

7 Foncteurs et transformations naturelles

Exercice 5.1 $\mathfrak{T}$ Soit n un entier strictement positif. Montrer qu'on peut définir un foncteur GL_n des anneaux commutatifs vers les groupes en envoyant tout anneau A sur le groupe $\mathrm{GL}_n(A)$ et tout morphisme $f : A \rightarrow B$ vers la fonction $\mathrm{GL}_n(f)$ qui applique f à tous les coefficients d'une matrice.

Solution : Il y a deux choses à vérifier : l'action annoncée sur les morphismes envoie bien les morphismes d'anneaux sur des morphismes de groupes et elle est compatible avec la composition (la compatibilité avec les identités est claire).

Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Montrons que $\mathrm{GL}_n(f)$ est un morphisme de groupes. Soit M et N dans $\mathrm{GL}_n(A)$. Pour tous i et j entre 1 et n , on a

$$\begin{aligned} [\mathrm{GL}_n(f)(MN)]_{i,j} &= f\left(\sum_k M_{i,k} N_{k,j}\right) \\ &= \sum_k f(M_{i,k}) f(N_{k,j}) \\ &= [\mathrm{GL}_n(f)(M) \mathrm{GL}_n(f)(N)]_{i,j}. \end{aligned}$$

Montrons maintenant la compatibilité avec la composition. Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ des morphismes d'anneaux. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(A)$. On a, pour tous i et j , $[\mathrm{GL}_n(g \circ f)(M)]_{i,j} = (g \circ f)(M_{i,j}) = g(f(M_{i,j})) = g([\mathrm{GL}_n(f)(M)]_{i,j}) = [\mathrm{GL}_n(g)(\mathrm{GL}_n(f)(M))]_{i,j}$.

Exercice 5.2 $\square$ Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories, F, G et H des foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$. Soit $\alpha : F \Rightarrow G$ et $\beta : G \Rightarrow H$. À chaque objet X de $\mathcal{C}$, on associe le morphisme $\beta_X \circ \alpha_X : FX \rightarrow HX$. Montrer que ces morphismes forment une transformation naturelle de F vers H .

Solution : Il s'agit de montrer la condition de naturalité par rapport aux morphismes dans $\mathcal{C}$. Soit X et Y des objets de $\mathcal{C}$ et $f : X \rightarrow Y$.

$$\begin{array}{ccccc} FX & \xrightarrow{\alpha_X} & GX & \xrightarrow{\beta_X} & HX \\ Ff \downarrow & & Gf \downarrow & & Hf \downarrow \\ FY & \xrightarrow{\alpha_Y} & GY & \xrightarrow{\beta_Y} & HY \end{array}$$

Le carré de gauche commute car α est une transformation naturelle, celui de droite car β est une transformation naturelle. Ainsi le grand rectangle commute comme désiré.

Exercice 5.3 $\mathfrak{H}$ On veut exprimer (et démontrer) le fait que les deux seules façons naturelles de produire, pour tout ensemble X , une partie de X à partir de tout élément de X sont l'application envoyant tout élément sur l'ensemble vide et l'application singleton $x \mapsto \{x\}$.

1. Montrer que la famille de fonctions $v_X : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ qui associe à tout ensemble X la fonction $v_X : x \mapsto \emptyset$ est une transformation naturelle de Id_{Ens} vers $\mathcal{P}$ (ici, on n'utilise pas la relation d'inclusion, on voit $\mathcal{P}$ comme un foncteur de Ens vers Ens).

Solution : Chaque s_X est bien un morphisme de $\text{Id}_{\text{Ens}(X)}$ vers $\mathcal{P}(X)$, car les morphismes dans Ens sont simplement les fonctions. Vérifions la condition de naturalité. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On veut la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v_X} & \mathcal{P}(X) \\ f \downarrow & & \downarrow f_* \\ Y & \xrightarrow{v_Y} & \mathcal{P}(Y) \end{array}$$

Soit $x \in X$. Les deux composées appliquées à x donnent $\emptyset$ et $f_*\emptyset$ qui sont bien égaux.

