9 Homologie singulière et suites exactes

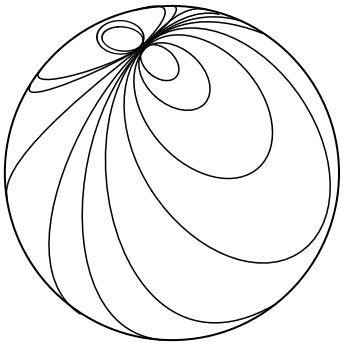
Exercice 6.1 Montrer qu'il existe un champ de vecteur continu sur $\mathbb{S}^2$ qui s'annule en exactement un point.

Solution : L'idée de base est qu'on peut obtenir $\mathbb{S}^2$ en ajoutant un point à l'infini de $\mathbb{R}^2$ et que $\mathbb{R}^2$ admet des champs de vecteurs qui ne s'annulent pas, pas exemple les champs de vecteurs constants. On peut obtenir un champ continu s'annulant une fois sur $\mathbb{S}^2$ en étendant par zéro un tel champ multiplié par une fonction continue qui est strictement positive sur $\mathbb{R}^2$ et tend vers zéro suffisamment vite en l'infini.

Décrivons plus précisément le champ obtenu à partir d'un champ constant sur un plan ramené sur le complémentaire d'un point par projection stéréographique.

On fixe un point de $\mathbb{S}^2$, appelons-le le pôle Nord et une droite orientée Δ tangente à la sphère en N. On va ramener un champ constant de $N^\perp$ parallèle à Δ par la projection stéréographique depuis N.

On considère tous les plans contenant Δ qui intersectent la sphère en plus d'un point. Chacun de ces plans intersecte la sphère le long d'un cercle passant par le pôle Nord et tangent à Δ. On oriente chacun de ses cercles en utilisant l'orientation de Δ. Il existe un champ de vecteurs qui s'annule uniquement en N et est tangent à chacun des cercles, avec la direction indiquée par l'orientation du cercle.



Exercice 6.2 Dans tout cet exercice, on fixe un entier $n > 0$.

1. Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que f induit sur $H_n(\mathbb{S}^n)$ l'application $k\,\mathrm{Id}_{H_n(\mathbb{S}^n)}$. On appelle degré de f cet entier k et on le note $\deg(f)$.

   Solution : On sait que $H_n(\mathbb{S}^n)$ est libre de rang 1 (on utilise ici l'hypothèse $n > 0$) donc tous ses endomorphismes sont de cette forme.

2. Montrer que si $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ n'est pas surjective alors $\deg(f) = 0$. Indication : écrire f comme une composition avec une inclusion.

   Solution : Supposons que f n'est pas surjective. Soit N un point de $\mathbb{S}^n$ qui n'est pas dans l'image de f. On peut écrire $f = \iota \circ \bar{f}$ où ι est l'inclusion du complémentaire U de N dans

$\mathbb{S}^n$ et $\bar{f}$ est simplement f vue comme fonction à valeurs dans U. On a $f_* = \iota_* \circ \bar{f}_*$. Or la projection stéréographique depuis N sur l'hyperplan $N^\perp$ est un homéomorphisme de U sur un espace vectoriel donc $H_n(U)$ est nul donc ι_* est nul et f_* aussi. Cela montre que le degré de f est nul.

3. Montrer que, pour tous $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $\deg(g \circ f) = \deg(g) \circ \deg(f)$.

   Solution : Cela découle directement de la fonctorialité de l'homologie qui donne $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* = (\deg(g)\,\mathrm{Id}) \circ (\deg(f)\,\mathrm{Id}) = \deg(g)\deg(f)\,\mathrm{Id}$ et de l'unicité démontrée dans la première question.

4. Rappeler quel est le degré d'une symétrie hyperplane restreinte à $\mathbb{S}^n$ et en déduire le degré de l'application antipodale $A : x \mapsto -x$.

   Solution : On a vu en cours que toute symétrie hyperplane σ induit $\sigma_* = -\mathrm{Id}$ sur $H_n(\mathbb{S}^n)$ donc $\deg(\sigma) = -1$. L'antipodie est un produit de $n+1$ symétries hyperplanes donc la question précédente assure que $\deg(A) = (-1)^{n+1}$.

5. On suppose que $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ n'a aucun point fixe. Montrer que f est homotope à A.

   Solution : L'idée est simplement de projeter sur la sphère l'homotopie rectiligne dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

   $$(t, x) \mapsto \frac{1}{\| \, (1-t)f(x) + tA(x) \, \|} \left(\, (1-t)f(x) + tA(x) \, \right).$$

   L'hypothèse que f n'a pas de point fixe assure précisément que la formule ci-dessus ne divise pas par zéro, car l'origine n'est pas dans le segment entre $f(x)$ et $A(x) = -x$. C'est clair géométriquement, mais on peut aussi argumenter algébriquement. Supposons que $x \in \mathbb{S}^n$ et $t \in [0,1]$ vérifient $(1-t)f(x) + tA(x) = 0$. On a alors $(1-t)f(x) = tx$ puis, en passant aux normes et en utilisant que x et $f(x)$ sont dans la sphère et t dans $[0,1]$, on obtient $1 - t = t$ donc $t = 1/2$ puis $f(x) = x$, ce qui contredit l'hypothèse d'absence de point fixe.

