

4 Catégories

Exercice 3.1 $\square$ Montrer que, dans la définition d'un isomorphisme, le morphisme g est unique. On l'appelle l'inverse de f .

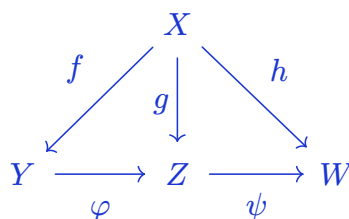
Solution : Soit g et h des morphismes qui conviennent. On calcule

$$h = h \circ 1_Y = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = 1_X \circ g = g.$$

Exercice 3.2 $\mathbb{H}$ Soit X un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur X . On note $\mathcal{C}_{(X, \sim)}$ la catégorie dont les objets sont les paires (Y, f) où Y est un ensemble et $f : X \rightarrow Y$ est une fonction compatible avec $\sim$ (ce qui signifie $\forall(x, x'), x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$) et pour laquelle les morphismes de (Y, f) dans (Z, g) sont les fonctions $\varphi : Y \rightarrow Z$ telles que $\varphi \circ f = g$.

1. Montrer soigneusement qu'il s'agit bien d'une catégorie en détaillant pourquoi l'opération de composition est bien définie.

Solution : La seule chose à vérifier est que la composition de morphisme donne bien un morphisme. Soit (Y, f) , (Z, g) et (W, h) des objets de $\mathcal{C}_{(X, \sim)}$. Soit $\varphi : (Y, f) \rightarrow (Z, g)$ et $\psi : (Z, g) \rightarrow (W, h)$. Montrons que la composition ordinaire de fonctions fournit bien $\psi \circ \varphi : (Y, f) \rightarrow (W, h)$.



Les deux petits triangles commutent donc le grand triangle commute. On peut le voir « géométriquement » en déformant des chemins dans le diagramme ou algébriquement en écrivant $(\psi \circ \varphi) \circ f = \psi \circ (\varphi \circ f) = \psi \circ g = h$.

2. Tout objet initial de $\mathcal{C}_{(X, \sim)}$ est appelé quotient de X par $\sim$. Montrer qu'un objet (Y, π) est initial si et seulement si π est surjective et, pour tous x_1 et x_2 dans X , $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ seulement si $x_1 \sim x_2$.

Solution : Soit (Y, π) un objet de $\mathcal{C}_{(X, \sim)}$. Supposons que (Y, π) est initial. Montrons que π est surjective. Intuitivement, il est clair que l'unicité dans la propriété universelle de (Y, π) assure cela. Pour le voir précisément, il faut un peu de technique. Soit Z un ensemble à deux éléments, disons 0 et 1. Soit $f : X \rightarrow Z$ la fonction constante de valeur 0. Cette fonction est compatible avec $\sim$. Notons $\varphi_0 : Y \rightarrow Z$ la fonction constante de valeur 0 et φ_1 la fonction qui envoie y sur 0 si $y \in \pi_* X$ et 1 sinon. Ces deux fonctions vérifient $\varphi_i \circ \pi = f$ donc l'unicité dans la propriété universelle de π assure que $\varphi_0 = \varphi_1$ donc $\pi_* X = Y$.

Soit x_1 et x_2 dans X . Supposons que $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ et montrons $x_1 \sim x_2$. Cette fois, c'est l'existence dans la propriété universelle qui doit nous aider. Soit $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ qui envoie x sur 1 si $x \sim x_1$ et 0 sinon. Cette fonction est compatible avec $\sim$ donc on obtient $\varphi :$

$Y \rightarrow Z$ telle que $f = \varphi \circ \pi$. On a donc $f(x_2) = \varphi(\pi(x_2)) = \varphi(\pi(x_1)) = f(x_1) = 1$. On en déduit que $x_2 \sim x_1$.

Réciproquement, supposons que π est surjective et, pour tous x et x' dans X , $\pi(x) = \pi(x')$ seulement si $x \sim x'$.