2. Montrer que la famille de fonctions $s_X : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ qui associe à tout ensemble X la fonction $s_X : x \mapsto \{x\}$ est une transformation naturelle de Id_{Ens} vers $\mathcal{P}$.

Solution : Chaque s_X est bien un morphisme de $\text{Id}_{\text{Ens}(X)}$ vers $\mathcal{P}(X)$, car les morphismes dans Ens sont simplement les fonctions. Vérifions la condition de naturalité. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On veut la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s_X} & \mathcal{P}(X) \\ f \downarrow & & \downarrow f_* \\ Y & \xrightarrow{s_Y} & \mathcal{P}(Y) \end{array}$$

Soit $x \in X$. Les deux composées appliquées à x donnent $\{f(x)\}$ et $f_*\{x\}$ qui sont bien égaux.

3. Montrer qu'il s'agit des deux seules transformations naturelles entre ces foncteurs (on pourra appliquer la condition de naturalité aux fonctions d'inclusion de singletons dans des ensembles).

Solution : Soit $\alpha : \text{Id}_{\text{Ens}} \Rightarrow \mathcal{P}$ une transformation naturelle. Montrons que $\alpha = v$ ou $\alpha = s$. Soit X un ensemble et $x \in X$. La naturalité de α_X appliquée à l'inclusion ι de $\{x\}$ dans X donne la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} \{x\} & \xrightarrow{\alpha_{\{x\}}} & \mathcal{P}(\{x\}) \\ \iota \downarrow & & \downarrow \iota_* \\ X & \xrightarrow{\alpha_X} & \mathcal{P}(X) \end{array}$$

qu'on peut appliquer à x pour obtenir $\alpha_X(x) = \iota_*(\alpha_{\{x\}}(x))$.

On distingue deux cas. Si $\forall x, \alpha_{\{x\}}(x) = \emptyset$ (la quantification porte sur tous les éléments de tous les ensembles) alors la formule ci-dessus montre que $\alpha = v$. Supposons maintenant $\exists x, \alpha_{\{x\}}(x) \neq \emptyset$ et fixons un tel x_0 . Comme $\mathcal{P}(\{x_0\}) = \{\emptyset, \{x_0\}\}$, on a $\alpha_{\{x_0\}}(x_0) = \{x_0\}$.

On retourne maintenant au X que nous avons fixé et son élément x . La naturalité de α appliquée à l'unique fonction f de $\{x_0\}$ dans $\{x\}$ montre que $\alpha_{\{x\}}(x) = f_*\{x_0\} = \{x\}$. Ainsi $\alpha = s$.

Exercice 5.4 $\square$ Soit K un corps. On lit parfois que, en l'absence de structure supplémentaire sur un K -espace vectoriel V , il n'y a pas de moyen d'envoyer V dans son dual, mais qu'on peut l'envoyer naturellement dans son bidual V^{**} . Le but de cet exercice est de montrer que cette discussion entre bien dans le cadre des transformations naturelles. On note Ev_K la catégories des K -espaces vectoriels (les morphismes étant les fonctions K -linéaires).

1. Montrer qu'on obtient bien un foncteur $(\cdot)^* : \text{Ev}_K \rightarrow \text{Ev}_K^{\text{op}}$ en envoyant tout K -ev V sur $L(V, K)$ et toute application K -linéaire $\varphi : V \rightarrow W$ sur sa transposée $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$ définie par $\lambda \mapsto \lambda \circ \varphi$.

Solution : Pour chaque φ , la formule proposée définit bien une application linéaire de W^* dans V^* . Il faut vérifier que $\varphi \mapsto \varphi^*$ est compatible avec les identités et avec la composition. Le seul point un peu délicat est que $(\varphi \circ \psi)^*(\lambda) = \lambda \circ (\varphi \circ \psi) = (\lambda \circ \varphi) \circ \psi = (\psi^* \circ \varphi^*)(\lambda)$, c'est pour cela qu'on utilise Ev_K^{op} comme catégorie but.

