

## 2 Filtres 1

**Exercice 2.1** □

1. Montrer que  $\mathcal{N}_\infty$  est bien un filtre sur  $\mathbb{N}$ .

**Solution :** Soit  $U \in \mathcal{N}_\infty$  et  $V \supset U$ . Comme  $U \in \mathcal{N}_\infty$ , on obtient  $a$  tel que  $[a, \infty[ \subseteq U$ . Ce même  $a$  convient pour  $V$  par transitivité de l'inclusion.

Soit  $U$  et  $V$  dans  $\mathcal{N}_\infty$ . On obtient  $a$  et  $b$  tels que  $[a, \infty[ \subseteq U$  et  $[b, \infty[ \subseteq V$ . On a  $[\max(a, b), \infty[ \subseteq U \cap V$  donc  $U \cap V$  est dans  $\mathcal{N}_\infty$ .

Enfin  $\mathbb{N}$  est dans  $\mathcal{N}_\infty$ , car  $a = 0$  convient.

2. Dans un espace topologique, montrer que l'ensemble  $\mathcal{N}_x$  des voisinages d'un point  $x$  forme un filtre.

**Solution :** Là encore, les vérifications sont immédiates: tout ensemble qui contient un voisinage de  $x$  est un voisinage de  $x$ , toute intersection de voisinages de  $x$  est un voisinage de  $x$  et  $X$  est un voisinage de  $x$ .

**Exercice 2.2** □ Démontrer soigneusement qu'une somme de deux suites convergentes dans  $\mathbb{R}$  est convergente et converge vers la somme des limites, en utilisant la définition élémentaire de convergence des suites. Réécrire la démonstration en utilisant comme définition de la convergence de  $u$  vers  $l$

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathcal{N}_\infty, |u_n - l| < \varepsilon$$

et les propriétés des quantificateurs généralisés. Où se cachent maintenant les morceaux de démonstration qui ont disparu entre les deux versions ?

**Solution :** Soit  $u$  et  $v$  deux suites de réels. On suppose que  $u$  tend vers  $l$  et  $v$  tend vers  $l'$ . Montrons que  $u + v$  tend vers  $l + l'$ , c'est-à-dire  $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |(u_n + v_n) - (l + l')| < \varepsilon$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse sur  $u$  appliquée à  $\varepsilon/2 > 0$ , on obtient  $N_1$  tel que  $\forall n \geq N_1, |u_n - l| < \varepsilon/2$ . Par hypothèse sur  $v$  appliquée à  $\varepsilon/2 > 0$ , on obtient  $N_2$  tel que  $\forall n \geq N_2, |v_n - l'| < \varepsilon/2$ . Montrons que  $\max(N_1, N_2)$  convient. Soit  $n \geq \max(N_1, N_2)$ . Montrons que  $|(u_n + v_n) - (l + l')| < \varepsilon$ . Comme  $n \geq N_1, |u_n - l| < \varepsilon/2$ . Comme  $n \geq N_2, |v_n - l'| < \varepsilon/2$ . On a

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (l + l')| &= |(u_n - l) + (v_n - l')| \\ &\leq |u_n - l| + |v_n - l'| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Reprenons maintenant cet énoncé en termes de quantificateurs généralisés. Soit  $u$  et  $v$  deux suites de réels. On suppose que  $u$  tend vers  $l$  et  $v$  tend vers  $l'$ . Montrons que  $u + v$  tend vers  $l + l'$ , c'est-à-dire  $\forall \varepsilon > 0, \forall n$  dans  $\mathcal{N}_\infty, |(u_n + v_n) - (l + l')| < \varepsilon$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse sur  $u$  appliquée à  $\varepsilon/2 > 0, \forall n$  dans  $\mathcal{N}_\infty, |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Par hypothèse sur  $v$  appliquée à  $\varepsilon/2 > 0, \forall n$  dans  $\mathcal{N}_\infty, |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Ainsi  $\forall n$  dans  $\mathcal{N}_\infty, |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$  et  $|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

$\frac{\varepsilon}{2}$ . Il suffit donc de montrer que, pour tout  $n$ ,  $|u_n - l| < \varepsilon/2$  et  $|v_n - l'|$  implique  $|(u_n + v_n) - (l + l')| < \varepsilon$ . Soit  $n$  vérifiant ces conditions. On a

