

8 Adjonctions entre foncteurs

Exercice 5.8 $\square$ Nous avons démontré que l'unité d'une adjonction est une transformation naturelle. Montrer directement que la co-unité l'est également (sans se ramener au cas de l'unité en passant aux catégories opposées).

Solution : Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories, $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs tels que L est adjoint à gauche de R . Ainsi, on a, pour chaque objet X de $\mathcal{C}$ et Y de $\mathcal{D}$, une bijection $\varphi_{X,Y}$ et ces bijections sont compatibles avec les morphismes de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Par définition, la co-unité de cette adjonction est une transformation naturelle de $L \circ R$ vers $\text{Id}_{\mathcal{D}}$ dont la composante en tout objet Y est $\varphi_{RY,Y}^{-1}(1_Y)$.

Montrons la compatibilité avec les morphismes de $\mathcal{D}$. Soit Y et Y' des objets de $\mathcal{D}$ et $g : Y \rightarrow Y'$. On doit montrer la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} LRY & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & Y \\ LRg \downarrow & & \downarrow g \\ LRY' & \xrightarrow{\varepsilon_{Y'}} & Y' \end{array}$$

La compatibilité de l'adjonction aux morphismes dans $\mathcal{D}$, appliquée à g et aux morphismes dans $\mathcal{C}$ appliquée à Rg donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & \varphi_{RY,Y}^{-1} & & & \\ \text{Hom}(LRY, Y) & \xleftarrow{\quad} & \text{Hom}(RY, RY) & & \\ \downarrow g \circ - & & \downarrow Rg \circ - & & \swarrow 1_{RY} \\ \text{Hom}(LRY, Y') & \xleftarrow{\varphi_{RY,Y'}^{-1}} & \text{Hom}(RY, RY') & & \{\star\} \\ \uparrow - \circ LRg & & \uparrow - \circ Rg & & \searrow 1_{RY'} \\ \text{Hom}(LRY', Y') & \xleftarrow{\varphi_{RY',Y'}^{-1}} & \text{Hom}(RY', RY') & & \end{array}$$

Le quadrilatère à droite ayant deux côtés courbes commute, car les identités sont neutres pour la composition. Donc tout le diagramme commute. Les deux chemins de $\{\star\}$ à $\text{Hom}(LRY, Y')$ calculent $g \circ \varepsilon_Y$ et $\varepsilon_{Y'} \circ Rg$ qui sont donc égaux comme annoncé.

Algébriquement, il s'agit du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
g \circ \varepsilon_Y &= g \circ [\varphi_{RY,Y}^{-1}(1_Y)] \\
&= [(g \circ -) \circ \varphi_{RY,Y}^{-1}](1_Y) \\
&= [\varphi_{RY,Y'}^{-1} \circ (Rg \circ -)](1_Y) \\
&= \varphi_{RY,Y'}^{-1}(Rg \circ 1_Y) \\
&= \varphi_{RY,Y'}^{-1}(1_{RY'} \circ Rg) \\
&= [\varphi_{RY,Y'}^{-1} \circ (- \circ Rg)](1_{RY'}) \\
&= [(- \circ LRg) \circ \varphi_{RY',Y'}^{-1}](1_{RY'}) \\
&= [\varphi_{RY',Y'}^{-1}(1_{RY'})] \circ LRg \\
&= \varepsilon_{Y'} \circ LRg
\end{aligned}$$

Exercice 5.9 $\square$ En s'inspirant de la démonstration de la propriété universelle de l'unité d'une adjonction $L \dashv R$, montrer la propriété universelle de la co-unité (sans se ramener au cas de l'unité en passant aux catégories opposées).

Solution : Soit $f : LX \rightarrow Y$. La compatibilité de l'adjonction avec les morphismes dans $\mathcal{C}$ appliquée à un morphisme $g : X \rightarrow RY$ donne la commutativité du carré dans le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc}
& & \varphi_{X,Y}^{-1} & & \\
& & \longleftarrow & & \\
\text{Hom}(LX, Y) & \xleftarrow{\quad} & \text{Hom}(X, RY) & \xleftarrow{\quad} & \{ \star \} \\
\uparrow - \circ Lg & & \uparrow - \circ g & & \uparrow \\
& & \varphi_{RY,Y}^{-1} & & \\
\text{Hom}(LRY, Y) & \xleftarrow{\quad} & \text{Hom}(RY, RY) & \xleftarrow{\quad} & \{ \star \} \\
& & & & 1_{RY}
\end{array}$$

et le triangle à droite commute, car 1_{RY} est neutre pour la composition. Ainsi le diagramme complet commute. Les deux chemins de $\star$ à $\text{Hom}(LX, Y)$ calculent $\varepsilon_Y \circ (Lg)$ et $\varphi_{X,Y}^{-1}(g)$ respectivement donc g convient si et seulement si $g = \varphi_{X,Y}(f)$.

Exercice 5.10 $\square$ Soit X et Y des treillis complets et $r : Y \rightarrow X$ une fonction croissante. Le théorème 37 et le théorème 216 donnent tous deux une condition nécessaire et suffisante pour que r admette un adjoint à gauche puisque les adjonctions entre ensembles ordonnés sont des cas particuliers d'adjonctions entre foncteurs (le théorème 37 ne fait pas l'hypothèse que r est croissante mais cela découle directement de l'hypothèse). Le but de cet exercice est de comparer ces deux critères.

1. Soit $x \in X$, montrer que la catégorie $x \downarrow r$ du théorème 216 est $\{y \mid x \leq r(y)\}$ muni de la relation d'ordre induite par Y .