Soit (Z, f) un objet de $\mathcal{C}_{(X, \sim)}$. Montrons qu'il existe une unique fonction $\varphi : Y \rightarrow X$ telle que $\varphi \circ \pi = f$. L'unicité est claire, car la relation force les valeurs de φ sur l'image de π qui est supposée surjective. C'est l'existence qui est un peu subtile. Il s'agit d'un énoncé tellement fondamental que la démonstration est sensible aux fondements choisis. La façon imagée de raconter cette histoire est de dire que, pour chaque y , pour définir $\varphi(y)$, on utilise la surjectivité de π pour obtenir x tel que $\pi(x) = y$ et on pose $\varphi(y) = f(x)$ (et ensuite, on utilise l'hypothèse sur f et l'autre hypothèse sur π pour montrer que $\varphi \circ \pi = f$). Il s'agit d'une façon très pudique d'utiliser l'axiome du choix (et la surjectivité de π) pour obtenir $\sigma : Y \rightarrow X$ telle que $\pi \circ \sigma = \text{Id}_Y$ puis poser $\varphi = f \circ \sigma$. Montrons que $\varphi \circ \pi = f$. Soit $x \in X$. On a $(\varphi \circ \pi)(x) = f(\sigma(\pi(x)))$. Vu l'hypothèse sur f , il suffit de montrer $\sigma(\pi(x)) \sim x$. Vu la seconde hypothèse sur π , il suffit de montrer que $\pi(\sigma(\pi(x))) = \pi(x)$, ce qui découle de $\pi \circ \sigma = \text{Id}_Y$.

Si on ne veut pas utiliser l'axiome du choix, on peut choisir d'utiliser des fondements des maths où les fonctions jouent le premier rôle et l'existence de φ est un axiome. Si on tient à utiliser des fondements où les ensembles jouent le premier rôle, les fonctions de Y dans Z sont définies comme les parties Γ de $Y \times Z$ telles que $\forall y, \exists! z, (y, z) \in \Gamma$. Ici, on peut poser $\Gamma = \{(y, z) \mid \forall x, \pi(x) = y \Rightarrow f(x) = z\}$. Montrons la condition de graphe. Soit $y \in Y$. Montrons l'existence et l'unicité de z . Comme π est surjective, on obtient x tel que $\pi(x) = y$. Montrons que $z = f(x)$ convient. Soit x' tel que $\pi(x') = y$. La seconde hypothèse sur π assure que $x \sim x'$ puis l'hypothèse sur f assure que $f(x') = f(x) = z$. Montrons maintenant l'unicité. Soit z et z' deux éléments qui conviennent. Comme ils conviennent, on a en particulier $z = f(x) = z'$ donc $z = z'$. Ainsi, nous avons bien une fonction φ de graphe Γ . Montrons que φ convient, c'est-à-dire $\varphi \circ \pi = f$. Soit $x \in X$. On veut montrer que $\varphi(\pi(x)) = f(x)$. On sait que $(\pi(x), \varphi(\pi(x))) \in \Gamma$. Comme $\pi(x) = \pi(x)$ on obtient $f(x) = \varphi(\pi(x))$.

- On note $X/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$, et $\pi : X \rightarrow X/\sim$ l'application qui envoie tout élément sur sa classe d'équivalence. Montrer que $(X/\sim, \pi)$ est un quotient de X par $\sim$.

Solution : C'est clair d'après la question précédente et la définition des classes d'équivalence.

- Montrer que $((X/\sim) \times (X/\sim), \pi \times \pi)$ est un quotient de $X \times X$ par la relation produit $\sim \times \sim$.

Solution : Il suffit de vérifier les conditions de la question 2. La surjectivité de π entraîne celle de $\pi \times \pi$. Soit (x_1, x_2) et $(x_{1'}, x_{2'})$. On a

$$\begin{aligned} (\pi \times \pi)(x_1, x_2) = (\pi \times \pi)(x_{1'}, x_{2'}) &\Leftrightarrow \pi(x_1) = \pi(x_{1'}) \text{ et } \pi(x_2) = \pi(x_{2'}) \\ &\Leftrightarrow x_1 \sim x_{1'} \text{ et } x_2 \sim x_{2'} \\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2) \sim (x_{1'}, x_{2'}). \end{aligned}$$

5. A-t-on $(X/\sim) \times (X/\sim) = (X \times X)/(\sim \times \sim)$?

Solution : Non, sauf si X est vide. Par exemple si $X = \{0\}$, muni de la relation d'équivalence triviale, $(X/\sim) \times (X/\sim) = \{(\{0\}, \{0\})\}$ tandis que $(X \times X)/(\sim \times \sim) = \{(0, 0)\}$.

