

6 Espaces topologiques 2

Exercice 4.6 $\square$ Soit T et S deux familles des topologies sur des ensembles X et Y indexées par un même ensemble I . En utilisant l'exercice 1.17, montrer que $(\inf_i T_i) \times (\inf_i S_i) = \inf_i (T_i \times S_i)$ où la croix désigne la topologie produit.

Montrer de plus que, pour toute topologie T_X sur X , $T_X \times \inf_i S_i = \inf_i (T_X \times S_i)$.

Solution : Notons p_1 et p_2 les projections de $X \times Y$ sur X et Y respectivement.

$$\begin{aligned} \left(\inf_i T_i \right) \times \left(\inf_i S_i \right) &= p_1^* \left(\inf_i T_i \right) \wedge p_2^* \left(\inf_i S_i \right) \\ &= \left(\inf_i p_1^* T_i \right) \wedge \left(\inf_i p_2^* S_i \right) \\ &= \inf_i (p_1^* T_i \wedge p_2^* S_i) \\ &= \inf_i (T_i \times S_i) \end{aligned}$$

en utilisant que l'image réciproque commute aux inf et l'exercice 1.17.

Soit T_X une topologie sur X .

$$\begin{aligned} T_X \times \left(\inf_i S_i \right) &= p_1^* T_X \wedge p_2^* \left(\inf_i S_i \right) \\ &= p_1^* T_X \wedge \left(\inf_i p_2^* S_i \right) \\ &= \inf_i (p_1^* T_X \wedge p_2^* S_i) \\ &= \inf_i (T_X \times S_i) \end{aligned}$$

en utilisant l'exercice 1.17.

Exercice 4.7 $\square$ Soit X, Y, Z et W des ensembles. Soit $f : X \rightarrow Z$ et $g : Y \rightarrow W$ des fonctions. On note $f \times g$ la fonction de $X \times Y$ dans $Z \times W$ définie par $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$. On notera que le diagramme suivant commute, les applications verticales étant les projections.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ p_X \uparrow & & \uparrow p_Z \\ X \times Y & \xrightarrow{f \times g} & Z \times W \\ p_Y \downarrow & & \downarrow p_W \\ Y & \xrightarrow{g} & W \end{array}$$

Soit T_Z une topologie sur Z et soit T_W une topologie sur W . Montrer que

$$(f \times g)^*(T_Z \times T_W) = f^*T_Z \times g^*T_W.$$

Attention : la formule analogue avec des images directes est fausse en général.

Solution :

$$\begin{aligned}
(f \times g)^*(T_Z \times T_W) &= (f \times g)^*(p_Z^*T_W \wedge p_W^*T_Z) && \text{déf topo produit} \\
&= ((f \times g)^*p_Z^*T_Z) \wedge ((f \times g)^*p_W^*T_W) && \text{adj à droite comm inf} \\
&= ((p_Z \circ (f \times g))^*T_Z) \wedge ((p_W \circ (f \times g))^*T_W) && \text{im réc par comp} \\
&= ((f \circ p_X)^*T_Z) \wedge ((g \circ p_Y)^*T_W) && \text{diagramme } f \times g \\
&= (p_X^*f^*T_Z) \wedge (p_Y^*g^*T_W) && \text{im réc par comp} \\
&= f^*T_Z \times g^*T_W && \text{déf topo produit}
\end{aligned}$$

Exercice 4.8 $\square$ Cet exercice construit la topologie finale associée à une famille d'applications et en déduit l'existence de coproduits dans la catégorie des espaces topologiques.

1. Soit $(X_i, T_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et soit $(\varphi_i : X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ une famille de fonctions à valeurs dans un ensemble Y . Montrer qu'il existe une unique topologie sur Y vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout espace topologique Z et toute fonction $f : Y \rightarrow Z$, f est continue si et seulement si $\forall i, f \circ \varphi_i$ est continue. Cette topologie est appelée topologie finale associée à φ .

Solution : C'est exactement la même chose que l'argument vu pour la topologie initiale, mais en renversant toutes les flèches (y compris les inégalités).

Supposons que T et T' sont deux solutions. Montrons que $T = T'$. Vu la symétrie de la situation, il suffit de montrer que $T \leq T'$, ou encore que l'identité de Y est continue de (Y, T) vers (Y, T') . Vu l'hypothèse sur T , il suffit de montrer que, pour tout i , $\text{Id} \circ \varphi_i$ est continue de X_i dans (Y, T') . Cette condition est garantie par l'hypothèse sur T' appliquée à $Z = (Y, T')$ puisque Id est continue de (Y, T') dans (Y, T') .