Solution : Par définition, les objets de $x \downarrow r$ sont les paires (y, f) où y est un objet de Y , c'est-à-dire un élément de Y et f est un morphisme de x vers $r(y)$ dans X , c'est-à-dire une inégalité $x \leq r(y)$. Les morphismes de (y, f) vers (y', f') sont les morphismes de y vers z c'est-à-dire les inégalités $y \leq y'$. La relation de commutation de la définition générale est

automatique, comme toujours avec les ensembles ordonnés vus comme catégories puisqu'il y a au plus un morphisme entre deux objets.

2. Montrer que le théorème 216 assure que r admet un adjoint à gauche si et seulement si

$$\forall x \in X, \{y \mid x \leq r(y)\} \text{ admet un minimum}$$

ou encore

$$\forall x \in X, x \leq r(\inf\{y \mid x \leq r(y)\}).$$

Solution : La condition du théorème est $\forall x, x \downarrow r$ admet un objet initial. Or dans un ensemble ordonné un objet initial est un minimum donc la première condition est claire. Pour passer à la deuxième condition, on utilise que Y est un treillis complet donc chaque $x \downarrow r$ admet un inf dans Y et demander l'existence d'un minimum est équivalent à ce que cet inf soit dans l'ensemble $x \downarrow r$.

3. Montrer directement (sans utiliser les théorèmes) que la condition de la question précédente est équivalente à la condition du théorème 37 : r commute aux infs.

Solution : Supposons la condition $\forall x \in X, x \leq r(\inf\{y \mid x \leq r(y)\})$. Montrons que r commute aux infs. Soit S une partie de Y . On sait que $r(\inf(S)) \leq \inf r_* S$ car r est croissante. Montrons que $\inf r_* S \leq r(\inf(S))$. On calcule

$$\begin{aligned} \inf r_* S &\leq r(\inf\{y \mid \inf r_* S \leq r(y)\}) \text{ par hypothèse} \\ &\leq r(\inf S) \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité vient de la croissance de r et de la décroissance de $\inf$ car $S \subseteq \{y \mid \inf r_* S \leq r(y)\}$.

Réciproquement, supposons que r commute aux infs. Soit $x \in X$. Montrons que $x \leq r(\inf\{y \mid x \leq r(y)\})$. Comme r commute aux infs, cela équivaut à $x \leq \inf r_* \{y \mid x \leq r(y)\}$. Par définition de $\inf$, il suffit de montrer que $\forall x' \in r_* \{y \mid x \leq r(y)\}, x \leq x'$, ce qui est clair.

Le fait que l'équivalence des conditions obtenues ne soient pas si évidente était attendu car le théorème général n'a absolument pas d'analogue de la condition de treillis complet qui apparaît dans le théorème sur les ensembles ordonnés. Il existe des énoncés généraux ayant des conditions analogues mais ils requièrent les notions de limites et colimites dans une catégorie qui sont au-delà du contenu de ce cours. Ces énoncés sont connus sous le nom de théorème du foncteur adjoint.

Exercice 5.11 ☞ Le but de cet exercice est de construire un adjoint à gauche au foncteur d'inclusion de la catégorie des espaces métriques complets dans celle de tous les espaces métriques. Dans ces deux catégories, les morphismes sont les applications uniformément continues. *Attention :* il s'agit d'un exercice très long et sa solution ne sera pas utilisée dans la suite du cours.

Soit X un espace métrique. On note $C(X)$ l'ensemble des suites de Cauchy d'éléments de X .

1. Pour deux éléments u et v de $C(X)$, montrer que la suite de réels $n \mapsto d(u_n, v_n)$ converge. On note $d_C(u, v)$ la limite de cette suite.

Solution : Pour montrer la convergence, la complétude de $\mathbb{R}$ assure qu'il suffit de montrer que $n \mapsto d(u_n, v_n)$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Comme u est de Cauchy, pour n et p assez grands $d(u_n, u_p) < \varepsilon/2$. Comme v est de Cauchy, pour n et p assez grands $d(v_n, v_p) < \varepsilon/2$. Ainsi, pour n et p assez grands,

$$\begin{aligned} |d(u_n, v_n) - d(u_p, v_p)| &\leq |d(u_n, v_n) - d(u_p, v_n)| + |d(u_p, v_n) - d(u_p, v_p)| \\ &\leq d(u_n, u_p) + d(v_n, v_p) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité triangulaire puis deux fois l'inégalité triangulaire inverse.

2. On dit que deux éléments u et v de $C(X)$ sont équivalents si la suite de réels $n \mapsto d(u_n, v_n)$ tend vers zéro. Montrer qu'il s'agit effectivement d'une relation d'équivalence. On note $\hat{X}$ « le » quotient de $C(X)$ par cette relation.

Solution : La relation est réflexive car, pour toute suite de Cauchy u , la suite $n \mapsto d(u_n, u_n)$ est nulle donc de Cauchy.

La relation est symétrique car d est symétrique donc, pour toutes suites de Cauchy u et v , $n \mapsto d(v_n, u_n)$ tend vers zéro si $n \mapsto d(u_n, v_n)$ tend vers zéro.

Montrons la transitivité. Soit u, v et w des suites de Cauchy telles que $n \mapsto d(u_n, v_n)$ et $n \mapsto d(v_n, w_n)$ tendent vers zéro. Comme, pour chaque n , $0 \leq d(u_n, w_n) \leq d(u_n, v_n) + d(v_n, w_n)$, on a bien $n \mapsto d(u_n, w_n)$ qui tend vers zéro par le théorème des gendarmes.