2. On note $(\cdot)^{**} : \text{Ev}_K \rightarrow \text{Ev}_K$ le foncteur obtenu en composant $(\cdot)^*$ avec lui-même (en utilisant que, pour toute catégorie $\mathcal{C}$, $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$). À chaque espace vectoriel V , on associe l'application linéaire $\text{ev}_V : V \rightarrow V^{**}$ qui envoie x sur $\lambda \mapsto \lambda(x)$. Montrer que ces applications sont les composantes d'une transformation naturelle $\text{ev} : \text{Id}_{\text{Ev}_K} \Rightarrow (\cdot)^{**}$.

Solution : Montrons la naturalité. Soit $\varphi : V \rightarrow W$ une application K -linéaire. Montrons que $\varphi^{**} \circ \text{ev}_V = \text{ev}_W \circ \varphi$ dans $L(V, W^{**})$. Pour tester une égalité dans $L(V, W^{**})$ il suffit d'évaluer sur tout $v \in V$ puis sur tout $\mu \in W^*$. On calcule

$$\begin{aligned} (\varphi^{**} \circ \text{ev}_V)(v)(\mu) &= \varphi^{**}(\text{ev}_V(v))(\mu) \quad \text{par déf de } \circ \\ &= \text{ev}_V(v)(\varphi^*(\mu)) \quad \text{par déf de } (\cdot)^* \\ &= (\varphi^*(\mu))(v) \quad \text{par déf de } \text{ev}_V \\ &= \mu(\varphi(v)) \quad \text{par déf de } (\cdot)^* \\ &= \text{ev}_W(\varphi(v))(\mu) \quad \text{par déf de } \text{ev}_W \\ &= (\text{ev}_W \circ \varphi)(v)(\mu) \quad \text{par déf de } \circ. \end{aligned}$$

Exercice 5.5 $\mathfrak{T}$ Soit X un espace topologique. On note $\text{Ouv}(X)$ l'ensemble des ouverts de X muni de la relation d'inclusion. On voit $\text{Ouv}(X)$ comme catégorie, de la façon habituelle pour les ensembles ordonnés. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Par définition, un pré-faisceau sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$ est un foncteur de $\text{Ouv}(X)^{\text{op}}$ dans $\mathcal{C}$. Un morphisme de pré-faisceaux entre F et G est, par définition, une transformation naturelle de F vers G . Dans la suite de l'exercice, on supposera que $\mathcal{C}$ est la catégorie des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et on écrira simplement pré-faisceau sans préciser $\mathcal{C}$.

1. Soit F un pré-faisceau sur X . Par définition, F associe à chaque ouvert U de X un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel FU et à chaque inclusion $U \subseteq V$ une application linéaire $F_{U,V} : FV \rightarrow FU$. Écrire concrètement ce que signifie la functorialité de F (c'est-à-dire sa compatibilité aux morphismes identité et aux compositions).

Solution : Soit U un ouvert de X . Comme $F1_U = 1_{FU}$, on a $F_{U,U} = \text{Id}$. Soit U, V et W des ouverts avec $U \subseteq V \subseteq W$. La functorialité associée à la composition de ces inégalités est $F_{U,W} = F_{U,V} \circ F_{V,W}$.

2. Soit F et G deux pré-faisceaux sur X . Soit α un morphisme de F vers G . Par définition, α associe à chaque ouvert U de X une application linéaire de FU dans GU . Écrire concrètement ce que signifie la naturalité de α (c'est-à-dire sa compatibilité avec les morphismes dans $\text{Ouv}(X)$).