Montrons maintenant l'existence. Là encore on suit le chemin utilisé pour la topologie initiale.

$$\begin{aligned}
(\forall i, f \circ \varphi_i \text{ continue}) &\Leftrightarrow \forall i, (f \circ \varphi_i)_* T_i \leq T_Z \\
&\Leftrightarrow \forall i, f_*(\varphi_i)_* T_i \leq T_Z \\
&\Leftrightarrow \forall i, (\varphi_i)_* T_i \leq f^*T_Z \\
&\Leftrightarrow \sup_i [(\varphi_i)_* T_i] \leq f^*T_Z \\
&\Leftrightarrow f_* \sup_i [(\varphi_i)_* T_i] \leq T_Z
\end{aligned}$$

donc la topologie $\sup_i [(\varphi_i)_* T_i]$ convient.

2. Montrer que la catégorie des espaces topologiques admet de coproduits pour toutes les familles d'objets.

Solution : Soit X une famille d'espaces topologiques. Les ensembles sous-jacents admettent comme coproduit la réunion disjointe $\bigsqcup_i X_i$ avec les inclusions j_i évidentes. Cet ensemble muni de la topologie finale associée à la famille j convient.

Exercice 4.9 $\mathbb{H}$ Soit X un espace topologique et F un filtre sur X .

1. Montrer que $F \leq \overline{F}$ puis montrer que F est fermé si et seulement si $\forall U \in F, \exists V \in F, V$ fermé et $V \subseteq U$.

Solution : On sait que, pour toute partie A de X , $A \subseteq \overline{A}$. Comme l'extension aux filtres est croissante, on obtient $F \leq \overline{F}$. Ainsi

$$\begin{aligned} F \text{ est fermé} &\Leftrightarrow \overline{F} \leq F \\ &\Leftrightarrow \forall U \in F, \exists W \in F, \overline{W} \subseteq U \end{aligned}$$

Cette dernière condition implique la condition annoncée. En effet, soit $U \in F$. Montrons qu'il existe $V \in F$ fermé et contenu dans U . Par la condition, on obtient $W \in F$ tel que $\overline{W} \subseteq U$. Mais $W \subseteq \overline{W}$ donc $\overline{W} \in F$ et $V = \overline{W}$ convient. L'autre implication est claire.

2. Montrer que $\mathring{F} \leq F$ puis montrer que F est ouvert si et seulement si $\forall U \in F, \mathring{U} \in F$. **Solution :** Le début est complètement analogue à la première question et montre la première équivalence ci-dessous :

$$\begin{aligned} F \text{ est ouvert} &\Leftrightarrow F \leq \mathring{F} \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \mathring{F}, V \in F \\ &\Leftrightarrow \forall V, (\exists W \in F, \mathring{W} \subseteq V) \Rightarrow V \in F \end{aligned}$$

Cette dernière condition implique la condition annoncée. En effet, soit $U \in F$. La condition appliquée à $V = \mathring{U}$ donne $(\exists W \in F, \mathring{W} \subseteq \mathring{U}) \Rightarrow \mathring{U} \in F$ dont la prémisse est vraie puisque $W = U$ convient. La réciproque est claire.

Exercice 4.10 $\mathbb{H}$ Dans cet exercice, on explore le lien entre valeur d'adhérence et suites pour les filtres à base dénombrable. Soit X un ensemble.

1. Montrer que si X est un espace métrique alors tout point admet une base dénombrable de voisinages.

Solution : Les boules centrées au point et de rayon $1/(n+1)$ conviennent.

2. Soit F un filtre sur X . Montrer que si F admet une base dénombrable alors il admet une base $B : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ décroissante.

Solution : Soit $V : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une base de F . On définit $B : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ par $n \mapsto \bigcap_{k \leq n} V_k$. Il s'agit d'une suite décroissante. Montrons que c'est une base de $\mathcal{N}_x$. Chaque B_n est voisinage de x , car c'est une intersection finie de voisinages de x . Soit $U \in \mathcal{N}_x$. Par hypothèse, on obtient n tel que $V_n \subseteq U$. On a $B_n \subseteq V_n \subseteq U$.

3. Dans la suite de cet exercice, on suppose X muni d'une topologie. Soit A une partie de X et x un élément de l'adhérence de A . Montrer que si $\mathcal{N}_x$ est à base dénombrable alors il existe une suite d'éléments de A qui tend vers x .

