

11 Compléments d'homologie singulière

Exercice 6.10 ☞ Cet exercice présente une autre application des ingrédients du théorème de Mayer-Vietoris (lemme des petites chaînes et suite exacte longue en homologie associée à une suite exacte courte de complexes). Elle n'est pas au programme de l'examen, mais il est vivement conseillé de prendre le temps de faire cet exercice durant les vacances si vous voulez profiter à fond de ce chapitre, y compris les techniques de démonstrations des théorèmes fondamentaux.

On fixe un anneau commutatif qu'on ne fait pas apparaître dans les notations, mais qui sert d'anneau des scalaires pour tous nos modules.

1. Soit M un module gradué et N un sous-module. Montrer qu'il existe une unique graduation sur le quotient M/N telle que la projection $\pi : M \rightarrow M/N$ soit une application graduée de degré 0. Montrer que, pour tout n , π induit un isomorphisme de $M_n/(M_n \cap N)$ vers $(M/N)_n$.
2. Soit (C, d) un complexe différentiel et C' un sous-complexe, c'est-à-dire un sous-module stable par d . Montrer qu'il existe une unique structure de complexe différentiel sur C/C' telle que la projection soit un morphisme de complexes.

Soit X un espace topologique et A une partie de X . On voit naturellement le complexe $C(A)$ des chaînes singulières dans A comme une partie de $C(X)$.

3. Montrer que $C(A)$ est un sous-complexe de $C(X)$.

Les questions précédentes fournissent une structure de module différentiel sur le module quotient $C(X, A) := C(X)/C(A)$. On note $H(X, A)$ son homologie et on l'appelle l'homologie de X relativement à A .

4. Décrire géométriquement les cycles de $C(X, A)$.
5. La catégorie des paires d'espaces topologiques est la catégorie dont les objets sont des paires (X, A) où X est un espace topologique et A une partie de X , et un morphisme de (X, A) vers (Y, B) est une fonction continue de X dans Y telle que l'image directe de A est contenue dans B . Montrer que $(X, A) \mapsto H(X, A)$ s'étend en foncteur de cette catégorie vers la catégorie des R -modules gradués. Ce foncteur peut se voir comme une collection de foncteurs H_n vers les R -modules pour chaque entier n .
6. Montrer qu'il existe une suite exacte longue de la forme

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \cdots$$

Montrer que, pour tout n , l'application de $H_n(X, A)$ dans $H_{n-1}(A)$ est la composante en (X, A) d'une transformation naturelle entre les foncteurs $(X, A) \mapsto H_n(X, A)$ et $(X, A) \mapsto H_{n-1}(A)$.

7. En examinant la démonstration de l'invariance par homotopie de l'homologie singulière, montrer que si f et g de X dans Y sont homotopes parmi les applications envoyant A dans B alors elles induisent la même application en homologie relative.

On considère maintenant $Z \subseteq A \subseteq X$ tels que l'adhérence de Z est incluse dans l'intérieur de A . Le théorème d'excision affirme que l'inclusion de $X \setminus Z$ dans X induit un isomorphisme entre $H(X \setminus Z, A \setminus Z)$ et $H(X, A)$.

4. Montrer que le théorème d'excision est équivalent à l'énoncé suivant : pour toutes parties A et B dont les intérieurs recouvrent X , l'inclusion de B dans X induit un isomorphisme entre $H(B, A \cap B)$ et $H(X, A)$.
5. Montrer cet énoncé en utilisant le lemme des petites chaînes.