6. La question précédente n'est pas pertinente. Formuler le bon énoncé et y répondre.

Solution : La question précédente s'intéresse de trop près à la construction de quotients comme ensembles de classes d'équivalence. L'important est la propriété universelle des quotients. Cette propriété assure qu'il existe une unique bijection $\varphi : (X/\sim) \times (X/\sim) \rightarrow (X \times X)/(\sim \times \sim)$ telle que

$$\begin{array}{ccc} & X \times X & \\ \pi \times \pi \swarrow & & \searrow \pi' \\ (X/\sim) \times (X/\sim) & \xrightarrow{\varphi} & (X \times X)/(\sim \times \sim) \end{array}$$

commute.

Exercice 3.3 $\mathfrak{R}$ Soit I un ensemble et K un corps. On considère la catégorie dont les objets sont les paires (E, e) où E est un K -ev et $e : I \rightarrow E$ une fonction, et $\text{Hom}((E, e), (F, f)) = \{\varphi \in L(E, F) \mid \varphi \circ e = f\}$. Montrer que (E, e) est initial si et seulement si e est une base de E .

Solution : Supposons d'abord que e est une base de E . Soit f une application de I dans un K -ev F . D'après le cours d'algèbre linéaire, il existe une unique application φ linéaire de E dans F telle que, pour tout i , $\varphi(e_i) = f_i$. C'est exactement la propriété annoncée.

Réciproquement, supposons que (E, e) est initial. On veut montrer que tout élément de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des e_i .

Pour montrer l'existence, il suffit de montrer que l'image de e engendre E comme K -ev. Une façon élémentaire de le voir est d'argumenter que le contraire mettrait en défaut l'unicité dans la définition d'objet initial. En effet, étant donné une application f de I dans un K -ev F et $\varphi \in L(E, F)$ telle que $\varphi \circ e = f$, on peut changer φ sur un supplémentaire du sous-espace E' engendré par l'image de e sans perdre $\varphi \circ e = f$. Plus abstraitement, on peut considérer la projection $\pi : E \rightarrow E/E'$. Cette projection et l'application nulle sont deux applications linéaires $\varphi \in L(E, E/E')$ vérifiant $\varphi \circ e = 0$. L'unicité dans la définition d'objet initial assure que $\pi = 0$. Or π est surjective donc $E/E' = 0$ et donc $E' = E$. On notera comment cette variante remplace la discussion d'un supplémentaire de E' par l'utilisation de E/E' , avec l'avantage qu'on voit immédiatement un espace but pertinent.

Montrons maintenant l'unicité d'une décomposition en combinaison linéaire. Pour tout i dans I , on note $\delta_i : I \rightarrow K$ la fonction qui envoie i sur 1 et les autres éléments sur 0. On note $\Delta_i \in L(E, K)$ la fonction linéaire associée à δ_i par la définition d'objet initial. Soit $v \in E$. On sait par le paragraphe précédent que v s'écrit $\sum_i a_i e_i$ pour une fonction $a : I \rightarrow K$ à support fini. Pour chaque $i_0 \in I$ on applique Δ_{i_0} à cette égalité pour obtenir $\Delta_{i_0}(v) = \sum_i a_i \Delta_{i_0}(e_i) = \sum_i a_i \delta_{i_0}(i) = a_{i_0}$. Ainsi la fonction a est déterminée par v .

Exercice 3.4 $\mathfrak{F}$ Soit G un groupe. On rappelle que le commutateur de deux éléments x et y de G est $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$. Le sous-groupe engendré par ces commutateurs est appelé sous-groupe dérivé de G et noté $D(G)$.

1. Montrer que, pour tout morphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$ et tous x et y dans G , $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$.

Solution : Il s'agit d'un calcul direct : $f([x, y]) = f(xyx^{-1}y^{-1}) = f(x)f(y)f(x)^{-1}f(y)^{-1} = [f(x), f(y)]$.

2. Montrer que, pour tout morphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$, $f_*(D(G)) \subseteq D(G')$.

Solution : Notons S (resp. S') l'ensemble des commutateurs d'éléments de G (resp. G'). Par définition, $D(G) = \langle S \rangle$ et $D(G') = \langle S' \rangle$. La question précédente assure que $f_*(S) \subseteq S'$. Comme l'opération $\langle \cdot \rangle$ est croissante, on en déduit $\langle f_*(S) \rangle \subseteq \langle S' \rangle = D(G')$. On a vu dans le chapitre 1 que l'image directe commute avec le sous-groupe engendré donc $\langle f_*(S) \rangle = f_*(D(G))$.

3. Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué.

Solution : Soit g un élément de G . On note c_g la conjugaison par g . Il s'agit d'un morphisme de groupes donc la question précédente assure que $(c_g)_* D(G) \subseteq D(G)$, ce qu'il fallait démontrer.

4. On note G_{ab} le quotient de G par $D(G)$ et $\pi : G \rightarrow G_{\text{ab}}$ la projection. Montrer que G_{ab} est un groupe abélien.

Solution : Soit x et y dans G_{ab} . Comme π est surjective on obtient g et h dans G tels que $x = \pi(g)$ et $y = \pi(h)$. On calcule

$$\begin{aligned} xy &= \pi(g)\pi(h) \\ &= \pi(gh) \\ &= \pi([g, h]hg) \\ &= \pi([g, h])\pi(h)\pi(g) \\ &= yx. \end{aligned}$$

5. On note Ab_G la catégorie dont les objets sont des groupes abéliens munis d'un morphisme depuis G . Les morphismes dans cette catégorie sont définis comme dans la définition de $\text{Grp}_{(G, H)}$. Montrer que (G_{ab}, π) est initial dans la catégorie Ab_G : pour tout groupe abélien A et tout morphisme de groupes $\varphi : G \rightarrow A$, il existe un unique morphisme $\bar{\varphi} : G_{\text{ab}} \rightarrow A$ tel que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ G_{\text{ab}} & & \end{array}$$

Solution : Soit $\varphi : G \rightarrow A$ un morphisme de groupes vers un groupe abélien. On veut factoriser φ . La propriété universelle des groupes quotients assure qu'il suffit de vérifier que

$D(G) \subseteq \ker(\varphi)$, c'est-à-dire $\varphi_*(D(G)) \subseteq \{1\}$. Or, on a vu que $\varphi_*(D(G)) \subseteq D(A)$ et $D(A)$ est engendré par les commutateurs de A qui sont tous triviaux, car A est abélien.

Exercice 3.5 $\mathfrak{F}$ Soit K un corps. On note $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les paires (A, a) où A est une K -algèbre et a un élément de A , et les morphismes entre (A, a) et (B, b) sont les morphismes de K -algèbre de A dans B qui envoient a sur b .

1. Montrer que $(K[X], X)$ est un objet initial dans $\mathcal{C}$. Pour tout objet (A, a) on appelle évaluation en a et on note ev_a l'unique morphisme depuis $(K[X], X)$. Dans la suite, on utilisera uniquement l'existence et l'unicité de ev_a , pas sa construction. On dit que a est une racine de $P \in K[X]$ dans A si $ev_a(P) = 0$.

Solution : Soit (A, a) un objet de $\mathcal{C}$. Montrons qu'il existe un unique morphisme de $(K[X], X)$ vers (A, a) . Montrons d'abord l'unicité. Soit φ un tel morphisme. Par définition, φ est un morphisme de K -algèbre de $K[X]$ vers A qui envoie X sur a . Soit P dans $K[X]$. On peut écrire $P = \sum_i b_i X^i$ pour une unique fonction b à support fini de $\mathbb{N}$ dans K . En utilisant que φ est un morphisme de K -algèbre, on obtient $\varphi(P) = \sum_i b_i \varphi(X)^i$. Comme $\varphi(X) = a$, on en déduit $\varphi(P) = \sum_i b_i a^i$. Ainsi φ est entièrement déterminé. Pour l'existence, on montre que la formule précédente définit bien une solution.

On fixe un polynôme P dans $K[X]$. On note A_P la K -algèbre $K[X]/(P)$ et π la projection de $K[X]$ sur A_P .

2. Montrer que π et $ev_{\pi(X)}$ sont des morphismes de K -algèbres qui envoient X sur $\pi(X)$.

Solution : Par construction de la structure de K -algèbre sur A_P , π est un morphisme de K -algèbre. Il envoie évidemment X sur $\pi(X)$. La propriété analogue pour $ev_{\pi(X)}$ est exactement ce qui est promis par la propriété universelle de $K[X]$ (c'est-à-dire le fait que $(K[X], X)$ est initial dans $\mathcal{C}$).

