

7 Foncteurs et transformations naturelles

Exercice 5.1 $\mathfrak{T}$ Soit n un entier strictement positif. Montrer qu'on peut définir un foncteur GL_n des anneaux commutatifs vers les groupes en envoyant tout anneau A sur le groupe $\mathrm{GL}_n(A)$ et tout morphisme $f : A \rightarrow B$ vers la fonction $\mathrm{GL}_n(f)$ qui applique f à tous les coefficients d'une matrice.

Exercice 5.2 $\square$ Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories, F, G et H des foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$. Soit $\alpha : F \Rightarrow G$ et $\beta : G \Rightarrow H$. À chaque objet X de $\mathcal{C}$, on associe le morphisme $\beta_X \circ \alpha_X : FX \rightarrow HX$. Montrer que ces morphismes forment une transformation naturelle de F vers H .

Exercice 5.3 $\mathfrak{H}$ On veut exprimer (et démontrer) le fait que les deux seules façons naturelles de produire, pour tout ensemble X , une partie de X à partir de tout élément de X sont l'application envoyant tout élément sur l'ensemble vide et l'application singleton $x \mapsto \{x\}$.

1. Montrer que la famille de fonctions $v_X : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ qui associe à tout ensemble X la fonction $v_X : x \mapsto \emptyset$ est une transformation naturelle de $\mathrm{Id}_{\mathrm{Ens}}$ vers $\mathcal{P}$ (ici, on n'utilise pas la relation d'inclusion, on voit $\mathcal{P}$ comme un foncteur de Ens vers Ens).
2. Montrer que la famille de fonctions $s_X : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ qui associe à tout ensemble X la fonction $s_X : x \mapsto \{x\}$ est une transformation naturelle de $\mathrm{Id}_{\mathrm{Ens}}$ vers $\mathcal{P}$.
3. Montrer qu'il s'agit des deux seules transformations naturelles entre ces foncteurs (on pourra appliquer la condition de naturalité aux fonctions d'inclusion de singletons dans des ensembles).

Exercice 5.4 $\square$ Soit K un corps. On lit parfois que, en l'absence de structure supplémentaire sur un K -espace vectoriel V , il n'y a pas de moyen d'envoyer V dans son dual, mais qu'on peut l'envoyer naturellement dans son bidual V^{**} . Le but de cet exercice est de montrer que cette discussion entre bien dans le cadre des transformations naturelles. On note Ev_K la catégories des K -espaces vectoriels (les morphismes étant les fonctions K -linéaires).

1. Montrer qu'on obtient bien un foncteur $(\cdot)^* : \mathrm{Ev}_K \rightarrow \mathrm{Ev}_K^{\mathrm{op}}$ en envoyant tout K -ev V sur $L(V, K)$ et toute application K -linéaire $\varphi : V \rightarrow W$ sur sa transposée $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$ définie par $\lambda \mapsto \lambda \circ \varphi$.
2. On note $(\cdot)^{**} : \mathrm{Ev}_K \rightarrow \mathrm{Ev}_K$ le foncteur obtenu en composant $(\cdot)^*$ avec lui-même (en utilisant que, pour toute catégorie $\mathcal{C}$, $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$). À chaque espace vectoriel V , on associe l'application linéaire $\mathrm{ev}_V : V \rightarrow V^{**}$ qui envoie x sur $\lambda \mapsto \lambda(x)$. Montrer que ces applications sont les composantes d'une transformation naturelle $\mathrm{ev} : \mathrm{Id}_{\mathrm{Ev}_K} \Rightarrow (\cdot)^{**}$.

Exercice 5.5 $\mathfrak{T}$ Soit X un espace topologique. On note $\mathrm{Ouv}(X)$ l'ensemble des ouverts de X muni de la relation d'inclusion. On voit $\mathrm{Ouv}(X)$ comme catégorie, de la façon habituelle pour les ensembles ordonnés. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Par définition, un pré-faisceau sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$ est un foncteur de $\mathrm{Ouv}(X)^{\mathrm{op}}$ dans $\mathcal{C}$. Un morphisme de pré-faisceaux entre F et G est, par définition, une transformation naturelle de F vers G . Dans la suite de l'exercice, on supposera que $\mathcal{C}$ est la catégorie des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et on écrira simplement pré-faisceau sans préciser $\mathcal{C}$.

