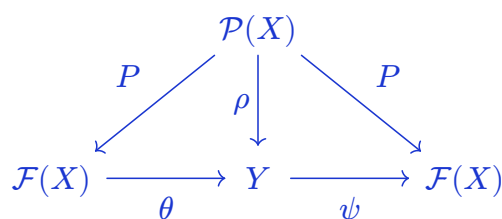


3 Filtres 2

Exercice 2.8 $\square$ Soit X un ensemble et Y un treillis complet muni d'une fonction croissante $\rho : \mathcal{P}(X) \rightarrow Y$ vérifiant la propriété universelle des filtres: pour tout treillis complet Z et tout $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow Z$ croissante, il existe un unique $\bar{\varphi} : Y \rightarrow Z$ qui commute aux infs filtrants et vérifie $\bar{\varphi} \circ \rho = \varphi$. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme d'ensembles ordonnés $\psi : Y \rightarrow \mathcal{F}(X)$ tel que $\psi \circ \rho = P$.

Solution: La propriété universelle de Y appliquée à la fonction croissante P fournit une unique fonction $\psi : Y \rightarrow \mathcal{F}(X)$ commutant aux infs filtrants telle que $\psi \circ \rho = P$. En particulier, cela assure l'unicité annoncée, car tout isomorphisme d'ensemble ordonné commute aux infs filtrants.

De même la propriété universelle des filtres appliquée à la fonction croissante ρ fournit $\theta : \mathcal{F}(X) \rightarrow Y$ qui commute aux infs filtrants et vérifie $\theta \circ P = \rho$.



Dans le diagramme ci-dessus, les deux petits triangles commutent donc le grand triangle aussi: $(\psi \circ \theta) \circ P = P$. De plus $\psi \circ \theta$ commute aux infs filtrants. Donc l'unicité dans la propriété universelle des filtres appliquée à la fonction croissante P assure que $\psi \circ \theta = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)}$. On montre de même que $\theta \circ \psi = \text{Id}_Y$.

Exercice 2.9 $\square$ Montrer que tout filtre sur un ensemble fini est principal.

Solution: Soit X un ensemble fini et F un filtre sur X . Le lemme 70 assure que $F = \inf_{U \in F} P(U)$. Or le théorème 56 assure que P commute aux infs finis donc

$$F = P\left(\bigcap_{U \in F} U\right).$$

Exercice 2.10 $\mathbb{H}$ Soit X et Y des ensembles et $G : X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ une fonction. On note φ la fonction de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{F}(Y)$ qui envoie U sur $\sup_{x \in U} G(x)$.

1. Montrer que φ est croissante, de sorte que l'on peut effectivement lui appliquer la propriété universelle des filtres pour obtenir $F \mapsto \sup_{x \in F}^f G(x)$.

Solution: Cela découle directement du lemme 29 qui assure que la fonction $\sup$ d'un treillis complet est croissante.

2. Montrer que, pour tout filtre F sur X , $F = \sup_{x \in F}^f P(\{x\})$ (on pourra commencer par réfléchir à l'analogie de cette formule pour les parties de X).

Solution : Dans ce cas $G(x) = P(\{x\})$ et la fonction φ n'est autre que $P : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ puisque P commute aux sups et, pour tout $U \in \mathcal{P}(X)$, $U = \sup_{x \in U} \{x\}$. De plus on sait que l'extension de P est l'identité puisque $\text{Id} \circ P = P$ et Id commute aux infs filtrants. Alternativement, on peut utiliser la description concrète de $\sup^f$ (toujours en utilisant la formule $U = \sup_{x \in U} \{x\}$).

3. Montrer que la fonction $(F, G) \mapsto \sup_{x \in F}^f G(x)$ est croissante en les deux arguments.

Solution : Le fait que l'opération est croissante en F est offert par la propriété universelle (elle commute même aux infs filtrants). Le fait qu'elle est croissante en G provient du fait que si $G \leq G'$ alors on vérifie facilement que $\varphi \leq \varphi'$, où $\varphi' : U \mapsto \sup_{x \in U} G'(x)$. La croissance du processus d'extension fournit alors le résultat voulu.

