

4 Catégories

Exercice 3.1 $\square$ Montrer que, dans la définition d'un isomorphisme, le morphisme g est unique. On l'appelle l'inverse de f .

Exercice 3.2 $\mathfrak{H}$ Soit X un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur X . On note $\mathcal{C}_{(X,\sim)}$ la catégorie dont les objets sont les paires (Y, f) où Y est un ensemble et $f : X \rightarrow Y$ est une fonction compatible avec $\sim$ (ce qui signifie $\forall(x, x'), x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$) et pour laquelle les morphismes de (Y, f) dans (Z, g) sont les fonctions $\varphi : Y \rightarrow Z$ telles que $\varphi \circ f = g$.

1. Montrer soigneusement qu'il s'agit bien d'une catégorie en détaillant pourquoi l'opération de composition est bien définie.
2. Tout objet initial de $\mathcal{C}_{(X,\sim)}$ est appelé quotient de X par $\sim$. Montrer qu'un objet (Y, π) est initial si et seulement si π est surjective et, pour tous x_1 et x_2 dans X , $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ seulement si $x_1 \sim x_2$.
3. On note $X/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$, et $\pi : X \rightarrow X/\sim$ l'application qui envoie tout élément sur sa classe d'équivalence. Montrer que $(X/\sim, \pi)$ est un quotient de X par $\sim$.
4. Montrer que $((X/\sim) \times (X/\sim), \pi \times \pi)$ est un quotient de $X \times X$ par la relation produit $\sim \times \sim$.
5. A-t-on $(X/\sim) \times (X/\sim) = (X \times X)/(\sim \times \sim)$?
6. La question précédente n'est pas pertinente. Formuler le bon énoncé et y répondre.

Exercice 3.3 $\mathfrak{T}$ Soit I un ensemble et K un corps. On considère la catégorie dont les objets sont les paires (E, e) où E est un K -ev et $e : I \rightarrow E$ une fonction, et $\text{Hom}((E, e), (F, f)) = \{\varphi \in L(E, F) \mid \varphi \circ e = f\}$. Montrer que (E, e) est initial si et seulement si e est une base de E .

Exercice 3.4 $\mathfrak{T}$ Soit G un groupe. On rappelle que le commutateur de deux éléments x et y de G est $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$. Le sous-groupe engendré par ces commutateurs est appelé sous-groupe dérivé de G et noté $D(G)$.

1. Montrer que, pour tout morphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$ et tous x et y dans G , $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$.
2. Montrer que, pour tout morphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$, $f_*(D(G)) \subseteq D(G')$.
3. Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué.
4. On note G_{ab} le quotient de G par $D(G)$ et $\pi : G \rightarrow G_{\text{ab}}$ la projection. Montrer que G_{ab} est un groupe abélien.
5. On note Ab_G la catégorie dont les objets sont des groupes abéliens munis d'un morphisme depuis G . Les morphismes dans cette catégorie sont définis comme dans la définition de $\text{Grp}_{(G,H)}$. Montrer que (G_{ab}, π) est initial dans la catégorie Ab_G : pour tout groupe abélien A et tout morphisme de groupes $\varphi : G \rightarrow A$, il existe un unique morphisme $\bar{\varphi} : G_{\text{ab}} \rightarrow A$ tel que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\varphi} & A \\
\pi \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\
G_{\text{ab}} & &
\end{array}$$

Exercice 3.5 $\curvearrowright$ Soit K un corps. On note $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les paires (A, a) où A est une K -algèbre et a un élément de A , et les morphismes entre (A, a) et (B, b) sont les morphismes de K -algèbre de A dans B qui envoient a sur b .

1. Montrer que $(K[X], X)$ est un objet initial dans $\mathcal{C}$. Pour tout objet (A, a) on appelle évaluation en a et on note ev_a l'unique morphisme depuis $(K[X], X)$. Dans la suite, on utilisera uniquement l'existence et l'unicité de ev_a , pas sa construction. On dit que a est une racine de $P \in K[X]$ dans A si $ev_a(P) = 0$.

On fixe un polynôme P dans $K[X]$. On note A_P la K -algèbre $K[X]/(P)$ et π la projection de $K[X]$ sur A_P .

