

3 Filtres 2

Exercice 2.8 $\square$ Soit X un ensemble et Y un treillis complet muni d'une fonction croissante $\rho : \mathcal{P}(X) \rightarrow Y$ vérifiant la propriété universelle des filtres: pour tout treillis complet Z et tout $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow Z$ croissante, il existe un unique $\bar{\varphi} : Y \rightarrow Z$ qui commute aux inf filtrants et vérifie $\bar{\varphi} \circ \rho = \varphi$. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme d'ensembles ordonnés $\psi : Y \rightarrow \mathcal{F}(X)$ tel que $\psi \circ \rho = P$.

Exercice 2.9 $\square$ Montrer que tout filtre sur un ensemble fini est principal.

Exercice 2.10 $\mathbb{H}$ Soit X et Y des ensembles et $G : X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ une fonction. On note φ la fonction de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{F}(Y)$ qui envoie U sur $\sup_{x \in U} G(x)$.

1. Montrer que φ est croissante, de sorte que l'on peut effectivement lui appliquer la propriété universelle des filtres pour obtenir $F \mapsto \sup_{x \in F}^f G(x)$.
2. Montrer que, pour tout filtre F sur X , $F = \sup_{x \in F}^f P(\{x\})$ (on pourra commencer par réfléchir à l'analogue de cette formule pour les parties de X).
3. Montrer que la fonction $(F, G) \mapsto \sup_{x \in F}^f G(x)$ est croissante en les deux arguments.
4. En utilisant que, pour tout ensemble Z , l'inclusion de $\mathcal{F}(Z)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(Z))^{\text{op}}$ commute aux inf filtrants et aux sup, montrer que, pour toute partie V de Y ,

$$V \in \sup_{x \in F}^f G(x) \Leftrightarrow \{x \mid V \in G(x)\} \in F.$$

En déduire que, pour tout prédicat p sur Y ,

$$\left(\forall^f y \in \sup_{x \in F}^f G(x), p(y) \right) \Leftrightarrow \forall^f x \in F, \forall^f y \in G(x), p(y).$$

5. Soit Z un treillis complet et $\varphi : \mathcal{F}(Y) \rightarrow Z$ une fonction qui commute aux inf filtrants. Montrer que $\varphi(\sup_{x \in F}^f G(x)) \geq \sup_{x \in F}^f \varphi(G(x))$. Montrer que si de plus φ commute aux sups alors il y a égalité (c'est donc le cas en particulier si $\varphi = f_*$ ou $\varphi = g^*$ pour $f : Y \rightarrow Y'$ ou $g : Y' \rightarrow Y$).

Exercice 2.11 $\square$ Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une fonction. Montrer que, pour tout filtre G sur Y , $\varphi_* \varphi^* G = G \wedge P(\varphi_* X)$.

Exercice 2.12 $\mathbb{H}$ Soit X un ensemble et A une partie de X . On note ι l'inclusion de A dans X . Montrer que ι_* induit un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre $\mathcal{F}(A)$ et $\{F \in \mathcal{F}(X) \mid F \leq P(A)\}$ d'inverse ι^* .

Exercice 2.13 $\mathbb{H}$ Soit X et Y des ensembles. On note p la projection de $X \times Y$ sur X et q la projection de $X \times Y$ sur Y . On étend l'opération de produit de parties $\times : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X \times Y)$ en opération $\times : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X \times Y)$ par le corollaire 82. Soit F un filtre sur X et G un filtre sur Y .

1. Montrer que $F \times G = p^* F \wedge q^* G$.
2. Montrer que

$$p_*(F \times G) = \begin{cases} F & \text{si } G \neq \perp \\ \perp & \text{si } G = \perp \end{cases}$$

(on pourra utiliser le lemme 73 pour montrer que le membre de droite est l'application à (F, G) d'une fonction qui commute aux infils filtrants dans les deux variables).

3. Montrer que $F \times G = \perp \Leftrightarrow (F = \perp \text{ ou } G = \perp)$.
4. On note $\Delta = \{(x, x') \in X \times X \mid x = x'\}$ la diagonale de X . Montrer que pour tous filtres F et F' sur X , $(F \times F') \wedge P(\Delta) = \perp \Leftrightarrow F \wedge F' = \perp$.

Exercice 2.14 $\square$ Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Montrer que l'image directe par f d'un singleton dans X est un singleton dans Y . On veut maintenant le résultat analogue pour les « singletons généralisés ». Soit F un ultrafiltre sur X . Montrer que l'image directe par f de F est un ultrafiltre sur Y .

Exercice 2.15 $\square$ Soit F un filtre sur un ensemble X . Montrer que F est le sup de l'ensemble des ultrafiltres inférieurs à F (cet exercice est plus difficile que les autres). Quel est l'énoncé analogue pour une partie de X ?