Exercice 6.11 ☞ Dans tout cet exercice, on utilise l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ partout, sans le signaler dans les notations pour alléger. On rappelle que l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ est le quotient de $\mathbb{S}^n$ par la relation d'équivalence qui relie tout point x avec (lui-même et) son antipode $A(x) := -x$. On note $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ la projection correspondante. On rappelle que, pour tout anneau R , $H_p(\mathbb{R}P^n, R)$ est nul lorsque $p > n$. On *admet* que, pour tout simplexe singulier $\sigma \in \Sigma(\mathbb{R}P^n)$, il existe exactement deux simplexes singuliers $\hat{\sigma}, \hat{\sigma}' \in \Sigma(\mathbb{S}^n)$ qui relèvent σ , c'est-à-dire que $\pi \circ \hat{\sigma} = \pi \circ \hat{\sigma}' = \sigma$, chacun étant la composée de l'autre par A . (Ce résultat sera démontré au second semestre dans le cours de géométrie). On note t l'unique application linéaire de $C(\mathbb{R}P^n)$ dans $C(\mathbb{S}^n)$ qui envoie chaque σ sur $\hat{\sigma} + \hat{\sigma}'$.

1. Montrer que, pour tous $\sigma \in \Sigma_p(\mathbb{R}P^n)$ et $s \in \Sigma_{p-1}(\Delta_p)$, les relevés de $\sigma \circ s$ sont $\hat{\sigma} \circ s$ et $\hat{\sigma}' \circ s$. En déduire que t est un morphisme de complexes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espaces vectoriels. On notera

$$T : H(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H(\mathbb{S}^n)$$

le morphisme induit par t en homologie.

2. Montrer que

$$0 \longrightarrow C(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{t} C(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\pi_{\#}} C(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de complexes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espaces vectoriels. On obtient ainsi une suite exacte longue en homologie.

3. Montrer que $t \circ \pi_{\#} = \text{Id} + A_{\#}$. En déduire que l'application $T \circ \pi_*$ est nulle (attention : ne pas confondre avec $\pi_* \circ T$ qui apparaît dans la suite exacte longue).
4. Montrer que, en degré n , T_n est injective et $\pi_* : H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{R}P^n)$ est nulle, (on pourra commencer par montrer que cette application est soit nulle, soit injective).
5. Dans cette question, on fixe $n \geq 1$. Montrer que, pour tout $1 \leq p \leq n$, δ_p est un isomorphisme, (on pourra traiter de façon séparée $p = n > 1$ puis $1 < p < n$ puis $p = 1$).
6. Calculer $H_p(\mathbb{R}P^n)$ pour tout p et tout $n \geq 0$ (pour $n = 0$, on utilisera que $\mathbb{R}P^n$ est homéomorphe à un espace déjà étudié).

7. Soit $\Phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$ une application continue telle que, pour tout x , $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Cette condition d'équivariance signifie exactement qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^m$ telle que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{S}^m \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}P^m \end{array}$$

commute. Montrer que φ et Φ induisent un morphisme entre les suites exactes courtes de la question 2 en dimension n et m (et donc un morphisme entre les suites exactes longues correspondantes).

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{t} & C(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\pi_{\#}} & C(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow 0 \\ & & \varphi_{\#} \downarrow & & \Phi_{\#} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\#} \\ 0 & \longrightarrow & C(\mathbb{R}P^m) & \xrightarrow{t} & C(\mathbb{S}^m) & \xrightarrow{\pi_{\#}} & C(\mathbb{R}P^m) \longrightarrow 0 \end{array}$$

8. Supposons maintenant que $n > m \geq 1$ et montrons une contradiction (ce qui montre qu'une telle fonction Φ ne peut pas exister). Montrer que $\varphi_* : H_p(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H_p(\mathbb{R}P^m)$ est un isomorphisme pour $0 \leq p \leq m$ puis conclure.
9. En déduire le théorème de Borsuk-Ulam : pour toute fonction continue $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = f(x)$. On supposera $n > 1$ pour utiliser directement les questions précédentes.
10. La démonstration précédente supposait $n > 1$ pour éviter des cas particuliers dans les arguments. Le cas $n = 0$ est évident. Démontrer le théorème pour $n = 1$ en adaptant la démonstration homologique ci-dessus ou bien de façon élémentaire.