3. Montrer que la fonction d_C de la première question descend au quotient en fonction $\hat{d}$ sur $\hat{X} \times \hat{X}$.

Solution : Soit u, u', v et v' des suites de Cauchy. Supposons que u et u' sont équivalentes et que v et v' sont équivalentes. Montrons que $d_C(u, v) = d_C(u', v')$. Vu la symétrie de la situation, il suffit de montrer que $d_C(u, v) \leq d_C(u', v')$.

Par définition, $d_C(u, v)$ est la limite de $n \mapsto d(u_n, v_n)$ et $d_C(u', v')$ est celle de $n \mapsto d(u'_n, v'_n)$. Or $d(u_n, v_n) \leq d(u_n, u'_n) + d(u'_n, v'_n) + d(v'_n, v_n)$ par inégalité triangulaire. En passant à la limite on obtient $d_C(u, v) \leq 0 + d_C(u', v') + 0 = d_C(u', v')$.

4. Montrer que $(\hat{X}, \hat{d})$ est un espace métrique.

Solution : Notons π la projection de $C(X)$ sur $\hat{X}$. Soit $z \in \hat{X}$. Montrons que $\hat{d}(z, z) = 0$. Comme π est surjective, on obtient une suite de Cauchy u telle que $z = \pi(u)$. La suite $n \mapsto d(u_n, u_n)$ est nulle donc tend vers zéro donc $\hat{d}(z, z) = 0$.

Soit y et z deux éléments distincts de $\hat{X}$. Montrons que $\hat{d}(y, z) > 0$. Comme π est surjective, on obtient des suites de Cauchy u et v telles que $y = \pi(u)$ et $z = \pi(v)$. Comme $y \neq z$, u et v ne sont pas équivalentes. Ainsi $n \mapsto d(u_n, v_n)$ ne tend pas vers zéro. Or elle tend vers $\hat{d}(y, z)$ par construction.

La symétrie de $\hat{d}$ est claire. Montrons l'inégalité triangulaire. Soit y, z et t des éléments de $\hat{X}$. Montrons que $\hat{d}(y, t) \leq \hat{d}(y, z) + \hat{d}(z, t)$. Comme π est surjective, on obtient des suites de Cauchy u, v et w telles que $y = \pi(u)$, $z = \pi(v)$ et $t = \pi(w)$. Par construction,

il suffit de montrer que $d_C(u, w) \leq d_C(u, v) + d_C(v, w)$. Or, pour chaque n , $d(u_n, w_n) \leq d(u_n, v_n) + d(v_n, w_n)$ donc on obtient l'inégalité désirée en passant à la limite.

5. On note $\iota : X \rightarrow \hat{X}$ la fonction envoyant x sur la suite constante de valeur x . Montrer que ι est uniformément continue.

Solution : Montrons l'énoncé plus fort que ι est un plongement isométrique. Soit x , et y des points de X . On a $\hat{d}(\iota(x), \iota(y)) = d_C((n \mapsto x), (n \mapsto y)) = \lim_n d(x, y) = d(x, y)$.

6. Montrer que $(\hat{X}, \hat{d})$ est complet.

Solution : Soit u une suite de Cauchy dans $\hat{X}$. Montrons que u converge. Pour chaque n , on choisit une suite de Cauchy v_n dans X telle que $u_n = \pi(v_n)$. Les termes de ces suites seront notés $v_{n,k}$.

On veut construire une suite de Cauchy w dont l'image dans le quotient $\hat{X}$ est limite de u . L'idée est essentiellement de procéder à une extraction diagonale sur la « suite double » v . L'implémentation naïve serait de poser $w = (n \mapsto v_{n,n})$ mais cela n'apporte pas assez de contrôle car les différentes suites v_n ne sont pas « uniformément de Cauchy » : pour chaque n , la suite $N \mapsto \sup\{d(v_{n,l}, v_{n,k}) ; l, k \geq N\}$ tend vers 0, mais pas à une vitesse uniforme en n .

Pour contourner ce problème, on observe que, puisque chaque v_n est de Cauchy, on peut choisir une suite d'entiers N_m telle que

$$\forall k, l \geq N_n, d(v_{n,l}, v_{n,k}) < 1/(n+1)$$

On considère la suite $w : \mathbb{N} \rightarrow X$ définie par $n \mapsto v_{n, N_n}$. On va montrer que w est de Cauchy et que u tend vers $\pi(w)$ dans $\hat{X}$.

Montrons que w est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. On doit montrer que

$$\exists N, \forall n, m \geq N, d(w_n, w_m) < \varepsilon.$$

Soit N_0 tel que $\forall n \geq N_0, 1/(n+1) < \varepsilon/3$. Puisque u est de Cauchy, on obtient N_1 tel que $\forall n, m \geq N_1, \lim_k d(v_{n,k}, v_{m,k}) < \varepsilon/3$. Montrons que $N = \max(N_0, N_1)$ convient. Soit n et m plus grands que N . En particulier ils sont plus grands que N_0 donc $1/(n+1)$ et $1/(m+1)$ sont tous deux plus petits que $\varepsilon/3$. De plus n et m sont plus grands que N_1 donc $\lim_k d(v_{n,k}, v_{m,k}) < \varepsilon/3$. On obtient donc k_0 tel que $\forall k \geq k_0, d(v_{n,k}, v_{m,k}) < \varepsilon/3$. On pose $k = \max(N_n, N_m, k_0)$. On a par inégalité triangulaire,

$$d(w_n, w_m) \leq d(w_n, v_{n,k}) + d(v_{n,k}, v_{m,k}) + d(v_{m,k}, w_m)$$

Les trois morceaux sont inférieurs à $\varepsilon/3$. Le premier car $k \geq N_n$ donc $d(w_n, v_{n,k}) \leq 1/(n+1) < \varepsilon/3$. Le deuxième car $k \geq k_0$. Le troisième car $k \geq N_m$ donc $d(w_m, v_{m,k}) \leq 1/(m+1) < \varepsilon/3$.