3. Montrer que $\pi(X)$ est une racine de P dans A_P .

Solution : La propriété de la question précédente caractérise $ev_{\pi(X)}$ donc on obtient $ev_{\pi(X)} = \pi$. Comme $P \in (P)$, $\pi(P)$ est nul, et donc $ev_{\pi(X)}(P)$ également. On méditera avec profit la comparaison avec les démonstrations plus élémentaires de ce fait.

4. On note $\mathcal{C}'$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ formée des objets (A, a) pour lesquels a est une racine de P . Montrer que $(A_P, \pi(X))$ est un objet initial de $\mathcal{C}'$.

Solution : On a vu dans la question précédente que $(A_P, \pi(X))$ est bien un objet de $\mathcal{C}'$. Soit (A, a) un autre objet de $\mathcal{C}'$. Montrons qu'il existe un unique morphisme de K -algèbre $\varphi : A_P \rightarrow A$ tel que $\varphi(\pi(X)) = a$. Comme $(K[X], X)$ est initial dans $\mathcal{C}$, on obtient un unique morphisme de K -algèbres $ev_a : K[X] \rightarrow A$ tel que $ev_a(X) = a$. Pour montrer que ce morphisme descend (de façon unique) au quotient $K[X]/(P) = A_P$, il suffit de montrer que $(P) \subseteq \ker ev_a$. La propriété universelle de l'idéal engendré assure qu'il suffit de montrer que $P \in \ker ev_a$, ce qui est précisément l'hypothèse que a est racine de P . On a bien obtenu une solution φ .

Montrons l'unicité. Soit $\varphi' : A_P \rightarrow A$ un autre morphisme solution. Comme $\varphi' \circ \pi$ est un morphisme de K -algèbre qui envoie X sur a , on obtient $\varphi' \circ \pi = ev_a$ car cette propriété caractérise ev_a . L'unicité dans la descente au quotient de ev_a garantit ensuite que $\varphi' = \varphi$.

5. Dans le cas $K = \mathbb{R}$ et $P = X^2 + 1$, en déduire qu'il existe un unique isomorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres entre $\mathbb{C}$ et A_P qui envoie i sur $\pi(X)$ (en supposant qu'on ait construit $\mathbb{C}$ de façon élémentaire, comme ensemble de paires de nombres réels muni d'opérations étranges).

Solution : Par unicité modulo unique isomorphisme des objets initiaux, il suffit de montrer que $(\mathbb{C}, i)$ est un objet initial dans $\mathcal{C}'$ (pour $K = \mathbb{R}$ et $P = X^2 + 1$). Soit A une $\mathbb{R}$ -algèbre et x une racine de $X^2 + 1$ dans A . Montrons qu'il existe un unique morphisme de $\mathbb{R}$ -algèbre de $\mathbb{C}$ dans A qui envoie i sur x .

On sait que $(1, i)$ est une $\mathbb{R}$ -base de $\mathbb{C}$ donc il existe une unique application $\mathbb{R}$ -linéaire de $\mathbb{C}$ dans A qui envoie 1 sur 1 et i sur x . Montrons que cette application est un morphisme de $\mathbb{R}$ -algèbre. Comme elle est déjà $\mathbb{R}$ -linéaire, et envoie 1 sur 1 par construction, il suffit de vérifier qu'elle préserve les produits. Soit z et z' dans $\mathbb{C}$. On écrit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ pour des réels a, b, a' et b' . On a $\varphi(zz') = \varphi(aa' - bb' + i(ab' + a'b))$ en utilisant l'étrange définition de la multiplication sur $\mathbb{C}$. En utilisant ensuite que φ est $\mathbb{R}$ -linéaire et envoie 1 sur 1 et i sur x , on obtient $\varphi(zz') = aa' - bb' + x(ab' + a'b)$. On calcule de même $\varphi(z)\varphi(z') = (a + xb)(a' + xb')$ qu'on développe en $\varphi(zz') = aa' + x^2bb' + x(ab' + a'b)$ (ici, on a utilisé que l'image de $\mathbb{R}$ dans A commute avec tous les éléments, par définition d'une $\mathbb{R}$ -algèbre). Enfin on conclut en utilisant que x est racine de $X^2 + 1$ donc $x^2 = -1$.