1. Soit F un pré-faisceau sur X . Par définition, F associe à chaque ouvert U de X un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel FU et à chaque inclusion $U \subseteq V$ une application linéaire $F_{U,V} : FV \rightarrow FU$. Écrire concrètement ce que signifie la fonctorialité de F (c'est-à-dire sa compatibilité aux morphismes identité et aux compositions).
2. Soit F et G deux pré-faisceaux sur X . Soit α un morphisme de F vers G . Par définition, α associe à chaque ouvert U de X une application linéaire de FU dans GU . Écrire concrètement ce que signifie la naturalité de α (c'est-à-dire sa compatibilité avec les morphismes dans $\text{Ouv}(X)$).
3. À chaque ouvert U de X , on associe l'espace vectoriel $C(U)$ des fonctions continues de U dans $\mathbb{R}$. À toute inclusion $U \subseteq V$, on associe la fonction de restriction à U . Montrer que C est un pré-faisceau sur X .
4. Soit x un point de X et E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Le faisceau gratte-ciel en x de fibre E est le faisceau E_x qui à U associe E si x est dans U et l'espace vectoriel trivial sinon. À toute inclusion $U \subseteq V$ il associe l'identité de E si x est dans U et l'application linéaire nulle sinon. Montrer qu'il s'agit bien d'un pré-faisceau sur X . Montrer que l'évaluation en x fournit un morphisme de C vers $\mathbb{R}_x$.

Exercice 5.6 ☞ Soit A un groupe abélien. Le sous-groupe de torsion de A est

$$TA := \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, nx = 0\}.$$

La partie libre de A est le groupe $FA := A/TA$. Si A est de type fini, on peut montrer que A est isomorphe à $FA \oplus TA$. Le but de cet exercice est de montrer qu'un tel isomorphisme ne saurait être naturel.

1. Étendre T en foncteur des groupes abéliens vers les groupes abéliens. Plus précisément, pour chaque morphisme de groupes abéliens $f : A \rightarrow B$, montrer qu'il existe un unique morphisme $Tf : TA \rightarrow TB$ qui fasse commuter

$$\begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{Tf} & TB \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

où les applications verticales sont les inclusions.

2. Étendre F en foncteur des groupes abéliens vers les groupes abéliens. Plus précisément, pour chaque morphisme de groupe abéliens $f : A \rightarrow B$, montrer qu'il existe un unique morphisme $Ff : FA \rightarrow FB$ qui fasse commuter

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \pi_A \downarrow & & \downarrow \pi_B \\ FA & \xrightarrow{Ff} & FB \end{array}$$

où les applications verticales sont les projections sur les quotients. Montrer que les π_A forment une transformation naturelle $\pi : \text{Id}_{\text{Ab}} \Rightarrow F$.

3. On note $F \oplus T$ le foncteur qui envoie A sur $FA \oplus TA$ et $f : A \rightarrow B$ vers $Ff \times Tf$. Pour chaque A , on note ι_A l'inclusion de FA dans $FA \oplus TA$. Montrer que ce sont les composantes d'une transformation naturelle $\iota : F \Rightarrow F \oplus T$.

On restreint $F \oplus T$ en foncteur de la catégorie Ab_f des groupes abéliens de type fini dans elle-même. Le cours d'algèbre assure que, pour tout A abélien de type fini, A est isomorphe à $FA \oplus TA$. Le but est de montrer que ces isomorphismes ne sont pas naturels : il n'existe pas d'isomorphisme naturel de Id_{Ab_f} vers $F \oplus T$. Supposons qu'il existe un tel isomorphisme α . La notion de composition de transformations naturelles de l'exercice 5.2 permet de construire $\alpha^{-1} \circ \iota \circ \pi : \text{Id}_{\text{Ab}_f} \Rightarrow \text{Id}_{\text{Ab}_f}$.

1. Soit $\beta : \text{Id}_{\text{Ab}_f} \Rightarrow \text{Id}_{\text{Ab}_f}$. Montrer que, pour tout A , $\beta_A = (x \mapsto \beta_{\mathbb{Z}}(1)x)$.
2. On note $\beta = \alpha^{-1} \circ \iota \circ \pi$. Montrer que $\beta_{\mathbb{Z}}(1) \in \{-1, 1\}$, puis montrer que $\beta_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = 0$ et conclure.

Exercice 5.7 $\mathbb{H}$ Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, I un ensemble et X une famille d'objets de $\mathcal{C}$ indexée par I .

1. Soit (P, p) un produit de X dans $\mathcal{C}$. Par définition des produits, on obtient, pour chaque objet Z de $\mathcal{C}$, une bijection

$$\Theta_Z : f \mapsto (i \mapsto p_i \circ f)$$

de $\text{Hom}(Z, P)$ vers $\prod_i \text{Hom}(Z, X_i)$. Montrer que les Θ_Z sont les composantes d'un isomorphisme naturel entre $\text{Hom}(-, P)$ et $\prod_i \text{Hom}(-, X_i)$ de $\mathcal{C}^{\text{op}}$ dans Ens (la définition du foncteur $\prod_i \text{Hom}(-, X_i)$ est analogue à celle de $\text{Hom}(-, P)$ déjà discutée, en travaillant composante par composante du produit). Calculer $\Theta_P(1_P)$.

2. Réciproquement, on suppose donné un objet P de $\mathcal{C}$ et un isomorphisme naturel Θ entre $\text{Hom}(-, P)$ et $\prod_i \text{Hom}(-, X_i)$. Montrer qu'il existe une unique famille de morphismes $p \in \prod_i \text{Hom}(P, X_i)$ telle que (P, p) est un produit de X pour lequel Θ est bien l'isomorphisme naturel de la première question.