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (l + l')| &= |(u_n - l) + (v_n - l')| \\ &\leq |u_n - l| + |v_n - l'| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

On notera qu'on a utilisé la compatibilité du quantificateur universel généralisé avec la conjonction (le «et») et l'implication. Par rapport à la première démonstration, les  $N$  et le max sont cachés dans la définition de  $\mathcal{N}_\infty$  et la vérification du fait que c'est un filtre. Notons que, dans ce cas très simple, l'implication  $|u_n - l| < \varepsilon/2$  et  $|v_n - l'| < \varepsilon/2 \Rightarrow |(u_n + v_n) - (l + l')| < \varepsilon$  est vraie pour tout  $n$ , mais la démonstration fonctionnerait encore si elle n'était vraie que pour  $n$  assez grand, au prix d'un deuxième max, caché ou pas selon qu'on utilise les filtres ou pas (c'est l'objet de la question suivante de cet exercice). On peut aussi remarquer que la rédaction de la deuxième démonstration peut être allégée avec des conventions de langage pour affirmer et démontrer des énoncés sous quantificateur généralisés. Ainsi, on pourrait écrire simplement la démonstration suivante.

Soit  $u$  et  $v$  deux suites de réels. On suppose que  $u$  tend vers  $l$  et  $v$  tend vers  $l'$ . Montrons que  $u + v$  tend vers  $l + l'$ , c'est-à-dire que pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $n$  très grand,  $|(u_n + v_n) - (l + l')| < \varepsilon$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $n$  très grand. Par hypothèse sur  $u$  appliquée à  $\varepsilon/2 > 0$  et  $n$ ,  $|u_n - l| < \varepsilon/2$ . Par hypothèse sur  $v$  appliquée à  $\varepsilon/2 > 0$  et  $n$ ,  $|v_n - l'| < \varepsilon/2$ . On a

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (l + l')| &= |(u_n - l) + (v_n - l')| \\ &\leq |u_n - l| + |v_n - l'| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Les propriétés des quantificateurs généralisés assurent que le raisonnement ci-dessus est correct.

**Exercice 2.3**  $\square$  Soit  $F$  un filtre sur un ensemble  $X$ . Montrer que, pour toute fonction constante  $\varphi : X \rightarrow Y$  de valeur  $y_0$ , on a  $\varphi_* F \leq P(\{y_0\})$ , c'est-à-dire que l'image directe de n'importe quel filtre est contenue dans  $\{y_0\}$  vu comme filtre. Montrer qu'il y a même égalité dès que  $F$  n'est pas  $P(\emptyset)$  (on pourra raisonner par contraposition).

**Solution :**

Par définition de la relation d'ordre sur les filtres, il s'agit de montrer que, pour toute partie  $U$  de  $Y$ ,  $U \in P(\{y_0\}) \Rightarrow U \in \varphi_* F$ . Soit  $U$  une partie de  $Y$ . Supposons  $U \in P(\{y_0\})$ , c'est-à-dire  $y_0 \in U$ . Montrons que  $U \in \varphi_* F$ , c'est-à-dire  $\varphi^* U \in F$ . Comme  $\varphi$  vaut partout  $y_0$ , et que  $y_0 \in U$ , on obtient  $\varphi^* U = X$  qui est bien dans  $F$ , car  $F$  est un filtre.

Montrons maintenant que, si  $F$  n'est pas  $P(\emptyset)$ , alors on a également l'inégalité  $P(\{y_0\}) \leq \varphi_* F$  (et donc l'égalité annoncée). Comme toutes les parties de  $X$  contiennent  $\emptyset$ ,  $P(\emptyset)$  est la collection de toutes les parties de  $X$ .

Par contraposition, il suffit de montrer que la négation de  $P(\{y_0\}) \leq \varphi_* F$  implique  $F = P(\emptyset)$ . Supposons donc qu'on ait  $V \subseteq Y$  tel que  $V \in \varphi_* F$ , mais  $V \notin P(\{y_0\})$ . On a donc  $\varphi^* V \in F$  et  $y_0 \notin V$ . Ainsi  $\emptyset$  est dans  $F$  et comme  $F$  est un filtre, toutes les parties de  $X$  sont dans  $F$ .