Montrons maintenant que u tends vers $\pi(w)$. Par définition, $d(u_n, \pi(w)) = \lim_k d(v_{n,k}, w_k)$. Or, pour tout $k \geq N_n$, $d(v_{n,k}, w_k) < 1/(n+1)$. Donc on peut passer à la limite sur k pour obtenir $d(u_n, \pi(w)) \leq 1/(n+1)$ et en déduire la limite voulue.

7. Montrer que, pour tout espace métrique complet Y et toute fonction uniformément continue de X dans Y , il existe une unique application uniformément continue $\bar{f} : \hat{X} \rightarrow Y$ telle que $\bar{f} \circ \iota = f$.

Solution : Soit Y un espace métrique complet et $f : X \rightarrow Y$ une fonction uniformément continue. On veut définir $\bar{f}$. La propriété universelle des quotients assure qu'il est équivalent de construire une fonction φ sur $C(X)$ compatible avec la relation d'équivalence. Soit u une suite de Cauchy dans X . Comme f est uniformément continue, la suite $f \circ u$ est également de Cauchy. Comme Y est supposé complet, cette suite converge. On définit $\varphi(u)$ comme étant sa limite.

Montrons que φ est effectivement compatible avec la relation d'équivalence. Soit u et v deux suites équivalentes. Montrons que $\varphi(u) = \varphi(v)$, c'est-à-dire que $f \circ u$ et $f \circ v$ ont la même limite dans Y . Il suffit pour cela de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $d(\lim(f \circ u), \lim(f \circ v)) \leq \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, on obtient $\delta > 0$ tel que, pour tous x et x' dans X , si $d(x, x') < \delta$ alors $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Comme u et v sont équivalentes, on obtient un entier N tel que, pour tous $n \geq N$, $d(u_n, v_n) < \delta$. Ainsi, pour tous $n \geq N$, $d(f(u_n), f(v_n)) < \varepsilon$. En passant à la limite, on obtient bien $d(\lim(f \circ u), \lim(f \circ v)) \leq \varepsilon$.

On obtient ainsi une application $\hat{f}$ induite par φ : pour toute suite de Cauchy u , $\hat{f}(\pi(u)) = \lim(f \circ u)$. Montrons que $\hat{f} \circ \iota = f$. Soit x un élément de X . Par construction $\iota(x) = \pi(n \mapsto x)$. On a donc $\hat{f}(\iota(x)) = \lim(n \mapsto f(x)) = f(x)$ comme espéré.

Montrons que $\hat{f}$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous s et t dans $\hat{X}$, $d(s, t) < \delta \Rightarrow d(\hat{f}(s), \hat{f}(t)) < \varepsilon$. Concrètement, il s'agit de trouver δ tel que, pour toutes suites de Cauchy u et v dans X , si $\lim_n d(u_n, v_n) < \delta$ alors $d(\lim_n f(u_n), \lim_n f(v_n)) < \varepsilon$. La continuité uniforme de f fournit δ tel que, pour tous x et x' dans X , si $d(x, x') < \delta$ alors $d(f(x), f(x')) < \varepsilon/3$. Montrons que ce δ convient. Soit u et v des suites de Cauchy dans X telles que $\lim_n d(u_n, v_n) < \delta$. On a, pour tout k ,

$$d\left(\lim_n f(u_n), \lim_n f(v_n)\right) \leq d\left(\lim_n f(u_n), f(u_k)\right) + d(f(u_k), f(v_k)) + d\left(f(u_k), \lim_n f(v_n)\right).$$

Pour k assez grand, $d(u_k, v_k) < \delta$ par hypothèse sur u et v et donc le morceau du milieu est inférieur à $\varepsilon/3$ par construction de δ . Les deux autres morceaux sont également inférieurs à $\varepsilon/3$ pour k assez grand par définition des limites.

Il reste à montrer que $\bar{f}$ est unique. Pour cela, il suffit de montrer que l'image de ι est dense dans $\hat{X}$. En effet $\bar{f}$ est spécifiée sur cette image par la contrainte $\bar{f} \circ \iota = f$ et $\bar{f}$ est uniformément continue donc continue. Soit $z \in \hat{X}$. Montrons que z est limite de points de l'image de ι . Par construction de $\hat{X}$, on obtient une suite de Cauchy u dans X telle que $z = \pi(u)$. Montrons que z est la limite de la suite $n \mapsto \iota(u_n)$ dans $\hat{X}$. Par construction, $d(\iota(u_n), z) = \lim_k d(u_n, u_k)$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme u est de Cauchy, on obtient N tel que $\forall n, k \geq N$, $d(u_n, u_k) < \varepsilon/2$. Montrons que ce N convient, c'est à dire $\forall n \geq N$, $d(\iota(u_n), z) < \varepsilon$. Soit $n \geq N$. On sait que $\forall k \geq N$, $d(u_n, u_k) < \varepsilon/2$. On fait tendre k vers l'infini pour obtenir $\lim_k d(u_n, u_k) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, comme annoncé.

