

5 Espaces topologiques 1

Exercice 4.1 $\square$ Soit X un espace topologique, A une partie de X . Montrer que $(\overline{A})^c = \widehat{\overline{A^c}}$ (on pourra utiliser le lemme 60).

Solution :

$$\begin{aligned} (\overline{A})^c &= \{x \mid x \notin \overline{A}\} \\ &= \{x \mid \mathcal{N}_x \wedge P(A) = \perp\} \\ &= \{x \mid \mathcal{N}_x \leq P(A^c)\} \\ &= \widehat{\overline{A^c}} \end{aligned}$$

Exercice 4.2 $\square$ Soit X un espace topologique, A une partie de X et U un ouvert de X . Montrer que $U \cap \overline{A} \subseteq \overline{U \cap A}$.

Solution : Soit $x \in U \cap \overline{A}$. Montrons que $x \in \overline{U \cap A}$. On calcule

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_x \wedge P(U \cap A) &= \mathcal{N}_x \wedge (P(U) \wedge P(A)) \text{ car } P \text{ commute aux infs finis} \\ &= (\mathcal{N}_x \wedge P(U)) \wedge P(A) \text{ par associativité de } \wedge \\ &= \mathcal{N}_x \wedge P(A) \text{ car } U \text{ ouvert et } x \in U \\ &\neq \perp \text{ car } x \in \overline{A}. \end{aligned}$$

Exercice 4.3 $\square$ Soit X un ensemble, Y un espace topologique, $f : X \rightarrow Y$ une fonction, F un filtre sur X , y un point de Y et V une partie de Y . On suppose que F est non trivial (ie. $F \neq \perp$), $f_*F \leq \mathcal{N}_y$ et $\forall^f x \in F, f(x) \in V$.

1. Montrer que la condition $\forall^f x \in F, f(x) \in V$ est équivalente à $f_*F \leq P(V)$.

Solution : L'hypothèse $\forall^f x \in F, f(x) \in V$ signifie, par définition, $\{x \mid f(x) \in V\} \in F$. Autrement dit, $f^*V \in F$. Par définition de f_*F , cela signifie $V \in f_*F$. On a vu en cours (et on peut vérifier directement) que cela est équivalent à $f_*F \leq P(V)$.

2. En déduire que y est dans l'adhérence de V .

Solution : On a vu que y est dans l'adhérence de V si et seulement si $\mathcal{N}_y \wedge P(V) \neq \perp$. Or, on a vu dans la question précédente que $f_*F \leq P(V)$ et, par hypothèse, $f_*F \leq \mathcal{N}_y$. Ainsi $f_*F \leq \mathcal{N}_y \wedge P(V)$.

Enfin, on a supposé que $F \neq \perp$ donc $f_*F \neq \perp$ par l'exercice 2.4. Ainsi $\perp < f_*F \leq \mathcal{N}_y \wedge P(V)$ et y est dans l'adhérence de V .

3. Reformuler ce résultat en termes élémentaires dans le cas où $X = \mathbb{N}$ et $F = \mathcal{N}_\infty$, puis dans le cas où $X = \mathbb{R}$ et $F = \mathcal{N}_x$ où x est soit un réel, soit $\pm\infty$.

Solution : Dans le premier cas, on obtient: « si une suite u prends ses valeurs dans V à partir d'un certain rang et converge vers y alors y est dans l'adhérence de V ». Dans le

deuxième cas, on obtient: « si une fonction f envoie les réels suffisamment proches de x dans V et converge vers y en x alors y est dans l'adhérence de V ». Dans le cas de $+\infty$, on obtient: « si une fonction f envoie les réels suffisamment grands dans V et converge vers y en $+\infty$ alors y est dans l'adhérence de V ». Dans le cas de $-\infty$, on obtient: « si une fonction f envoie les réels suffisamment négatifs dans V et converge vers y en $-\infty$ alors y est dans l'adhérence de V ».

Exercice 4.4 $\mathbb{H}$ Soit X un espace topologique, A une partie de X et $\iota : A \hookrightarrow X$ l'inclusion. Montrer A est fermée si et seulement si ι est fermée (on pourra utiliser le lemme 84). Montrer A est ouverte si et seulement si ι est ouverte.

Solution : Supposons que A est fermée et montrons que ι est fermée. Soit F un fermé de A . Montrons que $\iota_* F$ est fermé. Soit $x \in \overline{\iota_* F}$. Comme $\iota_* F \subseteq A$ et A est fermé, $\overline{\iota_* F} \subseteq \overline{A} = A$ donc x est dans A . Puisque la question est à propos de ι , il est plus clair d'écrire qu'on obtient $a \in A$ tel que $x = \iota(a)$. Montrons que $a \in F$ et donc $x \in \iota_* F$. On a

$$\begin{aligned} \perp &< \mathcal{N}_x \wedge P(\iota_* F) \text{ car } x \in \overline{\iota_* F} \\ &= \iota_* (\iota^* \mathcal{N}_{\iota(a)} \wedge P(F)) \text{ par le lemme 84} \\ &= \iota_* (\mathcal{N}_a \wedge P(F)) \text{ par le corollaire 132} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{N}_a \wedge P(F) \neq \perp$ donc a est dans $\overline{F}$, c'est-à-dire F . Réciproquement si ι est fermée alors A est fermé comme image directe de A qui est fermé dans A .

Supposons que A est ouverte et montrons que ι est ouverte. Soit U un ouvert de A . Montrons que $\iota_* U$ est ouvert. Soit $x \in U$. Montrons que $\mathcal{N}_{\iota(x)} \leq P(\iota_* U)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\iota(x)} &= \mathcal{N}_{\iota(x)} \wedge P(A) \text{ car } A \text{ est ouvert et } \iota(x) \in A \\ &= \iota_* \mathcal{N}_x \text{ par le corollaire 132} \\ &= \iota_* P(U) \text{ car } \iota_* \text{ est croissante, } U \text{ est ouvert et } x \in U \\ &= P(\iota_* U). \end{aligned}$$

Réciproquement, si ι est ouverte alors A est ouvert comme image directe de A qui est fermé dans A .

Exercice 4.5 $\square$ Soit X un espace topologique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. X est séparé.
2. Tout filtre non trivial sur X converge vers au plus un point.

Solution : Supposons X séparé. Soit F un filtre non trivial sur X qui converge vers x et y . Par définition de la convergence, $F \leq \mathcal{N}_x$ et $F \leq \mathcal{N}_y$. Ainsi $F \leq \mathcal{N}_x \wedge \mathcal{N}_y$. Par hypothèse $\perp < F$ donc $\perp \leq \mathcal{N}_x \wedge \mathcal{N}_y$. Par définition de X séparé, on en déduit $x = y$.

Réciproquement, supposons que tout filtre non trivial converge vers au plus un point. Soit x et y dans X tels que $\mathcal{N}_x \wedge \mathcal{N}_y$ est non trivial. Comme $\mathcal{N}_x \wedge \mathcal{N}_y \leq \mathcal{N}_x$, $\mathcal{N}_x \wedge \mathcal{N}_y$ converge vers x . De même, il converge vers y . Par hypothèse $x = y$.