**Exercice 2.4**  $\square$  On fixe un ensemble  $X$ .

1. Montrer directement que  $\perp := P(\emptyset)$  est bien un minimum de l'ensemble des filtres sur  $X$ .  
Montrer que, pour tout filtre  $F$  sur  $X$ ,  $F = \perp$  si et seulement si  $\emptyset \in F$ . Notez qu'on pense vraiment à  $\perp$  comme étant «la partie vide de  $X$  vue comme filtre sur  $X$ » mais noter ce filtre  $\emptyset$  prêterait à confusion puisqu'il n'est pas vide en tant que partie de l'ensemble des parties de  $X$ .

**Solution :** Le point crucial est que  $P(\emptyset)$  est l'ensemble de toutes les parties de  $X$  puisque, pour tout  $A \in \mathcal{P}(X)$ ,  $\emptyset \subseteq A$ .

Soit  $F$  un filtre sur  $X$ . Montrons que  $P(\emptyset) \leq F$ . Soit  $U \in F$ . On a bien  $U \in P(\emptyset)$ .

Montrons maintenant qu'il y a égalité si et seulement si  $\emptyset \in F$ . Supposons  $F = P(\emptyset)$ . On a  $\emptyset \in F$ . Réciproquement si  $\emptyset \in F$  alors toute partie de  $X$  est dans  $F$ , car elle contient  $\emptyset$  qui est dans  $F$ .

2. Montrer que, pour tout filtre  $F$  sur  $X$  et toute fonction  $\varphi : X \rightarrow Y$ ,  $\varphi_* F = \perp \Leftrightarrow F = \perp$ .

**Solution :** On utilise la caractérisation de la question précédente et la définition de l'image directe :

$$\begin{aligned}\varphi_* F = \perp &\Leftrightarrow \emptyset \in \varphi_* F \\ &\Leftrightarrow \varphi^* \emptyset \in F \\ &\Leftrightarrow \emptyset \in F \\ &\Leftrightarrow F = \perp.\end{aligned}$$

**Exercice 2.5**  $\mathbb{H}$  Soit  $x_1$  et  $x_2$  des nombres réels.

1. Montrer que si  $\mathcal{N}_{x_1} \wedge \mathcal{N}_{x_2} \neq \perp$  alors  $x_1 = x_2$  (on le lit «s'il existe des points qui sont à la fois très proches de  $x_1$  et de  $x_2$  alors  $x_1 = x_2$ »).

**Solution :** Supposons que  $\mathcal{N}_{x_1} \wedge \mathcal{N}_{x_2} \neq \perp$ . Montrons que  $x_1 = x_2$ . Il suffit de montrer que  $\forall \varepsilon > 0, |x_2 - x_1| \leq \varepsilon$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Le lemme 60 assure que, pour tout  $U \in \mathcal{N}_{x_1}$  et  $V \in \mathcal{N}_{x_2}$ ,  $U \cap V \neq \emptyset$ . En particulier,  $[x_1 - \varepsilon/2, x_1 + \varepsilon/2] \cap [x_2 - \varepsilon/2, x_2 + \varepsilon/2] \neq \emptyset$  donc  $|x_2 - x_1| \leq \varepsilon$  par inégalité triangulaire.

2. Soit  $X$  un ensemble,  $F$  un filtre non trivial sur  $X$  et  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Montrer que si  $\varphi_* F \leq \mathcal{N}_{x_1}$  et  $\varphi_* F \leq \mathcal{N}_{x_2}$  alors  $x_1 = x_2$ .

**Solution :** Supposons  $\varphi_* F \leq \mathcal{N}_{x_1}$  et  $\varphi_* F \leq \mathcal{N}_{x_2}$ . L'exercice 2.4 et l'hypothèse  $F \neq \perp$  assurent que  $\varphi_* F \neq \perp$ . On en déduit que  $\perp < \varphi_* F \leq \mathcal{N}_{x_1} \wedge \mathcal{N}_{x_2}$ . La première question en déduit que  $x_1 = x_2$ .