8. Conclure et décrire l'unité et la co-unité de l'adjonction obtenue. Montrer que la co-unité est un isomorphisme naturel.

Solution : Le critère d'existence d'adjoint à gauche du cours fournit un adjoint à gauche de l'inclusion qui envoie X sur $\hat{X}$ et ayant pour composantes de l'unité η les applications $\iota : X \rightarrow \hat{X}$. En effet, notons $\mathcal{M}$ la catégorie des espaces métriques et $\mathcal{C}$ celles des espaces métriques complets (avec les fonctions uniformément continues comme morphismes dans les deux cas). Notons U le foncteur d'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{M}$. Pour tout espace métrique X , notons $\mathcal{C}_X$ la catégorie dont les objets sont des paires (Y, f) où Y est un espace métrique complet et $f : X \rightarrow Y$ une fonction uniformément continue (f est donc un morphisme de X vers UY dans $\mathcal{M}$). Les morphismes dans $\mathcal{C}_X$ entre (Y, f) et (Z, g) sont les applications uniformément continues h de Y dans Z telles que $g = h \circ f$ (autrement dit h est un morphisme de Y vers Z dans $\mathcal{C}$ tel que $g = Uh \circ f$). Le critère du cours assure qu'il existe un adjoint à gauche de U si (et seulement si) toutes les catégories $\mathcal{C}_X$ admettent un objet initial. De plus si on choisit un tel objet (F_X, ι_X) pour chaque X alors $X \mapsto F_X$ s'étend en foncteur adjoint à gauche de U et les ι_X forment les composantes de l'unité de $F \dashv U$.

La paire $(\hat{X}, \iota)$ construite dans les questions précédentes est bien un objet initial dans $\mathcal{C}_X$. Les questions 4 et 6 montrent que $\hat{X}$ est un objet de $\mathcal{C}$. La question 5 montre que ι est un morphisme de X vers $U\hat{X}$ dans $\mathcal{M}$. Ainsi $(\hat{X}, \iota)$ est bien un objet de $\mathcal{C}_X$. La question 7 assure que cet objet est initial. En effet, cette question considère (Y, f) dans $\mathcal{C}_X$ et construit un unique morphisme $\bar{f}$ de $(\hat{X}, \iota)$ vers (Y, f) puisque $U\bar{f} \circ \iota = f$.

On obtient ainsi une adjonction $F \dashv U$ telle que, pour tout espace métrique, $FX = \hat{X}$, $\eta_X = \iota$ (le ι correspondant à X) et, pour tout Y complet, la bijection $\varphi_{X,Y} : \text{Hom}(\hat{X}, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, UY)$ envoie g sur $g \circ \iota$ et son inverse envoie f sur le $\bar{f}$ de la question 7.

Il reste à comprendre la co-unité ε . Par définition, il s'agit d'une transformation naturelle dont la composante ε_Y en un espace métrique complet Y est $\varphi_{UY,Y}^{-1}(1_{UY})$, c'est-à-dire l'extension $\overline{\text{Id}_Y}$ à $\hat{Y}$ de l'identité de Y . Plus précisément, il s'agit de $\overline{\text{Id}_Y}$ vu comme morphisme de FUY dans Y . On veut montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme. Concrètement on peut montrer qu'il admet $\iota : Y \rightarrow \hat{Y}$ comme inverse. La composée $\overline{\text{Id}_Y} \circ \iota$ envoie tout point y sur la limite de la suite $\text{Id} \circ (n \mapsto y)$ qui est bien y . La composée $\iota \circ \overline{\text{Id}_Y}$ envoie tout $z = \pi(u)$ sur $\iota(\lim_n \text{Id}(u_n)) = \pi(k \mapsto \lim_n u_n)$. Pour montrer qu'il s'agit de z , il suffit de montrer que u et $k \mapsto \lim_n u_n$ sont équivalentes. Or on a bien $\lim_k d(u_k, \lim_n u_n) = 0$.

On peut aussi raisonner plus abstraitement et argumenter que (Y, Id_Y) est également un objet initial dans $\mathcal{C}_{UY}$ donc il existe une unique morphisme θ de $\hat{Y}$ dans Y tel que $\theta \circ \iota = \text{Id}$ et ce morphisme est un isomorphisme. Comme $\overline{\text{Id}_Y}$ convient, il s'agit d'un isomorphisme.

Exercice 5.12 $\Leftrightarrow$ On note $\mathcal{D}$ la catégorie des espaces topologiques discrets et $\mathcal{LC}$ celle des espaces localement connexes par arcs (ce qui signifie que, pour tout point x , tout voisinage de x contient un voisinage de x connexe par arcs). Dans les deux cas, les morphismes sont les fonctions continues.

1. Soit X un espace topologique localement connexe par arcs.

a) Montrer que les composantes connexes par arcs de X sont ouvertes.

Solution : Soit A une composante connexe par arcs de X . Montrons que A est voisinage de chacun de ses points. Soit $x \in A$. Par hypothèse sur X , le voisinage X de x contient

un voisinage U de x connexe par arcs. On a $U \subseteq A$ car A est la plus grande partie connexe par arcs contenant x . Donc A est un voisinage de x .

- b) Montrer que la topologie quotient sur $\pi_0(X)$ est discrète.