2. Montrer que π et $ev_{\pi(X)}$ sont des morphismes de K -algèbres qui envoient X sur $\pi(X)$.
3. Montrer que $\pi(X)$ est une racine de P dans A_P .
4. On note $\mathcal{C}'$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ formée des objets (A, a) pour lesquels a est une racine de P . Montrer que $(A_P, \pi(X))$ est un objet initial de $\mathcal{C}'$.
5. Dans le cas $K = \mathbb{R}$ et $P = X^2 + 1$, en déduire qu'il existe un unique isomorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres entre $\mathbb{C}$ et A_P qui envoie i sur $\pi(X)$ (en supposant qu'on ait construit $\mathbb{C}$ de façon élémentaire, comme ensemble de paires de nombres réels muni d'opérations étranges).

Exercice 3.6 $\square$ Soit X un ensemble ordonné et $x : I \rightarrow X$ une famille d'éléments de X . Montrer qu'un produit des x_i est exactement un inf des x_i . Montrer de même qu'un coproduit est un sup.

Exercice 3.7 $\square$ On fixe un corps K . Et une famille $(E_i)_{i \in I}$ de K -espaces vectoriels.

1. Montrer que l'ensemble produit des E_i muni de la structure de K -espace vectoriel usuelle et des projections sur les E_i est un produit des E_i dans la catégorie des K -espaces vectoriels.
2. On considère le sous-espace $\bigoplus_i E_i$ de $\prod_i E_i$ formé des vecteurs n'ayant qu'un nombre fini de projections sur les E_i non nulles (on note que ce n'est différent du produit que lorsque I est infini). On munit ce sous-espace des inclusions $j_k : E_k \rightarrow \prod_i E_i$ définies par

$$v \mapsto \left(i \mapsto \begin{cases} v & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right).$$

Montrer qu'il s'agit d'un coproduit des E_i dans la catégorie $K\text{-ev}$.

Exercice 3.8 $\oplus$ Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $\varphi_1 : X \rightarrow Y_1$ et $\varphi_2 : X \rightarrow Y_2$ des morphismes dans $\mathcal{C}$. Une somme amalgamée (appelée aussi coproduit cofibré, ou pushout) de Y_1 et Y_2 le long de φ_1 et φ_2 est la donnée d'un objet Z équipé de morphismes $j_1 : Y_1 \rightarrow Z$ et $j_2 : Y_2 \rightarrow Z$ tels que

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\varphi_1} & Y_1 \\
\varphi_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\
Y_2 & \xrightarrow{j_2} & Z
\end{array}$$

commute et qui est universel : pour tout autre tel (Z', j'_1, j'_2) , il existe un unique morphisme $\psi : Z \rightarrow Z'$ tel que

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{\varphi_1} & Y_1 & & \\
\varphi_2 \downarrow & & \downarrow j_1 & \searrow j'_1 & \\
Y_2 & \xrightarrow{j_2} & Z & \xrightarrow{\psi} & Z' \\
& & \searrow j'_2 & & \\
& & & &
\end{array}$$

commute. On dira que Z est une somme amalgamée de Y_1 et Y_2 le long de X quand les applications φ_1 et φ_2 sont claires d'après le contexte.

1. Montrer qu'une somme amalgamée est unique modulo unique isomorphisme commutant avec les applications j_i .
2. Montrer que si X est initial dans $\mathcal{C}$ alors cette notion est exactement celle de coproduit de Y_1 et Y_2 .
3. Dans le cas où $\mathcal{C} = \text{Ens}$, montrer qu'on peut choisir comme Z le quotient de $Y_1 \sqcup Y_2$ par la relation d'équivalence qui lie $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ pour tout $x \in X$, avec les j_i obtenues en composant les inclusions $\iota_i : Y_i \hookrightarrow Y_1 \sqcup Y_2$ avec la projection π sur le quotient. On notera cet ensemble $Y_1 \sqcup_X Y_2$ quand les φ_i sont clairs.
4. Dans le cas où $\mathcal{C} = \text{Mod}_R$, montrer qu'on peut choisir comme Z le quotient de $Y_1 \oplus Y_2$ par le sous-module image de $(\varphi_1, -\varphi_2)$, avec les j_i obtenues en composant les inclusions $\iota_i : Y_i \hookrightarrow Y_1 \oplus Y_2$ avec la projection π sur le quotient. On notera cet ensemble $Y_1 \oplus_X Y_2$ quand les φ_i sont clairs.