ . C'est clair, car les simplexes intervenant dans le bord d'une chaîne ont leur image incluse dans l'image des simplexes intervenant dans la chaîne.

Les questions précédentes fournissent une structure de module différentiel sur le module quotient $C(X, A) := C(X)/C(A)$. On note $H(X, A)$ son homologie et on l'appelle l'homologie de X relativement à A .

4. Décrire géométriquement les cycles de $C(X, A)$.

Solution : Soit c un élément $C(X, A)$. Par définition c est l'image d'une chaîne c' de $C(X)$ et $\partial c = \pi(\partial c')$. Donc c est un cycle si et seulement si il existe c' tel que $\pi(c') = c$ et $\partial c' \in C(A)$. Autrement dit les cycles de $C(X, A)$ sont représentés par les chaînes de X dont le bord est dans A .

5. La catégorie des paires d'espaces topologiques est la catégorie dont les objets sont des paires (X, A) où X est un espace topologique et A une partie de X , et un morphisme de (X, A) vers (Y, B) est une fonction continue de X dans Y telle que l'image directe de A est contenue dans B . Montrer que $(X, A) \mapsto H(X, A)$ s'étend en foncteur de cette catégorie vers la catégorie des R -modules gradués. Ce foncteur peut se voir comme une collection de foncteurs H_n vers les R -modules pour chaque entier n .

Solution : Il s'agit de définir l'action de ce foncteur sur les morphismes et de vérifier la compatibilité avec les identités et les compositions. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques. Soit $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ tels que $f_*(A) \subseteq B$. Montrons que f induit une application linéaire f_* graduée de degré zéro de $H(X, A)$ dans $H(Y, B)$. On sait déjà comment f induit $f_\# : C(X) \rightarrow C(Y)$. Pour montrer que $f_\#$ descend en application linéaire, également notée $f_\#$ de $C(X, A)$ vers $C(Y, B)$, il suffit d'observer qu'elle envoie bien $C(A)$ dans $C(B)$, car l'image directe par f envoie A dans B .

Il faut comprendre pourquoi $f_\# : C(X, A) \rightarrow C(Y, B)$ est un morphisme de complexes. Il suffit de jeter un œil au diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
 C(X, A) & \xrightarrow{f_\#} & C(Y, B) \\
 \downarrow \partial & \swarrow \pi & \searrow \pi & \downarrow \partial \\
 & C(X) & \xrightarrow{f_\#} & C(Y) & \\
 & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & \\
 & C(X) & \xrightarrow{f_\#} & C(Y) & \\
 \downarrow \partial & \swarrow \pi & \searrow \pi & \downarrow \partial & \\
 C(X, A) & \xrightarrow{f_\#} & C(Y, B)
 \end{array}$$

L'affirmation est que le grand rectangle extérieur commute. Comme π est surjective, il suffit de le montrer après précomposition par π , c'est-à-dire montrer que $\partial \circ f_{\#} \circ \pi = f_{\#} \circ \partial \circ \pi$. Le petit rectangle au centre commute, car $f_{\#} : C(X) \rightarrow C(Y)$ est un morphisme de complexes. Les quatre trapèzes qui l'entourent commutent, car ils correspondent à la descente au quotient d'applications linéaires pour définir soit les opérateurs de bord sur les complexes quotients soit le nouveau $f_{\#} : C(X, A) \rightarrow C(Y, B)$. Donc, on peut bien déformer les deux compositions l'une en l'autre à travers des quadrilatères commutatifs.

Puisque $f_{\#}$ est un morphisme de complexes, elle induit un morphisme en homologie $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$.

Les compatibilités requises avec les identités et les compositions proviennent directement des énoncés analogues pour la descente d'applications linéaires aux quotients.

6. Montrer qu'il existe une suite exacte longue de la forme

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Montrer que, pour tout n , l'application de $H_n(X, A)$ dans $H_{n-1}(A)$ est la composante en (X, A) d'une transformation naturelle entre les foncteurs $(X, A) \mapsto H_n(X, A)$ et $(X, A) \mapsto H_{n-1}(A)$.