Solution : Il suffit de montrer que les singletons sont ouverts, puisque toute partie est réunion de singletons. Soit $z \in \pi_0(X)$. La préimage $p_X^*(\{z\})$ est une composante connexes par arcs de X par définition de $\pi_0(X)$. Elle est donc ouverte par la question précédente.

- c) On note p_X la projection de X sur son quotient $\pi_0(X)$. Montrer que, pour toute fonction continue f de X vers un espace topologique discret Y , il existe une unique fonction continue $\bar{f} : \pi_0(X) \rightarrow Y$ telle que $f = \bar{f} \circ p_X$.

Solution : Vu la propriété universelle de la topologie quotient, il suffit de montrer que f descend en quotient. Soit x et x' équivalents dans X . Montrons que $f(x) = f(x')$. Par hypothèse, on obtient un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = x'$. Comme $f \circ \gamma$ est continue et relie $f(x)$ à $f(x')$, ces points sont dans la même composante connexe par arcs de Y . Or Y est discret donc ses composantes connexes par arcs sont des singletons donc $f(x) = f(x')$.

Si on veut donner plus de détails sur ce dernier point, on peut dire que $\{f(x)\}$ est à la fois ouvert et fermé dans Y (comme toutes les parties de Y) donc $(f \circ \gamma)^{-1}(\{f(x)\})$ est ouvert et fermé dans $[0, 1]$ et non vide car contenant 0 donc c'est tout $[0, 1]$ par connexité de $[0, 1]$.

2. Montrer que tout espace discret est localement connexe par arcs et que le foncteur d'inclusion de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{LC}$ admet un adjoint à gauche.

Solution : Soit X un espace discret. Montrons que X est localement connexe par arcs. Soit x un point de X et V un voisinage de X . Le voisinage V contient bien un voisinage connexe par arcs puisque $\{x\}$ fait l'affaire.

Attention : il ne suffit pas de dire que x admet un voisinage connexe par arcs, il faut bien montrer que *tous* les voisinages de x contiennent un voisinage connexe par arcs.

On a donc bien une inclusion de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{LC}$. On vient de le voir sur les objets et les morphismes sont les mêmes. Montrons maintenant qu'elle admet un adjoint à gauche. On applique le critère du cours. Il suffit de montrer que, pour chaque X objet de $\mathcal{LC}$, il existe un objet initial dans la catégorie dont les objets sont les paires (Z, f) où Z est un espace topologique discret et f une application continue de X dans Z et les morphismes de (Z, f) dans (W, g) sont les fonctions continues h de Z dans W telles que $h \circ f = g$.

Fixons un objet X de $\mathcal{LC}$. La question 1b assure que $(\pi_0(X), p_X)$ est bien un objet de la catégorie associée à X par le paragraphe précédent. La question 1c assure qu'il est initial.

Exercice 5.13 (Fonctorialité des conoyaux) ☞ Le but de cet exercice est de construire le foncteur conoyau en algèbre linéaire et sa propriété universelle comme adjoint à gauche. On fixe un anneau commutatif A (car travailler sur un corps ne simplifierait rien). On note Lin_A la catégorie dont les objets sont les (M, N, f) où M et N sont des A -modules et $f : M \rightarrow N$

une application A -linéaire. Les morphismes entre (M, N, f) et (M', N', f') sont les paires d'applications A -linéaires $(\varphi : M \rightarrow M', \psi : N \rightarrow N')$ telles que

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ M' & \xrightarrow{f'} & N' \end{array}$$

commute. On compose ces morphismes en empilant les diagrammes. On considère le foncteur $Z : \text{Mod}_A \rightarrow \text{Lin}_A$ qui envoie tout module M sur $(0, M, 0)$, l'inclusion du module nul dans M . Il envoie tout morphisme $g : M \rightarrow M'$ sur $Zg = (0, g)$ qui est bien un morphisme dans Lin_A et la functorialité de Z est claire. Montrer que Z admet un adjoint à gauche $\text{coker} : \text{Lin}_A \rightarrow \text{Mod}_A$ qui envoie tout objet (M, N, f) sur $\text{coker}(f) := M/f_*N$. Décrire l'unité de cette adjonction et sa propriété universelle. Caractériser l'action de coker sur les morphismes dans Lin_A .

Solution : On utilise le théorème de construction d'adjoint à gauche. Soit (M, N, f) un objet dans Lin_A . On considère la catégorie $\mathcal{E}_f$ dont les objets sont les paires $(P, (\varphi, \psi))$ où P est un A -module et (φ, ψ) est un morphisme de (M, N, f) vers ZP dans Lin_A . Un morphisme entre $(P, (\varphi, \psi))$ et $(P', (\varphi', \psi'))$ dans $\mathcal{E}_f$ est une application A -linéaire $g : P \rightarrow P'$ telle que $(\varphi', \psi') = (Zg) \circ (\varphi, \psi)$ (le fait qu'on obtienne ainsi une catégorie a déjà été vérifié dans le cas général). Le point clef à démontrer est que $(\text{coker}(f), (0, \pi_f))$, où $\pi_f : N \rightarrow \text{coker}(f)$ est la projection canonique, est un objet initial dans cette catégorie.

