

6 Espaces topologiques 2

Exercice 4.6 $\square$ Soit T et S deux familles des topologies sur des ensembles X et Y indexées par un même ensemble I . En utilisant l'exercice 1.17, montrer que $(\inf_i T_i) \times (\inf_i S_i) = \inf_i (T_i \times S_i)$ où la croix désigne la topologie produit.

Montrer de plus que, pour toute topologie T_X sur X , $T_X \times \inf_i S_i = \inf_i (T_X \times S_i)$.

Exercice 4.7 $\Rightarrow$ Soit X, Y, Z et W des ensembles. Soit $f : X \rightarrow Z$ et $g : Y \rightarrow W$ des fonctions. On note $f \times g$ la fonction de $X \times Y$ dans $Z \times W$ définie par $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$. On notera que le diagramme suivant commute, les applications verticales étant les projections.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Z \\
 p_X \uparrow & & \uparrow p_Z \\
 X \times Y & \xrightarrow{f \times g} & Z \times W \\
 p_Y \downarrow & & \downarrow p_W \\
 Y & \xrightarrow{g} & W
 \end{array}$$

Soit T_Z une topologie sur Z et soit T_W une topologie sur W . Montrer que

$$(f \times g)^*(T_Z \times T_W) = f^*T_Z \times g^*T_W.$$

Attention : la formule analogue avec des images directes est fausse en général.

Exercice 4.8 $\square$ Cet exercice construit la topologie finale associée à une famille d'applications et en déduit l'existence de coproduits dans la catégorie des espaces topologiques.

1. Soit $(X_i, T_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et soit $(\varphi_i : X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ une famille de fonctions à valeurs dans un ensemble Y . Montrer qu'il existe une unique topologie sur Y vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout espace topologique Z et toute fonction $f : Y \rightarrow Z$, f est continue si et seulement si $\forall i, f \circ \varphi_i$ est continue. Cette topologie est appelée topologie finale associée à φ .
2. Montrer que la catégorie des espaces topologiques admet de coproduits pour toutes les familles d'objets.

Exercice 4.9 $\Rightarrow$ Soit X un espace topologique et F un filtre sur X .

1. Montrer que $F \leq \bar{F}$ puis montrer que F est fermé si et seulement si $\forall U \in F, \exists V \in F, V$ fermé et $V \subseteq U$.
2. Montrer que $\mathring{F} \leq F$ puis montrer que F est ouvert si et seulement si $\forall U \in F, \mathring{U} \in F$.

Exercice 4.10 $\Rightarrow$ Dans cet exercice, on explore le lien entre valeur d'adhérence et suites pour les filtres à base dénombrable. Soit X un ensemble.

1. Montrer que si X est un espace métrique alors tout point admet une base dénombrable de voisinages.
2. Soit F un filtre sur X . Montrer que si F admet une base dénombrable alors il admet une base $B : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ décroissante.
3. Dans la suite de cet exercice, on suppose X muni d'une topologie. Soit A une partie de X et x un élément de l'adhérence de A . Montrer que si $\mathcal{N}_x$ est à base dénombrable alors il existe une suite d'éléments de A qui tend vers x .
4. Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow X$ une suite et $x \in X$. On suppose que $\mathcal{N}_x$ est à base dénombrable et que x est valeur d'adhérence de $u_*\mathcal{N}_\infty$. Montrer qu'il existe une sous-suite de u qui tend vers x (cette question est plus difficile que les autres).

Exercice 4.11 $\square$ Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Heine-Cantor en utilisant le principe de récurrence pour les parties d'un espace compact. Soit X et Y deux espaces métriques. On suppose que X est compact. Soit f une fonction continue de X dans Y . On veut montrer que f est uniformément continue. On fixe $\varepsilon > 0$ et considère le prédicat p sur les parties de $X \times X$ qui associe à U l'énoncé

$$p(U) : \exists \delta > 0, \forall (x, x') \in U, d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

1. Montrer que ce prédicat vérifie les conditions du principe de récurrence et conclure.
2. Comparer avec la démonstration correspondante via le principe de sous-recouvrement fini.

Exercice 4.12 $\Rightarrow$ Soit X un espace topologique. Une partie A de X est dite séquentiellement ouverte si toute suite $u : \mathbb{N} \rightarrow X$ qui converge vers un point a de A est à valeurs dans A à partir d'un certain rang : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A$. Montrer qu'une partie de X est séquentiellement ouverte si et seulement si son complémentaire est séquentiellement fermé. Montrer que les ouverts sont séquentiellement ouverts et que X est séquentiel si et seulement si la réciproque est vraie.

Exercice 4.13 $\Rightarrow$ Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de sa topologie usuelle. Soit E et F des $\mathbb{K}$ -evt.

1. Montrer que toute forme linéaire continue $\lambda \in E'$ est faiblement continue, c'est-à-dire continue de E muni de sa topologie faible dans $\mathbb{K}$.
2. Soit φ une application linéaire continue de E dans F . Montrer que φ est faiblement continue, c'est-à-dire continue de E muni de sa topologie faible dans F muni de sa topologie faible.