Solution : Par définition de $C(X, A)$ et de son application bord, on a une suite exacte courte de complexes :

$$0 \longrightarrow C(A) \longrightarrow C(X) \longrightarrow C(X, A) \longrightarrow 0$$

Le cours fournit la suite exacte longue désirée en homologie. De plus tout morphisme de (X, A) vers (X, B) induit un morphisme de suites exactes longues tel que, pour chaque n , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(A) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ H_n(Y, B) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(B) \end{array}$$

commute. Le f_* de gauche est l'action du foncteur $(X, A) \mapsto H_n(X, A)$ sur le morphisme f et celui de droite est l'action de $(X, A) \mapsto H_{n-1}(A)$ sur ce morphisme. Ainsi la commutativité de ce diagramme est exactement la condition de naturalité.

7. En examinant la démonstration de l'invariance par homotopie de l'homologie singulière, montrer que si f et g de X dans Y sont homotopes parmi les applications envoyant A dans B alors elles induisent la même application en homologie relative.

Solution : Supposons f et g liés par une homotopie h parmi les applications envoyant A dans B . Le cours fournit un opérateur d'homotopie algébrique entre $f_{\#}$ et $g_{\#}$ de $C(X)$ dans $C(Y)$ obtenu en triangulant des prismes $\Delta_p \times [0, 1]$ auxquels on applique ensuite $h \circ (\sigma \times \text{Id})$ pour chaque simplexe singulier σ . En particulier l'opérateur d'homotopie algébrique K_p envoie tout $\sigma \in \Sigma_p(X)$ sur une chaîne de $C_{p+1}(Y)$ dont les simplexes ont tous un support inclus dans l'image de $h \circ (\sigma \times \text{Id}_{\Delta_p})$. Vu l'hypothèse sur h , cela prouve que K_p

envoie $C_p(A)$ dans $C_{p+1}(B)$. Ainsi K descend en application graduée de degré $+1$ entre $C(X, A)$ et $C(Y, B)$. Il reste à vérifier que cette application descendue est une homotopie algébrique entre $g_\#$ et $f_\#$. Comme $\pi : C(X) \rightarrow C(X, A)$ est surjective, il suffit de vérifier l'égalité voulue après précomposition par π et tout fonctionne.

On considère maintenant $Z \subseteq A \subseteq X$ tels que l'adhérence de Z est incluse dans l'intérieur de A . Le théorème d'excision affirme que l'inclusion de $X \setminus Z$ dans X induit un isomorphisme entre $H(X \setminus Z, A \setminus Z)$ et $H(X, A)$.

- Montrer que le théorème d'excision est équivalent à l'énoncé suivant : pour toutes parties A et B dont les intérieurs recouvrent X , l'inclusion de B dans X induit un isomorphisme entre $H(B, A \cap B)$ et $H(X, A)$.

Solution : Pour passer de Z à B il suffit de poser $B = X \setminus Z$ et d'observer que l'intérieur de B est le complémentaire de l'adhérence de Z .

- Montrer cet énoncé en utilisant le lemme des petites chaînes.

Solution : Le lemme des petites chaînes assure qu'on peut calculer $H(X)$ à partir du complexe $C^{\{A,B\}}(X)$ des chaînes à valeurs dans A ou B . Le complexe $C(A)$ est un sous-complexe de $C(X)$, mais aussi de $C^{\{A,B\}}(X)$. On note $C^{\{A,B\}}(X, A)$ le complexe quotient. L'inclusion de $C^{\{A,B\}}(X)$ dans $C(X)$ induit donc une « inclusion » entre leurs quotients $C^{\{A,B\}}(X, A)$ et $C(X, A)$. La démonstration du lemme des petites chaînes à partir des propriétés de l'opérateur de subdivision barycentrique B et de son homotopie à l'identité K montre que cette inclusion induit un isomorphisme en homologie. En effet, B et K préservent le support des chaînes donc préservent $C(A)$ et descendent au quotient. On obtient ainsi un isomorphisme entre les homologies des complexes $C^{\{A,B\}}(X, A)$ et $C(X, A)$. Par ailleurs $C^{\{A,B\}}(X, A)$ est la somme de ses sous-modules $C(A)$ et $C(B)$ par définition donc le second théorème d'isomorphisme de Noether donne un isomorphisme entre $C^{\{A,B\}}(X, A)$ et $C(B)/(C(A) \cap C(B))$. Or $C(A) \cap C(B) = C(A \cap B)$ donc $C(B)/(C(A) \cap C(B)) = C(B, B \cap A)$ et on a bien le théorème.

