

8 Adjonctions entre foncteurs

Exercice 5.8 $\square$ Nous avons démontré que l'unité d'une adjonction est une transformation naturelle. Montrer directement que la co-unité l'est également (sans se ramener au cas de l'unité en passant aux catégories opposées).

Exercice 5.9 $\square$ En s'inspirant de la démonstration de la propriété universelle de l'unité d'une adjonction $L \dashv R$, montrer la propriété universelle de la co-unité (sans se ramener au cas de l'unité en passant aux catégories opposées).

Exercice 5.10 $\mathbb{H}$ Soit X et Y des treillis complets et $r : Y \rightarrow X$ une fonction croissante. Le théorème 37 et le théorème 216 donnent tous deux une condition nécessaire et suffisante pour que r admette un adjoint à gauche puisque les adjonctions entre ensembles ordonnés sont des cas particuliers d'adjonctions entre foncteurs (le théorème 37 ne fait pas l'hypothèse que r est croissante mais cela découle directement de l'hypothèse). Le but de cet exercice est de comparer ces deux critères.

1. Soit $x \in X$, montrer que la catégorie $x \downarrow r$ du théorème 216 est $\{y \mid x \leq r(y)\}$ muni de la relation d'ordre induite par Y .
2. Montrer que le théorème 216 assure que r admet un adjoint à gauche si et seulement si

$$\forall x \in X, \{y \mid x \leq r(y)\} \text{ admet un minimum}$$

ou encore

$$\forall x \in X, x \leq r(\inf\{y \mid x \leq r(y)\}).$$

3. Montrer directement (sans utiliser les théorèmes) que la condition de la question précédente est équivalente à la condition du théorème 37 : r commute aux infs.

Le fait que l'équivalence des conditions obtenues ne soient pas si évidente était attendu car le théorème général n'a absolument pas d'analogue de la condition de treillis complet qui apparaît dans le théorème sur les ensembles ordonnés. Il existe des énoncés généraux ayant des conditions analogues mais ils requièrent les notions de limites et colimites dans une catégorie qui sont au-delà du contenu de ce cours. Ces énoncés sont connus sous le nom de théorème du foncteur adjoint.

Exercice 5.11 $\mathfrak{F}$ Le but de cet exercice est de construire un adjoint à gauche au foncteur d'inclusion de la catégorie des espaces métriques complets dans celle de tous les espaces métriques. Dans ces deux catégories, les morphismes sont les applications uniformément continues. *Attention* : il s'agit d'un exercice très long et sa solution ne sera pas utilisée dans la suite du cours.

Soit X un espace métrique. On note $C(X)$ l'ensemble des suites de Cauchy d'éléments de X .

1. Pour deux éléments u et v de $C(X)$, montrer que la suite de réels $n \mapsto d(u_n, v_n)$ converge. On note $d_C(u, v)$ la limite de cette suite.

- On dit que deux éléments u et v de $C(X)$ sont équivalents si la suite de réels $n \mapsto d(u_n, v_n)$ tend vers zéro. Montrer qu'il s'agit effectivement d'une relation d'équivalence. On note $\hat{X}$ « le » quotient de $C(X)$ par cette relation.
- Montrer que la fonction d_C de la première question descend au quotient en fonction $\hat{d}$ sur $\hat{X} \times \hat{X}$.
- Montrer que $(\hat{X}, \hat{d})$ est un espace métrique.
- On note $\iota : X \rightarrow \hat{X}$ la fonction envoyant x sur la suite constante de valeur x . Montrer que ι est uniformément continue.
- Montrer que $(\hat{X}, \hat{d})$ est complet.
- Montrer que, pour tout espace métrique complet Y et toute fonction uniformément continue de X dans Y , il existe une unique application uniformément continue $\bar{f} : \hat{X} \rightarrow Y$ telle que $\bar{f} \circ \iota = f$.
- Conclure et décrire l'unité et la co-unité de l'adjonction obtenue. Montrer que la co-unité est un isomorphisme naturel.

Exercice 5.12 $\mathbb{H}$ On note $\mathcal{D}$ la catégorie des espaces topologiques discrets et $\mathcal{LC}$ celle des espaces localement connexes par arcs (ce qui signifie que, pour tout point x , tout voisinage de x contient un voisinage de x connexe par arcs). Dans les deux cas, les morphismes sont les fonctions continues.

