

2 Filtres 1

Exercice 2.1 □

1. Montrer que $\mathcal{N}_\infty$ est bien un filtre sur $\mathbb{N}$.
2. Dans un espace topologique, montrer que l'ensemble $\mathcal{N}_x$ des voisinages d'un point x forme un filtre.

Exercice 2.2 □ Démontrer soigneusement qu'une somme de deux suites convergentes dans $\mathbb{R}$ est convergente et converge vers la somme des limites, en utilisant la définition élémentaire de convergence des suites. Réécrire la démonstration en utilisant comme définition de la convergence de u vers l

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathcal{N}_\infty, |u_n - l| < \varepsilon$$

et les propriétés des quantificateurs généralisés. Où se cachent maintenant les morceaux de démonstration qui ont disparu entre les deux versions ?

Exercice 2.3 □ Soit F un filtre sur un ensemble X . Montrer que, pour toute fonction constante $\varphi : X \rightarrow Y$ de valeur y_0 , on a $\varphi_* F \leq P(\{y_0\})$, c'est-à-dire que l'image directe de n'importe quel filtre est contenue dans $\{y_0\}$ vu comme filtre. Montrer qu'il y a même égalité dès que F n'est pas $P(\emptyset)$ (on pourra raisonner par contraposition).

Exercice 2.4 □ On fixe un ensemble X .

1. Montrer directement que $\perp := P(\emptyset)$ est bien un minimum de l'ensemble des filtres sur X . Montrer que, pour tout filtre F sur X , $F = \perp$ si et seulement si $\emptyset \in F$. Notez qu'on pense vraiment à $\perp$ comme étant « la partie vide de X vue comme filtre sur X » mais noter ce filtre $\emptyset$ prêterait à confusion puisqu'il n'est pas vide en tant que partie de l'ensemble des parties de X .
2. Montrer que, pour tout filtre F sur X et toute fonction $\varphi : X \rightarrow Y$, $\varphi_* F = \perp \Leftrightarrow F = \perp$.

Exercice 2.5 □ Soit x_1 et x_2 des nombres réels.

1. Montrer que si $\mathcal{N}_{x_1} \wedge \mathcal{N}_{x_2} \neq \perp$ alors $x_1 = x_2$ (on le lit « s'il existe des points qui sont à la fois très proches de x_1 et de x_2 alors $x_1 = x_2$ »).
2. Soit X un ensemble, F un filtre non trivial sur X et $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si $\varphi_* F \leq \mathcal{N}_{x_1}$ et $\varphi_* F \leq \mathcal{N}_{x_2}$ alors $x_1 = x_2$.

Exercice 2.6 □ Soit X un ensemble. Dans cet exercice, on montre de façon élémentaire explicite que $\mathcal{F}(X)$ est un treillis complet en construisant à la main des infimums. Soit S un ensemble de filtres sur X .

1. Montrer que

$$\left\{ U \subseteq X \mid \exists S' \subseteq S \text{ fini}, \exists V : S' \rightarrow \mathcal{P}(X), U = \bigcap_{s' \in S'} V_{s'} \text{ et } \forall s' \in S', V_{s'} \in s' \right\}$$

est un filtre sur X et que ce filtre est borne inférieure de S .

2. Écrire une version plus simple de la définition précédente dans le cas où S est filtrante.

Exercice 2.7 $\iff$ Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction entre deux ensembles et F un filtre sur X . Nous avons vu dans l'exercice 2.4 que $f_*F = \perp \Leftrightarrow F = \perp$. Donner une démonstration utilisant le théorème 63 plutôt que la construction explicite de f_* . On pourra utiliser que, pour tout élément z d'un ensemble ordonné ayant un minimum, $z = \perp \Leftrightarrow z \leq \perp$.