Exercice 6.11 ☞ Dans tout cet exercice, on utilise l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ partout, sans le signaler dans les notations pour alléger. On rappelle que l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ est le quotient de $\mathbb{S}^n$ par la relation d'équivalence qui relie tout point x avec (lui-même et) son antipode $A(x) := -x$. On note $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ la projection correspondante. On rappelle que, pour tout anneau R , $H_p(\mathbb{R}P^n, R)$ est nul lorsque $p > n$. On admet que, pour tout simplexe singulier $\sigma \in \Sigma(\mathbb{R}P^n)$, il existe exactement deux simplexes singuliers $\hat{\sigma}, \hat{\sigma}' \in \Sigma(\mathbb{S}^n)$ qui relèvent σ , c'est-à-dire que $\pi \circ \hat{\sigma} = \pi \circ \hat{\sigma}' = \sigma$, chacun étant la composée de l'autre par A . (Ce résultat sera démontré au second semestre dans le cours de géométrie). On note t l'unique application linéaire de $C(\mathbb{R}P^n)$ dans $C(\mathbb{S}^n)$ qui envoie chaque σ sur $\hat{\sigma} + \hat{\sigma}'$.

- Montrer que, pour tous $\sigma \in \Sigma_p(\mathbb{R}P^n)$ et $s \in \Sigma_{p-1}(\Delta_p)$, les relevés de $\sigma \circ s$ sont $\hat{\sigma} \circ s$ et $\hat{\sigma}' \circ s$. En déduire que t est un morphisme de complexes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espaces vectoriels. On notera

$$T : H(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H(\mathbb{S}^n)$$

le morphisme induit par t en homologie.

Solution : Soit p, σ et s comme dans l'énoncé. On a bien $\pi \circ (\hat{\sigma} \circ s) = (\pi \circ \hat{\sigma}) \circ s = \sigma \circ s$ et de même avec $\hat{\sigma}'$. De plus $\hat{\sigma}' \circ s = (A \circ \hat{\sigma}) \circ s = A \circ (\hat{\sigma} \circ s) \neq \hat{\sigma} \circ s$ donc on a trouvé les deux relevés.

Montrons maintenant que t est un morphisme de complexes. Il suffit de le vérifier sur les simplexes. Soit $\sigma \in \Sigma_p(\mathbb{R}P^n)$. Montrons que $\partial(t(\sigma)) = t(\partial(\sigma))$.

$$\begin{aligned}
\partial(t(\sigma)) &= \partial(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}') \\
&= \partial\hat{\sigma} + \partial\hat{\sigma}' \\
&= \sum_i (-1)^i \hat{\sigma} \circ \partial_p^i + \sum_i (-1)^i \hat{\sigma}' \circ \partial_p^i \\
&= \sum_i (-1)^i \widehat{\sigma \circ \partial_p^i} + \sum_i (-1)^i \widehat{\sigma' \circ \partial_p^i} \\
&= \sum_i (-1)^i (\widehat{\sigma \circ \partial_p^i} + \widehat{\sigma' \circ \partial_p^i}) \\
&= \sum_i (-1)^i t(\sigma \circ \partial_p^i) \\
&= t\left(\sum_i (-1)^i \sigma \circ \partial_p^i\right) \\
&= t(\partial(\sigma))
\end{aligned}$$

2. Montrer que

$$0 \longrightarrow C(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{t} C(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\pi_{\#}} C(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de complexes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espaces vectoriels. On obtient ainsi une suite exacte longue en homologie.

Solution : Montrons d'abord l'injectivité de t . Soit $c = \sum_i a_i \sigma_i$ un élément de $\ker t$ où les σ_i sont des simplexes deux à deux distincts et les a_i des éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a $\sum_i a_i t(\sigma_i) = 0$, donc $\sum_i a_i (\hat{\sigma}_i + \hat{\sigma}'_i) = 0$. Par ailleurs chaque $\hat{\sigma}'_i$ est différent du $\hat{\sigma}_i$ correspondant (cela fait partie de l'énoncé admis et découle également de l'affirmation $\hat{\sigma}'_i = A \circ \hat{\sigma}_i$ et du fait que A n'a aucun point fixe). Les simplexes $\hat{\sigma}_i$ et $\hat{\sigma}'_i$ sont également différents des $\hat{\sigma}_j$ et $\hat{\sigma}'_j$ pour $j \neq i$ puisque leur composées σ_i et σ_j avec π sont différentes. Ainsi $\sum_i a_i (\hat{\sigma}_i + \hat{\sigma}'_i)$ est bien une combinaison linéaire de simplexes deux à deux distincts donc les a_i sont tous nuls.

