

5 Espaces topologiques 1

Exercice 4.1 $\square$ Soit X un espace topologique, A une partie de X . Montrer que $(\overline{A})^c = \overline{A^c}$ (on pourra utiliser le lemme 60).

Exercice 4.2 $\Leftrightarrow$ Soit X un espace topologique, A une partie de X et U un ouvert de X . Montrer que $U \cap \overline{A} \subseteq \overline{U \cap A}$.

Exercice 4.3 $\square$ Soit X un ensemble, Y un espace topologique, $f : X \rightarrow Y$ une fonction, F un filtre sur X , y un point de Y et V une partie de Y . On suppose que F est non trivial (ie. $F \neq \perp$), $f_*F \leq \mathcal{N}_y$ et $\forall^f x \in F, f(x) \in V$.

1. Montrer que la condition $\forall^f x \in F, f(x) \in V$ est équivalente à $f_*F \leq P(V)$.
2. En déduire que y est dans l'adhérence de V .
3. Reformuler ce résultat en termes élémentaires dans le cas où $X = \mathbb{N}$ et $F = \mathcal{N}_\infty$, puis dans le cas où $X = \mathbb{R}$ et $F = \mathcal{N}_x$ où x est soit un réel, soit $\pm\infty$.

Exercice 4.4 $\Leftrightarrow$ Soit X un espace topologique, A une partie de X et $\iota : A \hookrightarrow X$ l'inclusion. Montrer A est fermée si et seulement si ι est fermée (on pourra utiliser le lemme 84). Montrer A est ouverte si et seulement si ι est ouverte.

Exercice 4.5 $\square$ Soit X un espace topologique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. X est séparé.
2. Tout filtre non trivial sur X converge vers au plus un point.