Solution : La question précédente fournit une base décroissante $B : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ pour $\mathcal{N}_x$. Par hypothèse $\mathcal{N}_x \wedge P(A) \neq \perp$ donc le lemme 60 assure que tous les $B_n \cap A$ sont non vides. L'axiome du choix permet donc de construire $u : \mathbb{N} \rightarrow X$ telle que $\forall n, u_n \in B_n \cap A$.

Montrons que u convient. On sait déjà que u est à valeurs dans A , il suffit donc de montrer qu'elle tend vers x . Soit U un voisinage de x . Montrons qu'il existe N tel que $\forall n \geq N, u_n \in U$. Comme B est une base $\mathcal{N}_x$, on obtient N tel que $B_N \subseteq U$. Montrons que N convient. Soit $n \geq N$. On a $u_n \in B_n, n \geq N$ et B est décroissante donc $u_n \in B_N \subseteq U$.

4. Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow X$ une suite et $x \in X$. On suppose que $\mathcal{N}_x$ est à base dénombrable et que x est valeur d'adhérence de $u_*\mathcal{N}_\infty$. Montrer qu'il existe une sous-suite de u qui tend vers x (cette question est plus difficile que les autres).

Solution : Soit $V : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une base décroissante de voisinages de x fournit par l'hypothèse sur x et la question précédente.

L'hypothèse de valeur d'adhérence signifie que, pour tous $W \in u_*\mathcal{N}_\infty$ et $U \in \mathcal{N}_x, W \cap U \neq \emptyset$. En particulier pour tous N et n dans $\mathbb{N}, u_*([N, \infty[) \cap V_n \neq \emptyset$. On en déduit par récurrence l'existence de $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n, (u \circ \varphi)_n \in V_n$. Montrons que $u \circ \varphi$ tend vers x . Soit U un voisinage de x . On veut N tel que $\forall n \geq N, (u \circ \varphi)_n \in U$. Comme V est une base, on obtient N tel que $V_N \subseteq U$. Montrons que ce N convient. Soit $n \geq N$. On sait que $(u \circ \varphi)_n \in V_n$. Or V est décroissante donc $V_n \subseteq V_N \subseteq U$ donc $(u \circ \varphi)_n \in U$.

Exercice 4.11 $\square$ Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Heine-Cantor en utilisant le principe de récurrence pour les parties d'un espace compact. Soit X et Y deux espaces métriques. On suppose que X est compact. Soit f une fonction continue de X dans Y . On veut montrer que f est uniformément continue. On fixe $\varepsilon > 0$ et considère le prédicat p sur les parties de $X \times X$ qui associe à U l'énoncé

$$p(U) : \exists \delta > 0, \forall (x, x') \in U, d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

1. Montrer que ce prédicat vérifie les conditions du principe de récurrence et conclure.

Solution : La conclusion souhaitée est $p(X \times X)$. Comme $X \times X$ est compact, il suffit de vérifier que p satisfait les quatre hypothèses du principe de récurrence.

On a $p(\emptyset)$, car $\delta = 42$ convient. Soit U et V des parties de $X \times X$. Supposons $p(V)$ et $U \subseteq V$. L'hypothèse fournit un δ qui convient pour (x, x') dans V donc convient aussi pour (x, x') dans U . Le fait que ces deux premières vérifications soient triviales est typique dans l'application de cette méthode. On attend ensuite une petite augmentation du contenu pour la troisième vérification et le cœur de l'affaire pour la quatrième.

Supposons $p(U)$ et $p(V)$ et montrons $p(U \cup V)$. Ces hypothèses fournissent δ et δ' respectivement, et $\min(\delta, \delta')$ convient pour $U \cup V$.

Montrons maintenant la dernière condition. Soit $(x, x') \in X \times X$. La continuité de f en x fournit $\eta > 0$ tel que $\forall z \in X, d(x, z) < \eta \Rightarrow d(f(x), f(z)) < \varepsilon/2$. On pose $U = B(x, \eta/2) \times B(x', 1)$. Il s'agit d'un voisinage de (x, x') . Montrons que $p(U)$. Montrons que $\delta = \eta/2$ convient. Soit $(u, v) \in U$ tels que $d(u, v) < \eta/2$. Comme $u \in B(x, \eta/2) \subseteq B(x, \eta)$, $d(f(x), f(u)) < \varepsilon/2$. De plus $d(x, v) \leq d(x, u) + d(u, v) \leq \eta$, donc on a également $d(f(x), f(v)) < \varepsilon/2$. Et donc $d(f(u), f(v)) < \varepsilon$.