La surjectivité de $\pi_{\#}$ découle immédiatement de l'énoncé admis, puisque chaque élément de la base canonique au but admet une préimage (et l'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel).

Il reste l'exactitude au milieu. Montrons d'abord que $\text{im } t \subseteq \ker \pi_{\#}$, c'est-à-dire $\pi_{\#} \circ t = 0$. Par unicité dans la propriété universelle de la base canonique de $C(\mathbb{R}P^n)$, il suffit de le vérifier sur les simplexes. Soit $\sigma \in \Sigma(\mathbb{R}P^n)$. On a $\pi_{\#}(t(\sigma)) = \pi_{\#}(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}') = \pi_{\#}(\hat{\sigma}) + \pi_{\#}(\hat{\sigma}') = \sigma + \sigma = 0$, en utilisant le fait que $2 = 0$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour la dernière égalité.

Réciproquement, montrons que $\ker \pi_{\#} \subseteq \operatorname{im} t$. Soit $c = \sum_{\sigma \in S} a(\sigma) \sigma$ un élément du noyau. Ici a est une fonction de $\Sigma(\mathbb{S}^n)$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dont le support S est fini. On choisit $S' \subseteq S$ tel que, pour tout $\sigma \in S'$, $A \circ \sigma \notin S'$. On a

$$\begin{aligned} \pi_{\#}(c) &= \sum_{\sigma \in S} a(\sigma) \pi \circ \sigma \\ &= \sum_{\sigma \in S'} (a(\sigma) \pi \circ \sigma + a(A \circ \sigma) \pi \circ A \circ \sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in S'} (a(\sigma) + a(A \circ \sigma)) \pi \circ \sigma. \end{aligned}$$

Et la deuxième somme est une somme de simplexes deux à deux distincts. Ainsi, $\forall \sigma \in S', a(\sigma) + a(A \circ \sigma) = 0$. En utilisant que $1 = -1$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on peut réécrire cela $\forall \sigma \in S', a(\sigma) = a(A \circ \sigma)$. Et donc $c = \sum_{\sigma \in S'} a(\sigma)(\sigma + A \circ \sigma) = \sum_{\sigma \in S'} a(\sigma) t(\pi \circ \sigma) = t\left(\sum_{\sigma \in S'} a(\sigma) \pi \circ \sigma\right)$ qui est dans l'image de t .

3. Montrer que $t \circ \pi_{\#} = \operatorname{Id} + A_{\#}$. En déduire que l'application $T \circ \pi_*$ est nulle (attention : ne pas confondre avec $\pi_* \circ T$ qui apparaît dans la suite exacte longue).

Solution : Il suffit de le montrer sur les simplexes. Soit $\sigma \in \Sigma(\mathbb{S}^n)$. On a $t(\pi_{\#}(\sigma)) = \sigma + A \circ \sigma$, car σ relève $\pi \circ \sigma$ par construction (ce fait était mentionné dans l'énoncé dès la définition de t , on pouvait donc l'utiliser sans démonstration).

On en déduit immédiatement $T \circ \pi_* = \operatorname{Id} + A_*$ par functorialité du passage des morphismes de chaînes aux morphismes en homologie. Or tous les $H_p(\mathbb{S}^n)$ sont des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espaces vectoriels de dimension zéro ou un. Donc, ils ont exactement un endomorphisme inversible (qui peut être nul lorsque l'espace est trivial). Comme A est un homéomorphisme, A_* est inversible donc $A_* = \operatorname{Id}$ et $\operatorname{Id} + A_* = 0$.

4. Montrer que, en degré n , T_n est injective et $\pi_* : H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{R}P^n)$ est nulle, (on pourra commencer par montrer que cette application est soit nulle, soit injective).