4. En utilisant que, pour tout ensemble Z , l'inclusion de $\mathcal{F}(Z)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(Z))^{\text{op}}$ commute aux infs filtrants et aux sup, montrer que, pour toute partie V de Y ,

$$V \in \sup_{x \in F}^f G(x) \Leftrightarrow \{x \mid V \in G(x)\} \in F.$$

En déduire que, pour tout prédicat p sur Y ,

$$\left(\forall^f y \in \sup_{x \in F}^f G(x), p(y) \right) \Leftrightarrow \forall^f x \in F, \forall^f y \in G(x), p(y).$$

Solution : Soit V une partie de Y . On a

$$\begin{aligned} V \in \sup_{x \in F}^f G(x) &\Leftrightarrow V \in \inf_{U \in F} \sup_{x \in U} G(x) \text{ formule explicite prop univ} \\ &\Leftrightarrow \exists U \in F, V \in \sup_{x \in U} G(x) \text{ commutation aux infs filtrant} \\ &\Leftrightarrow \exists U \in F, \forall x \in U, V \in G(x) \text{ commutation aux sups} \\ &\Leftrightarrow \exists U \in F, U \subseteq \{x \mid V \in G(x)\} \\ &\Leftrightarrow \{x \mid V \in G(x)\} \in F \text{ car } F \text{ est un filtre} \end{aligned}$$

Le corollaire est terme de quantificateur universel généralisé est immédiat par définition.

5. Soit Z un treillis complet et $\varphi : \mathcal{F}(Y) \rightarrow Z$ une fonction qui commute aux infs filtrants. Montrer que $\varphi(\sup_{x \in F}^f G(x)) \geq \sup_{x \in F}^f \varphi(G(x))$. Montrer que si de plus φ commute aux sups alors il y a égalité (c'est donc le cas en particulier si $\varphi = f_*$ ou $\varphi = g^*$ pour $f : Y \rightarrow Y'$ ou $g : Y' \rightarrow Y$).

Solution : On sait que F est une partie filtrante de $\mathcal{P}(X)$ et que $U \mapsto \sup_{x \in U} G(x)$ est croissante donc $\{\sup_{x \in U} G(x); U \in F\}$ est une partie filtrante de $\mathcal{F}(Y)$ par le lemme 69, et son inf est $\sup_{x \in F}^f G(x)$ par construction. Par ailleurs φ est croissante donc, pour tout U , $\varphi(\sup_{x \in U} G(x)) \geq \sup_{x \in U} \varphi(G(x))$ par le lemme 36. On a donc

$$\begin{aligned} \varphi\left(\sup_{x \in F}^f G(x)\right) &= \inf_{U \in F} \varphi\left(\sup_{x \in U} G(x)\right) \\ &\geq \inf_{U \in F} \sup_{x \in U} \varphi(G(x)) \\ &= \sup_{x \in F}^f \varphi(G(x)). \end{aligned}$$

La seule inégalité dans le calcul ci-dessus provient de $\forall U, \varphi(\sup_{x \in U} G(x)) \geq \sup_{x \in U} \varphi(G(x))$ qui est une famille d'égalités si φ commute aux sups.

Exercice 2.11 $\square$ Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une fonction. Montrer que, pour tout filtre G sur Y , $\varphi_* \varphi^* G = G \wedge P(\varphi_* X)$.

Solution : L'énoncé analogue pour les parties est $\forall B \subseteq Y, \varphi_* \varphi^* B = B \cap \varphi_* X$, qu'on peut démontrer directement. Le passage aux filtres se fait comme dans le lemme 84 après avoir écrit $B \cap \varphi_* X = [\cap \circ (\text{Id}, (B \mapsto \varphi_* X))](B)$. En effet l'exemple 83 montre que $\cap$ s'étend en $\wedge$ et le corollaire 74 assure que la fonction constante $B \mapsto \varphi_* X$ s'étend en $F \mapsto P(\varphi_* X)$.