Solution : Soit U et V des ouverts de X avec $U \subseteq V$. La compatibilité de α avec ces inclusions est l'égalité $\alpha_U \circ F_{U,V} = G_{U,V} \circ \alpha_V$.

$$\begin{array}{ccc} FV & \xrightarrow{\alpha_V} & GV \\ F_{U,V} \downarrow & & \downarrow G_{U,V} \\ FU & \xrightarrow{\alpha_U} & GU \end{array}$$

3. À chaque ouvert U de X , on associe l'espace vectoriel $C(U)$ des fonctions continues de U dans $\mathbb{R}$. À toute inclusion $U \subseteq V$, on associe la fonction de restriction à U . Montrer que C est un pré-faisceau sur X .

Solution : D'après la première question, il s'agit d'observer que la restriction d'une fonction continue sur U à U lui-même est la même fonction et que, pour tous ouverts $U \subseteq V \subseteq W$, restreindre une fonction de W à V puis à U est la même chose que restreindre cette fonction à U directement.

4. Soit x un point de X et E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Le faisceau gratte-ciel en x de fibre E est le faisceau E_x qui à U associe E si x est dans U et l'espace vectoriel trivial sinon. À toute inclusion $U \subseteq V$ il associe l'identité de E si x est dans U et l'application linéaire nulle sinon. Montrer qu'il s'agit bien d'un pré-faisceau sur X . Montrer que l'évaluation en x fournit un morphisme de C vers $\mathbb{R}_x$.

Solution : Montrons que E_x est un faisceau. Soit U un ouvert. On doit montrer que $(E_x)_{U,U} = \text{Id}_{E_x(U)}$. C'est vrai par définition si x est dans U . Sinon c'est également vrai car l'application linéaire nulle coïncide avec l'identité pour les espaces vectoriels nuls. Soit $U \subseteq V \subseteq W$ des ouverts. On veut montrer que $F_{U,W} = F_{U,V} \circ F_{V,W}$. Si x est dans U alors il est dans les trois ouverts et les trois applications linéaires intervenant sont l'identité de E , donc c'est bon. Sinon l'égalité à démontrer est une égalité entre deux applications linéaires arrivant dans un espace vectoriel nul. Donc ces applications sont nulles et donc égales.

Montrons maintenant que l'évaluation en x est un morphisme de C dans $\mathbb{R}_x$. Soit $U \subseteq V$ des ouverts. On doit montrer que $ev_U \circ C_{U,V} = (\mathbb{R}_x)_{U,V} \circ ev_V$. Si x est dans U alors il est également dans V et $(\mathbb{R}_x)_{U,V} = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, et l'égalité à montrer affirme que l'évaluation en x d'une fonction continue sur V coïncide avec celle de sa restriction à U , ce qui est vrai. Si x n'est pas dans U , on obtient de nouveau une égalité entre applications linéaires dont l'espace d'arrivée est nul.

Exercice 5.6  Soit A un groupe abélien. Le sous-groupe de torsion de A est

$$TA := \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, nx = 0\}.$$

La partie libre de A est le groupe $FA := A/TA$. Si A est de type fini, on peut montrer que A est isomorphe à $FA \oplus TA$. Le but de cet exercice est de montrer qu'un tel isomorphisme ne saurait être naturel.

1. Étendre T en foncteur des groupes abéliens vers les groupes abéliens. Plus précisément, pour chaque morphisme de groupes abéliens $f : A \rightarrow B$, montrer qu'il existe un unique morphisme $Tf : TA \rightarrow TB$ qui fasse commuter

$$\begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{Tf} & TB \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

où les applications verticales sont les inclusions.

Solution : Il s'agit de montrer que tout morphisme de A dans B envoie TA dans TB . Soit x dans TA . Par définition on obtient n non nul tel que $nx = 0$. On a $nf(x) = f(nx) = 0$ donc $f(x)$ est bien dans TB .