L'unicité est claire, car un morphisme de $\mathbb{R}$ -algèbre est en particulier une application linéaire qui envoie 1 sur 1, et on impose l'envoi de i sur x donc la construction ci-dessus est la seule possible.

Exercice 3.6 $\square$ Soit X un ensemble ordonné et $x : I \rightarrow X$ une famille d'éléments de X . Montrer qu'un produit des x_i est exactement un inf des x_i . Montrer de même qu'un coproduit est un sup.

Solution : Un élément y est un produit des x_i s'il y a des projections de y vers les x_i , donc si $y \leq x_i$ pour tout i et si tout objet ayant des morphismes vers les x_i , c'est-à-dire tout minorant des x_i , a un morphisme vers y , c'est-à-dire est inférieur à y . Le cas des coproduits en découle en passant à la relation d'ordre opposée, ce qui correspond à passer à la catégorie opposée et transforme donc produit en coproduit.

Exercice 3.7 $\square$ On fixe un corps K . Et une famille $(E_i)_{i \in I}$ de K -espaces vectoriels.

1. Montrer que l'ensemble produit des E_i muni de la structure de K -espace vectoriel usuelle et des projections sur les E_i est un produit des E_i dans la catégorie des K -espaces vectoriels.

Solution : Soit φ une famille d'application linéaires d'un K -ev F dans les E_i . On sait que le produit cartésien d'ensembles est un produit dans la catégorie des ensembles. On obtient ainsi une fonction $\bar{\varphi}$ de F dans le produit. Or cette application est linéaire pour la structure d'espace vectoriel produit. Donc, on a bien une unique application linéaire $\bar{\varphi}$ telle que $p_i \circ \bar{\varphi} = \varphi_i$ pour tout i .

2. On considère le sous-espace $\bigoplus_i E_i$ de $\prod_i E_i$ formé des vecteurs n'ayant qu'un nombre fini de projections sur les E_i non nulles (on note que ce n'est différent du produit que lorsque I est infini). On munit ce sous-espace des inclusions $j_k : E_k \rightarrow \prod_i E_i$ définies par

$$v \mapsto \left(i \mapsto \begin{cases} v & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right).$$

Montrer qu'il s'agit d'un coproduit des E_i dans la catégorie $K\text{-ev}$.

Solution : Soit F un $K\text{-ev}$ et soit φ une famille d'applications linéaires des E_i dans F . On veut montrer qu'il existe une unique application linéaire $\hat{\varphi}$ de la somme des E_i dans F telle que, pour tout i , $\hat{\varphi} \circ j_i = \varphi_i$.

Montrons d'abord l'unicité. Supposons qu'une telle application $\hat{\varphi}$ existe. Soit v un vecteur de la somme. Par définition de la somme, on obtient un ensemble fini $J \subseteq I$ et des vecteurs $v_k \in E_k$ pour $k \in J$ tels que $v = \sum_{k \in J} j_k(v_k)$. On calcule alors $\hat{\varphi}(v) = \sum_{k \in J} \hat{\varphi}(j_k(v_k)) = \sum_{k \in J} \varphi_k(v_k)$. Ainsi $\hat{\varphi}(v)$ est entièrement déterminé par φ . On montre également facilement que le calcul ci-dessus permet de définir un $\hat{\varphi}$ qui convient. En effet, on veut définir sa valeur sur chaque vecteur par la formule ci-dessus puis les vérifications de linéarité font intervenir au plus deux vecteurs à la fois donc un ensemble fini d'indices dans I .

Exercice 3.8 $\Updownarrow$ Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $\varphi_1 : X \rightarrow Y_1$ et $\varphi_2 : X \rightarrow Y_2$ des morphismes dans $\mathcal{C}$. Une somme amalgamée (appelée aussi coproduit cofibré, ou pushout) de Y_1 et Y_2 le long de φ_1 et φ_2 est la donnée d'un objet Z équipé de morphismes $j_1 : Y_1 \rightarrow Z$ et $j_2 : Y_2 \rightarrow Z$ tels que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_1} & Y_1 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ Y_2 & \xrightarrow{j_2} & Z \end{array}$$

commute et qui est universel : pour tout autre tel (Z', j'_1, j'_2) , il existe un unique morphisme $\psi : Z \rightarrow Z'$ tel que

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\varphi_1} & Y_1 & & \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow j_1 & \searrow j'_1 & \\ Y_2 & \xrightarrow{j_2} & Z & \xrightarrow{\psi} & Z' \\ & \searrow j'_2 & & & \end{array}$$

commute. On dira que Z est une somme amalgamée de Y_1 et Y_2 le long de X quand les applications φ_1 et φ_2 sont claires d'après le contexte.