2. Comparer avec la démonstration correspondante via le principe de sous-recouvrement fini.

Solution : Par rapport à une démonstration utilisant la propriété de Borel-Lebesgue, le paragraphe précédent est commun aux deux approches. Ensuite la démonstration basée sur Borel-Lebesgue recouvrirait $X \times X$ par des $U_{(x,x')}$ munis d'un $\delta_{(x,x')}$, extrairait un sous-recouvrement fini, utiliserait le minimum de l'ensemble des δ correspondant, et conclurait avec plus ou moins de détails selon l'humeur (plutôt moins en général). On voit que la démonstration de l'implication de Borel-Lebesgue vers le principe de récurrence abstrait la partie rébarbative de l'argument. Le cœur de la démonstration, la partie qui dépend vraiment de l'objectif spécifique, reste bien sûr présent dans les deux preuves.

Exercice 4.12 $\Leftrightarrow$ Soit X un espace topologique. Une partie A de X est dite séquentiellement ouverte si toute suite $u : \mathbb{N} \rightarrow X$ qui converge vers un point a de A est à valeurs dans A à partir d'un certain rang : $\forall^\infty n, u_n \in A$. Montrer qu'une partie de X est séquentiellement ouverte si et seulement si son complémentaire est séquentiellement fermé. Montrer que les ouverts sont séquentiellement ouverts et que X est séquentiel si et seulement si la réciproque est vraie.

Solution : Supposons que A est séquentiellement ouverte et montrons que A^c est séquentiellement fermé. Soit u une suite d'éléments de A^c qui converge vers $x \in X$. Montrons que $x \in A^c$. Supposons que $x \in A$. Comme A est séquentiellement ouvert, on obtient n tel que $u_n \in A$, ce qui contredit $u_n \in A^c$.

Réciproquement, supposons que A est séquentiellement fermé. Montrons que A^c est séquentiellement ouvert. Soit u une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in A^c$. Supposons par l'absurde que $\forall N, \exists n, u_n \notin A^c$. On peut alors construire par récurrence $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n, u_{\varphi(n)} \in A$. Comme u tend vers x , $u \circ \varphi$ tend vers x . Comme A est séquentiellement fermé, $x \in A$, ce qui est absurde.

Montrons maintenant que les ouverts sont séquentiellement ouverts. Soit U un ouvert. Par définition U^c est fermé et nous avons vu que cela implique que U^c est séquentiellement fermé. D'après le paragraphe précédent, cela implique que U est séquentiellement ouvert.

Tous ces résultats se combinent clairement pour montrer qu'un espace est séquentiel si et seulement si ses ouverts séquentiels sont ouverts.

Exercice 4.13 $\Leftrightarrow$ Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de sa topologie usuelle. Soit E et F des $\mathbb{K}$ -evt.

1. Montrer que toute forme linéaire continue $\lambda \in E'$ est faiblement continue, c'est-à-dire continue de E muni de sa topologie faible dans $\mathbb{K}$.

Solution : Cette propriété est garantie, car la topologie faible est la topologie initiale associée aux formes linéaires continues sur E . En effet, la fonction Id_E est faiblement continue et la propriété universelle de la topologie initiale assure que tous les $\lambda \circ \text{Id}$ sont continues.

Il est également instructif de démontrer ce fait à partir de la construction de la topologie faible par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\lambda_* T_{\text{faible}} &= \lambda_* \left(\inf_{\mu \in E'} \mu^* T_{\mathbb{K}} \right) && \text{par déf} \\
&\leq \inf_{\mu \in E'} \lambda_* \mu^* T_{\mathbb{K}} && \lambda_* \text{ croissante} \\
&\leq \lambda_* \lambda^* T_{\mathbb{K}} && \text{inf minore} \\
&\leq T_{\mathbb{K}} && \text{co-unité de } \lambda_* \dashv \lambda^*
\end{aligned}$$

2. Soit φ une application linéaire continue de E dans F . Montrer que φ est faiblement continue, c'est-à-dire continue de E muni de sa topologie faible dans F muni de sa topologie faible.

Solution : Par propriété universelle de la topologie faible sur F , il suffit de montrer que $\mu \circ \varphi$ est continue pour toute forme linéaire μ sur F qui est continue (pour la topologie forte de F). Or $\mu \circ \varphi$ est continue pour la topologie forte sur E , comme composition de fonctions continue. La première question assure que $\mu \circ \varphi$ est également continue pour la topologie faible.