2. Étendre F en foncteur des groupes abéliens vers les groupes abéliens. Plus précisément, pour chaque morphisme de groupe abéliens $f : A \rightarrow B$, montrer qu'il existe un unique morphisme $Ff : FA \rightarrow FB$ qui fasse commuter

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \pi_A \downarrow & & \downarrow \pi_B \\ FA & \xrightarrow{Ff} & FB \end{array}$$

où les applications verticales sont les projections sur les quotients. Montrer que les π_A forment une transformation naturelle $\pi : \text{Id}_{\text{Ab}} \Rightarrow F$.

Solution : Pour montrer que f descend en morphisme de FA dans FB , il suffit de montrer qu'il envoie TA dans TB . C'est assuré par la question précédente.

Montrons qu'on obtient bien une transformation naturelle. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de groupe. On doit vérifier la commutativité de :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi_A} & FA \\ f \downarrow & & \downarrow Ff \\ B & \xrightarrow{\pi_B} & FB \end{array}$$

C'est exactement le fait que Ff est obtenu en descendant f , même si le diagramme est dessiné de façon inhabituelle.

3. On note $F \oplus T$ le foncteur qui envoie A sur $FA \oplus TA$ et $f : A \rightarrow B$ vers $Ff \times Tf$. Pour chaque A , on note ι_A l'inclusion de FA dans $FA \oplus TA$. Montrer que ce sont les composantes d'une transformation naturelle $\iota : F \Rightarrow F \oplus T$.

Solution : Soit A et B des groupes abéliens et f un morphisme de A dans B . On doit montrer la commutativité de :

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\iota_A} & FA \oplus TA \\ Ff \downarrow & & \downarrow Ff \oplus Tf \\ FB & \xrightarrow{\iota_B} & FB \oplus TB \end{array}$$

qui est évidente.

On restreint $F \oplus T$ en foncteur de la catégorie Ab_f des groupes abéliens de type fini dans elle-même. Le cours d'algèbre assure que, pour tout A abélien de type fini, A est isomorphe à $FA \oplus TA$. Le but est de montrer que ces isomorphismes ne sont pas naturels : il n'existe pas d'isomorphisme naturel de Id_{Ab_f} vers $F \oplus T$. Supposons qu'il existe un tel isomorphisme α . La notion de composition de transformations naturelles de l'exercice 5.2 permet de construire $\alpha^{-1} \circ \iota \circ \pi : \text{Id}_{\text{Ab}_f} \Rightarrow \text{Id}_{\text{Ab}_f}$.

1. Soit $\beta : \text{Id}_{\text{Ab}_f} \Rightarrow \text{Id}_{\text{Ab}_f}$. Montrer que, pour tout A , $\beta_A = (x \mapsto \beta_{\mathbb{Z}}(1)x)$.

Solution : Soit A un groupe abélien et x un de ses éléments. Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow A$ l'unique morphisme de groupe qui envoie 1 sur x (l'existence et l'unicité de ce morphisme peut être exprimée en disant que $\mathbb{Z}$ est un groupe abélien libre engendré par 1). La naturalité de β assure que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\beta_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{\beta_A} & A \end{array}$$

On obtient ainsi $f(\beta_{\mathbb{Z}}(1)) = \beta_A(f(1))$, c'est-à-dire $\beta_{\mathbb{Z}}(1)f(1) = \beta_A(x)$ ou encore $\beta_{\mathbb{Z}}(1)x = \beta_A(x)$, comme annoncé.

2. On note $\beta = \alpha^{-1} \circ \iota \circ \pi$. Montrer que $\beta_{\mathbb{Z}}(1) \in \{-1, 1\}$, puis montrer que $\beta_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = 0$ et conclure.

Solution : Comme $T\mathbb{Z} = 0$, $\pi_{\mathbb{Z}}$ et $\iota_{\mathbb{Z}}$ sont des isomorphismes. Comme $\alpha_{\mathbb{Z}}$ est également un isomorphisme par hypothèse, on obtient que $\beta_{\mathbb{Z}}$ est un automorphisme de $\mathbb{Z}$. Il doit donc envoyer le générateur 1 sur un générateur, c'est-à-dire 1 ou -1 .