Exercice 2.12 $\square$ Soit X un ensemble et A une partie de X . On note ι l'inclusion de A dans X . Montrer que ι_* induit un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre $\mathcal{F}(A)$ et $\{F \in \mathcal{F}(X) \mid F \leq P(A)\}$ d'inverse ι^* .

Solution : Le lemme 79 assure que $\iota^* \circ \iota_* = \text{Id}$. En particulier ι_* est injective. Montrons que son image est bien incluse dans $\{F \in \mathcal{F}(X) \mid F \leq P(A)\}$. Soit G un filtre sur A . Par adjonction, l'énoncé $\iota_* G \leq P(A)$ équivaut à $G \leq \iota^* P(A)$. Or $\iota^* P(A) = P(\iota^* A) = \top$ donc on a bien $\iota_* G \leq P(A)$.

Réciproquement, soit F un filtre sur X tel que $F \leq P(A)$. Montrons que $F = \iota_* \iota^* F$. D'après l'exercice 2.11, on a $\iota_* \iota^* F = F \wedge P(\iota_* A) = F \wedge P(A)$. Mais $F \leq P(A)$ donc $F \wedge P(A) = F$. Ainsi l'image de ι_* est bien l'ensemble annoncé et $\iota_* \circ \iota^* = \text{Id}$ sur cet ensemble.

Exercice 2.13 $\square$ Soit X et Y des ensembles. On note p la projection de $X \times Y$ sur X et q la projection de $X \times Y$ sur Y . On étend l'opération de produit de parties $\times : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X \times Y)$ en opération $\times : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X \times Y)$ par le corollaire 82. Soit F un filtre sur X et G un filtre sur Y .

1. Montrer que $F \times G = p^* F \wedge q^* G$.

Solution : L'analogue de cette formule est valable pour les parties. C'est clair géométriquement et on peut le démontrer en calculant

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in A \text{ et } y \in B\} \\ &= \{(x, y) \in X \times Y \mid p(x, y) \in A \text{ et } q(x, y) \in B\} \\ &= \{(x, y) \in X \times Y \mid (x, y) \in p^* A \text{ et } (x, y) \in q^* B\} \\ &= p^* A \cap q^* B. \end{aligned}$$

De plus le membre de droite est l'application à (A, B) de la composée $(p^* \times q^*) \circ \cap$ qui s'étend bien en $(p^* \times q^*) \circ \wedge$.

2. Montrer que

$$p_*(F \times G) = \begin{cases} F & \text{si } G \neq \perp \\ \perp & \text{si } G = \perp \end{cases}$$

(on pourra utiliser le lemme 73 pour montrer que le membre de droite est l'application à (F, G) d'une fonction qui commute aux infs filtrants dans les deux variables).

Solution : Là encore le cas des parties est clair : pour $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ on a

$$p_*(A \times B) = \begin{cases} A & \text{si } B \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{si } B = \emptyset \end{cases}$$

Et le membre de gauche de la formule annoncée est clairement l'extension aux filtres de son analogue sur les parties. Le membre de droite nécessite un peu plus de prudence car il n'est pas complètement évident qu'il commute aux infs filtrants en les deux variables. C'est clair si on fixe G puisqu'on obtient alors $F \mapsto F$ ou $F \mapsto \perp$ selon la valeur de G . Mais lorsqu'on fixe F , il faut utiliser que le lemme 73 assure que l'inf d'une partie filtrante de $\mathcal{F}(Y)$ est trivial si et seulement si cette partie contient le filtre trivial.

3. Montrer que $F \times G = \perp \Leftrightarrow (F = \perp \text{ ou } G = \perp)$.

Solution : On sait que l'image directe de filtre est triviale si et *seulement si* ce filtre est trivial. Donc

$$\begin{aligned} F \times G = \perp &\Leftrightarrow p_*(F \times G) = \perp \\ &\Leftrightarrow (G \neq \perp \text{ et } F = \perp) \text{ ou } G = \perp && \text{par la question précédente} \\ &\Leftrightarrow (G \neq \perp \text{ ou } G = \perp) \text{ et } (F = \perp \text{ ou } G = \perp) \\ &\Leftrightarrow F = \perp \text{ ou } G = \perp. \end{aligned}$$

Alternative : Montrons les deux implications. Supposons d'abord que $F \times G = \perp$. On obtient alors $p_*(F \times G) = p_*\perp = \perp$. On discute selon que $G = \perp$ ou $G \neq \perp$. Dans le premier cas la conclusion est claire. Dans le deuxième cas, la question précédente assure que $F = \perp$. Réciproquement, supposons $F = \perp$ ou $G = \perp$. Vu la symétrie de la situation, on peut supposer que $F = \perp$. On calcule alors $F \times G = p^*\perp \wedge q^*G = \perp \wedge q^*G = \perp$.