- Soit X un espace topologique localement connexe par arcs.
 - Montrer que les composantes connexes par arcs de X sont ouvertes.
 - Montrer que la topologie quotient sur $\pi_0(X)$ est discrète.
 - On note p_X la projection de X sur son quotient $\pi_0(X)$. Montrer que, pour toute fonction continue f de X vers un espace topologique discret Y , il existe une unique fonction continue $\bar{f} : \pi_0(X) \rightarrow Y$ telle que $f = \bar{f} \circ p_X$.
- Montrer que tout espace discret est localement connexe par arcs et que le foncteur d'inclusion de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{LC}$ admet un adjoint à gauche.

Exercice 5.13 (Fonctorialité des conoyaux) $\mathfrak{F}$ Le but de cet exercice est de construire le foncteur conoyau en algèbre linéaire et sa propriété universelle comme adjoint à gauche. On fixe un anneau commutatif A (car travailler sur un corps ne simplifierait rien). On note Lin_A la catégorie dont les objets sont les (M, N, f) où M et N sont des A -modules et $f : M \rightarrow N$ une application A -linéaire. Les morphismes entre (M, N, f) et (M', N', f') sont les paires d'applications A -linéaires $(\varphi : M \rightarrow M', \psi : N \rightarrow N')$ telles que

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ M' & \xrightarrow{f'} & N' \end{array}$$

commute. On compose ces morphismes en empilant les diagrammes. On considère le foncteur $Z : \text{Mod}_A \rightarrow \text{Lin}_A$ qui envoie tout module M sur $(0, M, 0)$, l'inclusion du module nul dans M . Il envoie tout morphisme $g : M \rightarrow M'$ sur $Zg = (0, g)$ qui est bien un morphisme dans Lin_A et la functorialité de Z est claire. Montrer que Z admet un adjoint à gauche $\text{coker} : \text{Lin}_A \rightarrow \text{Mod}_A$ qui envoie tout objet (M, N, f) sur $\text{coker}(f) := M/f_*N$. Décrire l'unité de cette adjonction et sa propriété universelle. Caractériser l'action de coker sur les morphismes dans Lin_A .

Exercice 5.14 $\square$ Le but de cet exercice est de décrire le passage des parties aux filtres comme l'application d'un adjoint à gauche. On note $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les treillis complets et les morphismes sont les fonctions croissantes (c'est donc la sous-catégorie pleine de Ord dont les objets sont les treillis complets). On note $\mathcal{D}$ la catégorie dont les objets sont les treillis complets et les morphismes sont les fonctions qui commutent aux infils filtrants (ce n'est donc *pas* une sous-catégorie *pleine* de Ord). Comme les fonctions qui commutent aux infils filtrants sont croissantes, on a un foncteur d'oubli $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. Le but est de construire un adjoint à gauche de U qui, pour tout ensemble X , envoie $\mathcal{P}(X)$ sur $\mathcal{F}(X)$. En vue d'appliquer le théorème 216, on définit, pour tout treillis complet Y ,

$$LY = \{F \subseteq Y \mid F \text{ est filtrante et } \forall y, \forall y', (y \in F \text{ et } y \leq y') \Rightarrow y' \in F\}.$$

On note que, pour tout ensemble X , $L(\mathcal{P}(X)) = \mathcal{F}(X)$ (en utilisant la remarque 43).

1. Montrer que tout élément F de LY contient $\top$, l'élément maximum de Y .
2. Montrer que LY muni de la relation opposée à la relation induite par $\mathcal{P}(Y)$ est un treillis complet.
3. Montrer que $\eta_Y : Y \rightarrow ULY$ défini par $\eta_Y(y) = \{y' \mid y \leq y'\}$ est une fonction croissante qui prend bien ses valeurs dans ULY . On note que $\eta_{\mathcal{P}(X)}$ est l'application filtre principal.
4. Montrer que (LY, η_Y) est un objet initial de $Y \downarrow U$ et conclure. On pourra s'inspirer *très* fortement de la démonstration du théorème 68.