Solution : Comme $H_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, toute application $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -linéaire partant de cet espace est soit nulle, soit injective. De plus $T_n : H_n(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$ est injective, car son noyau est l'image de $\delta_{n+1} : H_{n+1}(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H_n(\mathbb{R}P^n)$ dont la source est nulle. Ainsi π_* ne saurait être injective puisque, d'après la question précédente, la composée $T \circ \pi_*$ est nulle.

5. Dans cette question, on fixe $n \geq 1$. Montrer que, pour tout $1 \leq p \leq n$, δ_p est un isomorphisme, (on pourra traiter de façon séparée $p = n > 1$ puis $1 < p < n$ puis $p = 1$).

Solution : Montrons d'abord que δ_n est un isomorphisme en supposant $n > 1$. Dans la suite longue, on voit

$$H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\pi_*} H_n(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{T_{n-1}} H_{n-1}(\mathbb{S}^n)$$

On a $H_{n-1}(\mathbb{S}^n) = 0$, car $0 < n-1 < n$. Et la question précédente assure que $\pi_* = 0$ donc δ_n est un isomorphisme.

Soit p tel que $1 < p < n$. L'extrait de suite exacte devient

$$H_p(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\pi_*} H_p(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{T_{p-1}} H_{p-1}(\mathbb{S}^n)$$

où les deux groupes d'homologie de $\mathbb{S}^n$ sont nuls puisque p et $p-1$ ne sont ni 0 ni n . On obtient donc que δ_p est un isomorphisme.

Pour le cas $p = 1$ (y compris si n aussi vaut 1), on a

$$H_1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\pi_*} H_1(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\delta_1} H_0(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{T_0} H_0(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\pi_*} H_0(\mathbb{R}P^n)$$

Le π_* de droite est un isomorphisme puisque $\mathbb{S}^n$ et $\mathbb{R}P^n$ ont exactement une composante connexe par arcs. Donc T_0 est nulle par exactitude de la suite en $H_n(\mathbb{S}^n)$. Le π_* de gauche est également nul, soit parce que $H_1(\mathbb{S}^n) = 0$ dans le cas $n > 1$, soit par la question 4 si $n = 1$. Ainsi δ_1 est un isomorphisme.

6. Calculer $H_p(\mathbb{R}P^n)$ pour tout p et tout $n \geq 0$ (pour $n = 0$, on utilisera que $\mathbb{R}P^n$ est homéomorphe à un espace déjà étudié).

Solution : Soit $n \geq 1$. On sait que $H_0(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, car $\mathbb{R}P^n$ est connexe par arcs (comme image de $\mathbb{S}^n$ qui est connexe par arcs puisque $n > 0$). À l'autre bout, on voit

$$H_{n+1}(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{T_n} H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\pi_*} H_n(\mathbb{R}P^n)$$

Le premier groupe est nul, car $n+1 > n$ et la question 4 assure que le π_* apparaissant est nul. Donc T_n est un isomorphisme et $H_n(\mathbb{R}P^n) \simeq H_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On a vu que tous les δ_p pour $1 \leq p \leq n$ sont des isomorphismes donc, par récurrence immédiate, $H_p(\mathbb{R}P^n) \simeq H_n(\mathbb{R}P^n)$ pour tout $1 \leq p \leq n$. On a donc, pour tout $n \geq 1$,

$$H_p(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par ailleurs, on connaît déjà l'homologie de $\mathbb{R}P^n$ pour $n = 0$, car $\mathbb{R}P^0$ est un point. La formule ci-dessus s'applique dans ces deux cas.

7. Soit $\Phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$ une application continue telle que, pour tout x , $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Cette condition d'équivariance signifie exactement qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^m$ telle que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{S}^m \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}P^m \end{array}$$

commute. Montrer que φ et Φ induisent un morphisme entre les suites exactes courtes de la question 2 en dimension n et m (et donc un morphisme entre les suites exactes longues correspondantes).