**Exercice 2.6**  $\mathbb{H}$  Soit  $X$  un ensemble. Dans cet exercice, on montre de façon élémentaire explicite que  $\mathcal{F}(X)$  est un treillis complet en construisant à la main des infimums. Soit  $S$  un ensemble de filtres sur  $X$ .

1. Montrer que

$$\left\{ U \subseteq X \mid \exists S' \subseteq S \text{ fini}, \exists V : S' \rightarrow \mathcal{P}(X), U = \bigcap_{s' \in S'} V_{s'} \text{ et } \forall s' \in S', V_{s'} \in s' \right\}$$

est un filtre sur  $X$  et que ce filtre est borne inférieure de  $S$ .

**Solution :** Notons  $G$  l'ensemble de parties ainsi défini. Montrons qu'il s'agit d'un filtre.

Soit  $U$  et  $W$  des parties de  $X$  telles que  $U \in G$  et  $U \subseteq W$ . On obtient  $S' \subseteq S$  fini et  $V : S' \rightarrow \mathcal{P}(X)$  tels que  $U = \bigcap_{s' \in S'} V_{s'}$  et  $\forall s' \in S', V_{s'} \in s'$ . Montrons que  $V \in G$ . Montrons que  $S'$  convient. On considère  $V' : S' \rightarrow \mathcal{P}(X)$  défini par  $s \mapsto V_s \cup W$ . Montrons que  $V'$  convient.

$$\begin{aligned} \bigcap_{s' \in S'} V_{s'} &= \bigcap_{s' \in S'} (V_{s'} \cup W) \\ &= \left( \bigcap_{s' \in S'} V_{s'} \right) \cup W \\ &= U \cup W \\ &= W \quad \text{car } U \subseteq W \end{aligned}$$

Soit  $U$  et  $W$  des parties de  $X$  telles que  $U \in G$  et  $W \in G$ . Montrons que  $U \cap W \in G$ . On obtient  $S' \subseteq S$  fini et  $V : S' \rightarrow \mathcal{P}(X)$  tels que  $U = \bigcap_{s \in S'} V_s$  et  $\forall s \in S', V_s \in s$ . On obtient  $S'' \subseteq S$  fini et  $V' : S'' \rightarrow \mathcal{P}(X)$  tels que  $W = \bigcap_{s \in S''} V'_s$  et  $\forall s \in S'', V'_s \in s$ . On pose  $S''' = S' \cup S''$  qui est une partie finie de  $S$ . On étend  $V$  et  $V'$  à  $S'''$  en envoyant tout nouvel élément sur  $X$  entier. En particulier, on conserve  $\forall s \in S', V_s \in s$  et  $\forall s \in S'', V'_s \in s$ , car  $X$  est dans tous les filtres. On définit  $V'' : S''' \rightarrow \mathcal{P}(X)$  qui envoie  $s$  sur  $V_s \cap V'_s$ . Soit  $s \in S'''$ . Comme  $V_s \in s$  et  $V'_s \in s$  et  $s$  est un filtre,  $V_s \cap V'_s \in s$ .

$$\begin{aligned} \bigcap_{s \in S'''} V_s'' &= \bigcap_{s \in S'''} (V_s \cap V'_s) \\ &= \left( \bigcap_{s \in S'''} V_s \right) \cap \left( \bigcap_{s \in S'''} V'_s \right) \\ &= U \cap W \end{aligned}$$

Montrons que  $X \in G$ . La partie  $S' = \emptyset$  convient. La définition de  $V$  ne coûte rien, car  $S' = \emptyset$ , et l'intersection sur la famille vide est bien  $X$  entier.

Ainsi  $G$  est bien un filtre sur  $X$ . Montrons qu'il est borne inférieure de  $S$ . Soit  $F$  un filtre. Supposons d'abord que  $F$  minore  $S$  et montrons  $F \leq G$ . Soit  $U \in G$ . Montrons que  $U \in F$ . On obtient  $S' \subseteq S$  fini et  $V : S' \rightarrow \mathcal{P}(X)$  tels que  $U = \bigcap_{s \in S'} V_s$  et  $\forall s \in S', V_s \in s$ . Pour chaque  $s \in S'$ , comme  $F \leq s$ ,  $V_s \in F$ . Comme  $F$  est un filtre, il est stable par intersection finie donc  $U \in F$ . Réciproquement, supposons maintenant  $F \leq G$  et montrons que  $F$  minore  $S$ . Soit  $s \in S$ . Montrons que  $F \leq s$ . Soit  $U \in s$ . Montrons que  $U \in F$ . Vu l'hypothèse  $F \leq G$ , il suffit de montrer que  $U \in G$ . On pose  $S' = \{s\}$ , qui est bien une partie finie de  $S$  et on considère la fonction  $V : S' \rightarrow \mathcal{P}(X)$  qui envoie  $s$  sur  $U$ . Cette fonction convient bien.