Par ailleurs $T(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donc $F(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ et π est le morphisme nul, donc $\beta_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ aussi. Or la question précédente assure que $\beta_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = (x \mapsto \beta_{\mathbb{Z}}(1)x)$ donc on a une contradiction et α n'existe pas.

Exercice 5.7 $\Leftrightarrow$ Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, I un ensemble et X une famille d'objets de $\mathcal{C}$ indexée par I .

1. Soit (P, p) un produit de X dans $\mathcal{C}$. Par définition des produits, on obtient, pour chaque objet Z de $\mathcal{C}$, une bijection

$$\Theta_Z : f \mapsto (i \mapsto p_i \circ f)$$

de $\text{Hom}(Z, P)$ vers $\prod_i \text{Hom}(Z, X_i)$. Montrer que les Θ_Z sont les composantes d'un isomorphisme naturel entre $\text{Hom}(-, P)$ et $\prod_i \text{Hom}(-, X_i)$ de $\mathcal{C}^{\text{op}}$ dans Ens (la définition du foncteur $\prod_i \text{Hom}(-, X_i)$ est analogue à celle de $\text{Hom}(-, P)$ déjà discutée, en travaillant composante par composante du produit). Calculer $\Theta_P(1_P)$.

Solution : On sait que les Θ_Z sont bijectives donc il s'agit seulement de vérifier la condition de naturalité: pour tout morphisme $g : Z \rightarrow Y$ dans $\mathcal{C}$ (vu comme morphisme de Y dans Z dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$), le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(Y, P) & \xrightarrow{\Theta_Y} & \prod_i \text{Hom}(Y, X_i) \\ - \circ g \downarrow & & \downarrow \prod_i (- \circ g) \\ \text{Hom}(Z, P) & \xrightarrow{\Theta_Z} & \prod_i \text{Hom}(Z, X_i) \end{array}$$

Cette commutation est immédiate par définition de Θ et associativité de la composition dans $\mathcal{C}$. Par définition $\Theta_P(1_P) = (i \mapsto p_i \circ 1_P)$ donc $\Theta_P(1_P) = p$ (ce calcul trivial est une indication pour la question suivante).

2. Réciproquement, on suppose donné un objet P de $\mathcal{C}$ et un isomorphisme naturel Θ entre $\text{Hom}(-, P)$ et $\prod_i \text{Hom}(-, X_i)$. Montrer qu'il existe une unique famille de morphismes $p \in \prod_i \text{Hom}(P, X_i)$ telle que (P, p) est un produit de X pour lequel Θ est bien l'isomorphisme naturel de la première question.

Solution : La seconde partie de la première question assure déjà l'unicité: on a nécessairement $p = \Theta_P(1_P)$. Montrons maintenant l'existence, à savoir que $p := \Theta_P(1_P)$ convient toujours. Soit Z un objet de $\mathcal{C}$ et $\varphi \in \prod_i \text{Hom}(Z, X_i)$. Montrons qu'il existe un unique morphisme $\Phi : Z \rightarrow P$ tel que, pour tout i , $p_i \circ \Phi = \varphi_i$. La naturalité de Θ (exprimée par le diagramme dans la correction de la première question) appliquée à $Y = P$ et $g = \Phi$ puis évaluée en 1_P assure que, pour toute application $\Phi : Z \rightarrow P$, on a $(i \mapsto p_i \circ \Phi) = \Theta_Z(1_P \circ \Phi)$. Ainsi la condition $(i \mapsto p_i \circ \Phi) = \varphi$ est équivalente à $\varphi = \Theta_Z(\Phi)$. Comme Θ_Z est bijective, il existe une unique solution Φ , comme voulu.