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{t} & C(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\pi_{\#}} & C(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \varphi_{\#} & & \downarrow \Phi_{\#} & & \downarrow \varphi_{\#} \\
0 & \longrightarrow & C(\mathbb{R}P^m) & \xrightarrow{t} & C(\mathbb{S}^m) & \xrightarrow{\pi_{\#}} & C(\mathbb{R}P^m) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Solution : Le diagramme liant Φ et φ est compatible avec l'opération de relèvement : pour tout $\sigma \in \Sigma(\mathbb{R}P^n)$, $\Phi \circ \hat{\sigma}$ est un relèvement de $\varphi \circ \sigma$ puisque $\pi \circ (\Phi \circ \hat{\sigma}) = \varphi \circ \sigma$. On en déduit le morphisme de suites exactes courtes annoncé

8. Supposons maintenant que $n > m \geq 1$ et montrons une contradiction (ce qui montre qu'une telle fonction Φ ne peut pas exister). Montrer que $\varphi_* : H_p(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H_p(\mathbb{R}P^m)$ est un isomorphisme pour $0 \leq p \leq m$ puis conclure.

Solution :

Le morphisme de suites exactes longues obtenu ci-dessus contient

$$\begin{array}{ccc}
H_p(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\delta_p} & H_{p-1}(\mathbb{R}P^n) \\
\downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* \\
H_p(\mathbb{R}P^m) & \xrightarrow{\delta_p} & H_{p-1}(\mathbb{R}P^m)
\end{array}$$

où les deux applications horizontales sont des isomorphismes pour $1 \leq p \leq m$. De plus $\varphi_* : H_0(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H_0(\mathbb{R}P^m)$ est un isomorphisme. Par récurrence immédiate, on obtient donc que $\varphi_* : H_p(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H_p(\mathbb{R}P^m)$ est un isomorphisme pour $0 \leq p \leq m$. Le morphisme de suites exactes longues contient aussi

$$\begin{array}{ccc}
H_m(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{T_m} & H_m(\mathbb{S}^n) \\
\downarrow \varphi_* & & \downarrow \Phi_* \\
H_m(\mathbb{R}P^m) & \xrightarrow{T_m} & H_m(\mathbb{S}^m)
\end{array}$$

C'est absurde, car on vient de montrer que la flèche de gauche est un isomorphisme, et la flèche du bas en est un par la question 4 et le calcul de $H_m(\mathbb{R}P^m)$ et $H_m(\mathbb{S}^m)$ (une application linéaire injective de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans lui-même est un isomorphisme). On a donc factorisé un isomorphisme de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à travers $H_m(\mathbb{S}^n)$ qui est nul.

9. En déduire le théorème de Borsuk-Ulam : pour toute fonction continue $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = f(x)$. On supposera $n > 1$ pour utiliser directement les questions précédentes.

Solution : Soit $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = f(x)$. On peut alors définir $\Phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ par $x \mapsto (f(x) - f(-x)) / \|f(x) - f(-x)\|$ qui contredit la question précédente avec $m = n - 1$ (on utilise l'hypothèse $n > 2$ pour assurer que $m > 1$ et appliquer la question précédente).

10. La démonstration précédente supposait $n > 1$ pour éviter des cas particuliers dans les arguments. Le cas $n = 0$ est évident. Démontrer le théorème pour $n = 1$ en adaptant la démonstration homologique ci-dessus ou bien de façon élémentaire.

Solution : On reprend l'extrait de morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccc} H_0(\mathbb{R}P^1) & \xrightarrow{T_0} & H_0(\mathbb{S}^1) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \Phi_* \\ H_0(\mathbb{R}P^0) & \xrightarrow{T_0} & H_0(\mathbb{S}^0) \end{array}$$

On a déjà expliqué que le T_0 du haut est nul. Par ailleurs le φ_* est automatiquement un isomorphisme, car $\mathbb{R}P^1$ et $\mathbb{R}P^0$ sont connexes par arcs. Enfin le T_0 du haut est injectif donc on obtient une contradiction.

L'argument ci-dessus repose uniquement sur le H_0 donc on s'attend à une démonstration élémentaire basée uniquement sur le théorème des valeurs intermédiaires. Soit $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ continue. La fonction Φ correspondante va de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^0$ et l'équivariance (et le fait que $\mathbb{S}^1$ n'est pas vide) montre qu'elle est surjective, ce qui contredit le théorème des valeurs intermédiaires. On notera que c'est exactement la même démonstration qu'au paragraphe précédent, mais sans le formalisme algébrique qui n'est pas utile ici.