2. Écrire une version plus simple de la définition précédente dans le cas où  $S$  est filtrante.

**Solution :** Montrons que dans ce cas le filtre  $G$  précédent est la réunion  $H$  des éléments de  $S$ .

Attention, en général la réunion d'une famille de filtres n'est pas un filtre. C'est une situation tout à fait analogue au cas des sous-groupes (ou des sous-espaces vectoriels).

En général une réunion de sous-groupes n'est pas un groupe, mais cela fonctionne pour une famille filtrante à droite non vide (dans le cas des sous-groupes la relation d'ordre est l'inclusion donc ce sont les parties non vides filtrantes à *droite* qui fonctionnent).

Il y a deux façons de procéder. Vu l'unicité de la borne inférieure et le fait que  $H$  est borne inférieure de  $S$  dans  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$ , il suffit de montrer que  $H$  est un filtre. On peut vérifier cela en utilisant l'hypothèse sur  $S$ .

On peut aussi procéder de façon directe en montrant  $G = H$  par double inégalité. Montrons que  $G \leq H$ . Soit  $U \in H$ . Montrons que  $U \in G$ . Par définition de  $H$ , on obtient  $s \in S$  tel que  $U \in s$ . Comme  $G$  minore  $S$ ,  $G \leq s$  et donc  $U \in G$ . Montrons maintenant que  $G \geq H$ . Soit  $U \in G$ . Montrons que  $U \in H$ . On obtient  $S' \subseteq S$  fini et  $V : S' \rightarrow \mathcal{P}(X)$  tels que  $U = \bigcap_{s \in S'} V_s$  et  $\forall s \in S', V_s \in s$ . Comme  $S$  est filtrante et que  $S'$  est fini, on obtient  $s_0 \in S$  qui minore  $S'$  (noter que l'hypothèse  $S$  non vide ne sert ici que dans le cas où  $S'$  est vide). Montrons que  $U \in s_0$ . Comme  $s_0$  est un filtre et  $S'$  est fini, il suffit de montrer que chaque  $V_s$  est dans  $s_0$ , ce qui découle du fait que  $s_0$  minore  $S'$ .

**Exercice 2.7**  $\iff$  Soit  $f : X \rightarrow Y$  une fonction entre deux ensembles et  $F$  un filtre sur  $X$ . Nous avons vu dans l'exercice 2.4 que  $f_*F = \perp \Leftrightarrow F = \perp$ . Donner une démonstration utilisant le théorème 63 plutôt que la construction explicite de  $f_*$ . On pourra utiliser que, pour tout élément  $z$  d'un ensemble ordonné ayant un minimum,  $z = \perp \Leftrightarrow z \leq \perp$ .

**Solution :** Une première possibilité est de repasser par  $\mathcal{P}(X)$  et  $\mathcal{P}(Y)$  :

$$\begin{aligned} f_*F = \perp &\Leftrightarrow f_*F \leq \perp \Leftrightarrow F \leq f^*\perp \Leftrightarrow F \leq f^*P(\emptyset) \\ &\Leftrightarrow F \leq P(f^*\emptyset) \Leftrightarrow F \leq P(\emptyset) \Leftrightarrow F \leq \perp \Leftrightarrow F = \perp. \end{aligned}$$

Mais on peut aussi raccourcir en déduisant  $f^*\perp = \perp$  du fait que  $f^*$  admet un adjoint à droite donc commute aux sup et  $\perp = \sup \emptyset$ . On notera que cet argument fournit également directement l'implication  $F = \emptyset \Rightarrow f_*F = \emptyset$  puisque  $f_*$  admet un adjoint à droite.