Il s'agit bien d'un objet de $\mathcal{E}_f$. Montrons qu'il est initial (c'est la propriété universelle du conoyau). Soit $(P, (\varphi, \psi))$ un autre objet de $\mathcal{E}_f$. On veut montrer qu'il existe une unique application A -linéaire $\theta : \text{coker}(f) \rightarrow P$ telle que $(\varphi, \psi) = Z\theta \circ (0, \pi_f)$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ 0 & \longrightarrow & P \end{array}$$

On en déduit d'abord que $\varphi = 0$ et donc la condition $(\varphi, \psi) = Z\theta \circ (0, \pi_f)$ équivaut à $\psi = \theta \circ \pi_f$. On en déduit également que $\psi \circ f = 0$. Ainsi $f_*M \subseteq \ker \psi$ donc, par propriété universelle des modules quotients, ψ descend en unique application A -linéaire $\bar{\psi} : \text{coker}(f) \rightarrow P$ telle que $\psi = \bar{\psi} \circ \pi_f$.

Le cours assure donc qu'il existe un foncteur $\text{coker} : \text{Lin}_A \rightarrow \text{Mod}_A$ adjoint à gauche de Z qui envoie tout (M, N, f) sur $\text{coker}(f)$ avec comme unité $(M, N, f) \mapsto (0, \pi_f)$. Le cours caractérise également l'action du foncteur coker sur un morphisme $(\varphi, \psi) : (M, N, f) \rightarrow (M', N', f')$: il s'agit de l'unique application linéaire $c : \text{coker}(f) \rightarrow \text{coker}(f')$ telle que

$$\begin{array}{ccc}
(M, N, f) & \xrightarrow{(\varphi, \psi)} & (M', N', f') \\
\downarrow (0, \pi_f) & & \downarrow (0, \pi_{f'}) \\
Z \operatorname{coker}(f) & \xrightarrow{Zc} & Z \operatorname{coker}(f')
\end{array}$$

commute, c'est-à-dire $\pi_{f'} \circ \psi = c \circ \pi_f$. On peut représenter cela sur le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{\pi_f} & \operatorname{coker}(f) & \longrightarrow & 0 \\
\varphi \downarrow & & \psi \downarrow & & \downarrow \exists! c & & \\
M' & \xrightarrow{f'} & N' & \xrightarrow{\pi_{f'}} & \operatorname{coker}(f') & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les lignes sont exactes (les flèches vers 0 à droite indiquent que les projections sont surjectives). La fonctorialité assure également que la construction de c est compatible avec les compositions.

Exercice 5.14 $\Leftrightarrow$ Le but de cet exercice est de décrire le passage des parties aux filtres comme l'application d'un adjoint à gauche. On note $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les treillis complets et les morphismes sont les fonctions croissantes (c'est donc la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ord}$ dont les objets sont les treillis complets). On note $\mathcal{D}$ la catégorie dont les objets sont les treillis complets et les morphismes sont les fonctions qui commutent aux infs filtrants (ce n'est donc *pas* une sous-catégorie *pleine* de $\mathbf{Ord}$). Comme les fonctions qui commutent aux infs filtrants sont croissantes, on a un foncteur d'oubli $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. Le but est de construire un adjoint à gauche de U qui, pour tout ensemble X , envoie $\mathcal{P}(X)$ sur $\mathcal{F}(X)$. En vue d'appliquer le théorème 216, on définit, pour tout treillis complet Y ,

$$LY = \{F \subseteq Y \mid F \text{ est filtrante et } \forall y, \forall y', (y \in F \text{ et } y \leq y') \Rightarrow y' \in F\}.$$

On note que, pour tout ensemble X , $L(\mathcal{P}(X)) = \mathcal{F}(X)$ (en utilisant la remarque 43).

1. Montrer que tout élément F de LY contient $\top$, l'élément maximum de Y .

Solution : Soit F dans LY . Comme F est une partie filtrante de Y par définition de Y , elle n'est pas vide. On obtient ainsi $y \in F$. Comme $y \leq \top$, on en déduit $\top \in F$ par définition de LY .

2. Montrer que LY muni de la relation opposée à la relation induite par $\mathcal{P}(Y)$ est un treillis complet.

Solution : On a $LY \subseteq \mathcal{P}(Y)^{\text{op}}$ par construction. D'après le corollaire 35, il suffit de montrer que, pour tout $S \subseteq LY$, $\sup(S) \in LY$, où le $\sup$ est pris dans $\mathcal{P}(Y)^{\text{op}}$. Soit $S \subseteq LY$. Montrons que $G := \bigcap_{F \in S} F$ est dans LY . Soit $y \in G$ et $y' \in Y$ tel que $y \leq y'$. Pour tout $F \in S$, $y \in F$ et donc $y' \in F$. Donc $y' \in G$. Montrons que G est filtrante. Pour tout $F \in S$, $\top \in F$ par la question précédente. Donc $\top \in G$, et en particulier G n'est pas vide. Soit y et y' dans G . Pour tout $F \in S$, $y \in F$ et $y' \in F$ donc $y \wedge y' \in F$ (en effet l'hypothèse que F est filtrante fournit un minorant y'' de $\{y, y'\}$ dans F puis on utilise $y'' \leq y \wedge y'$ et donc

$y \wedge y' \in F$ par définition de LY). Donc $y \wedge y' \in G$. On notera que c'est bien sûr la même démonstration que pour montrer que $\mathcal{F}(X)$ est un treillis complet, car cette démonstration n'utilisait en fait rien de spécifique à $\mathcal{P}(X)$.

3. Montrer que $\eta_Y : Y \rightarrow ULY$ défini par $\eta_Y(y) = \{y' \mid y \leq y'\}$ est une fonction croissante qui prend bien ses valeurs dans ULY . On note que $\eta_{\mathcal{P}(X)}$ est l'application filtre principal.