4. On note $\Delta = \{(x, x') \in X \times X \mid x = x'\}$ la diagonale de X . Montrer que pour tous filtres F et F' sur X , $(F \times F') \wedge P(\Delta) = \perp \Leftrightarrow F \wedge F' = \perp$.

Solution : L'énoncé correspondant sur les parties est clair : pour toutes parties A et A' de X , $(A \times A') \cap \Delta = \emptyset \Leftrightarrow A \cap A' = \emptyset$. Ainsi les fonctions de $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{E}$ qui envoient (A, A') sur les énoncés $(A \times A') \cap \Delta = \emptyset$ et $A \cap A' = \emptyset$ sont égales. Leurs extensions à $\mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X)$ le sont donc aussi.

Exercice 2.14 $\square$ Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Montrer que l'image directe par f d'un singleton dans X est un singleton dans Y . On veut maintenant le résultat analogue pour les « singletons généralisés ». Soit F un ultrafiltre sur X . Montrer que l'image directe par f de F est un ultrafiltre sur Y .

Solution : La version avec des singletons est claire, car $f_*\{x\} = \{f(x)\}$. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction et F un ultrafiltre sur X . Montrons que f_*F est un ultrafiltre. Le lemme 90 assure qu'il suffit de montrer que f_*F est non trivial et premier.

L'exercice 2.4 assure que f_*F n'est pas trivial. Montrons qu'il est premier. Soit A et B des parties de Y telles que $A \cup B \in f_*F$. On a donc $f^*(A \cup B) \in F$, c'est-à-dire $f^*A \cup f^*B \in F$. Comme F est premier, $f^*A \in F$ ou $f^*B \in F$, c'est-à-dire $A \in f_*F$ ou $B \in f_*F$.

Exercice 2.15 $\square$ Soit F un filtre sur un ensemble X . Montrer que F est le sup de l'ensemble des ultrafiltres inférieurs à F (cet exercice est plus difficile que les autres). Quel est l'énoncé analogue pour une partie de X ?

Solution : On veut montrer que F est le sup de l'ensemble $S := \{G \in \text{UF}(F) \mid G \leq F\}$. Il s'agit clairement d'un majorant de cet ensemble. Montrons que c'est le plus petit. Soit H un majorant de S , montrons que $F \leq H$. Soit $U \in H$. Montrons que $U \in F$. Supposons par l'absurde $U \notin F$.

Montrons d'abord que $F \wedge P(U^c)$ est non trivial. Supposons $F \wedge P(U^c) = \perp$. On obtient alors $V \in F$ tel que $V \cap U^c = \emptyset$. Autrement dit $V \subseteq U$, ce qui contredit l'hypothèse $U \notin F$.

Le lemme de l'ultrafiltre fournit un ultrafiltre $G \leq F \wedge P(U^c)$. Comme $G \leq F$, l'hypothèse sur H assure que $G \leq H$ et donc $U \in G$. Comme $G \leq P(U^c)$, $U^c \in G$. Ainsi $\emptyset = U \cap U^c \in G$, ce qui est absurde, car tout ultrafiltre est non trivial, par définition.

L'énoncé analogue pour les parties est que toute partie est la réunion des singletons qu'elle contient. On notera que l'énoncé qu'on vient de démontrer peut être vu comme une reformulation du lemme de l'ultrafiltre. On a utilisé ce lemme dans la démonstration. Et l'énoncé implique facilement le lemme, car si F est non trivial alors S ne saurait être vide puisque $\sup \emptyset = \perp$.