1. Montrer qu'une somme amalgamée est unique modulo unique isomorphisme commutant avec les applications j_i .

Solution : Il suffit de trouver une catégorie dans laquelle (Z, j_1, j_2) est initial et les morphismes sont les diagrammes comme celui où apparaît ψ . On voit que la définition est exactement de cette forme.

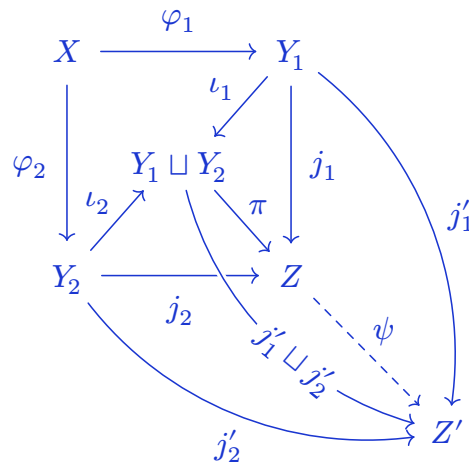
2. Montrer que si X est initial dans $\mathcal{C}$ alors cette notion est exactement celle de coproduit de Y_1 et Y_2 .

Solution : Dans ce cas les relations de commutations faisant intervenir les φ_i sont automatiques. Par exemple, $j_1 \circ \varphi_1 = j_2 \circ \varphi_2$ est automatique, car il n'y a qu'un morphisme entre X et Z . Ainsi X , φ_1 et φ_2 ne jouent aucun rôle et on peut les effacer et retrouver la définition de coproduit.

3. Dans le cas où $\mathcal{C} = \text{Ens}$, montrer qu'on peut choisir comme Z le quotient de $Y_1 \sqcup Y_2$ par la relation d'équivalence qui lie $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ pour tout $x \in X$, avec les j_i obtenues en composant les inclusions $\iota_i : Y_i \hookrightarrow Y_1 \sqcup Y_2$ avec la projection π sur le quotient. On notera cet ensemble $Y_1 \sqcup_X Y_2$ quand les φ_i sont clairs.

Solution : Montrons que le diagramme commute. Soit $x \in X$. On veut $j_1(\varphi_1(x)) = j_2(\varphi_2(x))$, c'est-à-dire $\pi(\iota_1(\varphi_1(x))) = \pi(\iota_2(\varphi_2(x)))$. Il suffit de vérifier que $\iota_1(\varphi_1(x)) \sim \iota_2(\varphi_2(x))$, et la relation d'équivalence utilisée est là pour cela.

Montrons maintenant l'universalité. Soit (Z', j'_1, j'_2) qui convient aussi. Comme $j'_1(\varphi_1(x)) = j'_2(\varphi_2(x))$, l'application $j'_1 \sqcup j'_2$ est compatible avec $\sim$ donc descend à Z pour donner ψ .



4. Dans le cas où $\mathcal{C} = \text{Mod}_R$, montrer qu'on peut choisir comme Z le quotient de $Y_1 \oplus Y_2$ par le sous-module image de $(\varphi_1, -\varphi_2)$, avec les j_i obtenues en composant les inclusions $\iota_i : Y_i \hookrightarrow Y_1 \oplus Y_2$ avec la projection π sur le quotient. On notera cet ensemble $Y_1 \oplus_X Y_2$ quand les φ_i sont clairs.

Solution : Pour tout (Z, j_1, j_2) , la condition $j_1 \circ \varphi_1 = j_2 \circ \varphi_2$ est équivalente à $(j_1 + j_2) \circ (\varphi_1, -\varphi_2) = 0$, ou encore $(j_1 + j_2)|_{\text{im}(\varphi_1, -\varphi_2)} = 0$ (où $j_1 + j_2 : Y_1 \oplus Y_2 \rightarrow Z$ est donnée par la propriété universelle du coproduit). Donc la propriété universelle des quotients de modules assure le résultat.