Solution : Soit $y \in Y$. Montrons que $\eta_Y(y)$ est dans LY . Il est non vide, car il contient y . Soit y' et y'' dans $\eta_Y(y)$. On a $y \leq y'$ et $y \leq y''$ donc $y \leq y' \wedge y''$ et $\eta_Y(y)$ est bien filtrante. L'autre condition est encore plus claire.

Soit y et y' dans Y avec $y \leq y'$. On a bien $\eta_Y(y') \subseteq \eta_Y(y)$ par transitivité de $\leq$, donc $\eta_Y(y) \leq \eta_Y(y')$.

4. Montrer que (LY, η_Y) est un objet initial de $Y \downarrow U$ et conclure. On pourra s'inspirer très fortement de la démonstration du théorème 68.

Solution : Soit Z un treillis complet et $\varphi : Y \rightarrow UZ$ une fonction croissante. On veut une unique fonction $\bar{\varphi} : LY \rightarrow Z$ qui commute aux infs filtrants et telle que

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & UZ \\ \eta_Y \downarrow & \nearrow U\bar{\varphi} & \\ ULY & & \end{array}$$

commute. Il s'agit de recopier la démonstration du théorème 68 en remarquant qu'elle n'utilise nulle part que $Y = \mathcal{P}(X)$ pour un ensemble X .

Montrons d'abord l'analogue de la remarque 49: pour tout $F \in LY$ et tout $y \in Y$, $F \leq \eta_Y(y) \Leftrightarrow y \in F$. On fixe F et y . Supposons $F \leq \eta_Y(y)$. Comme $y \leq y$, $y \in \eta_Y(y)$ et donc $y \in F$. Réciproquement supposons $y \in F$ et montrons que $F \leq \eta_Y(y)$. Soit $y' \in \eta_Y(y)$. On a $y \leq y'$ et $y \in F$ donc $y' \in F$ par définition de LY .

Montrons maintenant l'analogue du lemme 70: pour tout $F \in LY$, $F = \inf_{y \text{ tq } F \leq \eta_Y(y)} \eta_Y(y)$. Par définition, F minore l'ensemble dont on prend l'inf ici. Soit F' un autre minorant. Montrons que $F' \leq F$. Soit $y' \in F$. On a $F \leq \eta_Y(y')$ par le paragraphe précédent, puis $F' \leq \eta_Y(y')$ par transitivité et donc $y' \in F'$ par une nouvelle application du paragraphe précédent.

Montrons enfin l'analogue du lemme 73: l'inclusion de LY dans $\mathcal{P}(Y)^{\text{op}}$ commute aux inf filtrants. Soit S une partie filtrante de LY . Montrons que $G := \bigcup_{F \in S} F$ est dans LY . Comme S n'est pas vide et que chacun de ses éléments contient $\top$ par la première question, on obtient $\top \in G$, donc G n'est pas vide. Soit y et y' dans G . Montrons que $y \wedge y' \in G$. Comme $y \in G$, on obtient $F \in S$ tel que $y \in F$. Comme $y' \in G$, on obtient $F' \in S$ tel que $y' \in F'$. Comme S est filtrante, on obtient $F'' \in S$ tel que $F'' \leq F$ et $F'' \leq F'$. On a donc $y \in F''$ et $y' \in F''$ donc, par définition de LY , $y \wedge y' \in F''$. La dernière condition est claire.

Après ces préliminaires, on peut démontrer l'existence et l'unicité de l'extension. Soit Z un treillis complet et $\varphi : Y \rightarrow Z$ une fonction croissante. Montrons d'abord l'unicité. Soit $\bar{\varphi}$

une extension de φ qui commute aux infs filtrants. Soit $F \in LY$. On calcule en utilisant le lemme 72 et le fait que F est filtrante :

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(F) &= \overline{\varphi}\left(\inf_{y \in F} \eta_Y(y)\right) \\ &= \inf_{y \in F} (\overline{\varphi} \circ \eta_Y)(y) \\ &= \inf_{y \in F} \varphi(y)\end{aligned}$$

Cette formule ne dépend que de φ et F donc l'unicité est démontrée. Pour l'existence, on définit $\overline{\varphi}$ par cette formule. Montrons que $\overline{\varphi}$ convient. Montrons qu'elle étend φ . Soit $y \in Y$.

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(\eta_Y(y)) &= \inf_{y' \in \eta_Y(y)} \varphi(y) && \text{par définition de } \overline{\varphi} \\ &= \inf \varphi_* \{y' \mid y' \in \eta_Y(y)\} \\ &= \inf \varphi_* \{y' \mid y \leq y'\} && \text{par définition de } P \\ &= \varphi(y) && \text{par l'exercice 1.16.}\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\overline{\varphi}$ commute aux infs filtrants. Soit $S \subseteq Y$ une partie filtrante.

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(\inf S) &= \inf_{y \in \inf S} \varphi(y) \\ &= \inf_{y \in \bigcup_{F \in S} F} \varphi(y) \\ &= \inf_{F \in S} \left(\inf_{U \in F} \varphi(U) \right) && \text{par l'exercice 1.15} \\ &= \inf_{F \in S} (\overline{\varphi}(F)).\end{aligned}$$

Remarque : dans tout cet exercice, l'hypothèse « treillis complet » est plus forte que nécessaire, on pourrait raconter la même histoire en supposant seulement l'existence des infs filtrants et d'un maximum, mais il faudrait être plus prudent pour montrer que LY est un objet de la catégorie visée, faute d'avoir accès au corollaire 35.