6. Soit G un groupe et $\rho : G \to \mathrm{Homeo}\,(\mathbb{S}^n)$ une action de G sur $\mathbb{S}^n$ par homéomorphismes. On suppose que ρ est libre (tout élément non trivial de G agit sans point fixe). Montrer que si n est pair alors G est trivial ou isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   Solution : La question 3 montre que $\varphi := \deg \circ \rho$ est multiplicatif. C'est donc un morphisme du groupe G sur le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire ± 1.

   Puisque l'action est libre, tous les éléments non triviaux de G sont envoyés sur des homéomorphismes sans points fixes. L'invariance par homotopie de l'application induite en homologie et la question précédente montrent que tout élément non trivial de G est envoyé sur -1.

   En particulier le noyau de φ est trivial et G est isomorphe à son image qui est soit $\{1\}$ soit $\{-1, 1\}$.

Exercice 6.3 🕮 Cet exercice passe en revue les exemples fondamentaux de suites exactes courtes de modules.

1. Montrer que $0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ est une suite exacte si et seulement si M est un module nul.

   Solution : Les deux flèches correspondent nécessairement à des applications linéaires nulles. L'exactitude en M assure que le noyau de la seconde, c'est-à-dire tout M, est égal à l'image de la première, qui est nulle. Donc M est nul.

2. Montrer que $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$ est une suite exacte si et seulement si φ est injective.

   Solution : L'exactitude en M signifie que le noyau de φ est l'image de la première application linéaire. Cette application est nulle donc son image est nulle, donc $\ker \varphi = 0$ donc φ est injective.

3. Montrer que $M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ est une suite exacte si et seulement si φ est surjective.

   Solution : L'exactitude en N assure que l'image de φ est le noyau de l'application suivante. Cette application est nulle donc son noyau est N entier.

4. Montrer que $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ est une suite exacte si et seulement si φ est un isomorphisme.

   Solution : C'est la combinaison des deux questions précédentes : φ est à la fois injective et surjective. Ainsi φ est bijective et on sait que son inverse est automatiquement une application linéaire.

Exercice 6.4 🕮 Cet exercice aborde le contenu algébrique général des suites exactes courtes.

1. Montrer que, pour tout module M et tout sous-module N de M, l'inclusion $\iota : N \hookrightarrow M$ et la projection $\pi : M \to M/N$ fournissent une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

   Montrer que toute suite exacte courte est isomorphe à un exemple de ce type.

   Solution : L'exactitude en N traduit simplement l'injectivité de ι et celle en M/N la surjectivité de π, tandis que l'exactitude en M traduit le fait que $\ker(\pi) = N$.

   Soit

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

   une suite exacte courte quelconque. Comme on l'a vu, f est injective, g est surjective et $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$. Donc f induit un isomorphisme entre N et le sous-module f_*N de M et g descend en isomorphisme $\overline{g} : M/f_*N \to Q$. On a donc le digramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & f \wr\downarrow & & \| \mathrm{Id}_M & & \wr\uparrow \overline{g} & & \\ 0 & \longrightarrow & f_*N & \xrightarrow[\iota]{} & M & \xrightarrow[\pi]{} & M/f_*N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et on obtient l'isomorphisme de suites exactes voulu en inversant l'isomorphisme vertical à droite.

2. Montrer que, pour tous modules N et N', l'inclusion et la projection fournissent une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} N \oplus N' \xrightarrow{p'} N' \longrightarrow 0$$

Une suite exacte isomorphe à un exemple de ce type est dite scindée. Montrer que la suite exacte associée à un sous-module N d'un module M est scindée si et seulement si N admet un supplémentaire N'. Donner un exemple de suite exacte courte qui n'est pas scindée. On rappelle que l'existence de tels exemples est la raison fondamentale pour laquelle on ne peut pas échapper à la discussion des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans les cours d'algèbre élémentaires (cette situation est à comparer avec celle de la question suivante).

Solution : La suite proposée est bien exacte, car ι est injective, p' est surjective et $\ker(p') = N \oplus \{0\} = \mathrm{im}(\iota)$.

Soit N un sous-module d'un module M. Si la suite correspondante est scindée alors on a

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota} & M & \xrightarrow{\pi} & M/N & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\uparrow & & \wr\uparrow & & \wr\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow[\iota_1]{} & N_1 \oplus N_2 & \xrightarrow[p_2]{} & N_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

l'image de $\{0\} \oplus N_2$ par l'isomorphisme du milieu est le supplémentaire recherché. Réciproquement, si N' existe alors, par définition, on obtient un isomorphisme entre M et $N \oplus N'$ compatible avec l'inclusion. Et on sait que la restriction de $\pi : M \to M/N$ à N' est un isomorphisme, ce qui permet de compléter le diagramme.

La suite de $\mathbb{Z}$-modules

$$0 \longrightarrow 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

n'est pas scindée, car $\mathbb{Z}$ ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ puisqu'il ne contient aucun x non nul tel que $x + x = 0$.

3. Soit $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ une suite exacte courte. Montrer que si Q est libre alors cette suite est scindée. En particulier N est isomorphe à $M \oplus Q$. Cette question est nettement plus difficile. On pourra commencer par montrer que l'application de N dans Q admet un inverse à droite *linéaire*. On rappelle que tout espace vectoriel est libre, ce qui explique pourquoi on peut se passer d'espaces vectoriels quotients dans les cours

d'introduction à l'algèbre linéaire : tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire, et ce supplémentaire est isomorphe au quotient par le sous-espace.

Solution : Notons ι l'application de M dans N et π celle de N dans Q. L'exercice précédent assure que ι est injective et π est surjective.

Montrons que π admet un inverse à droite *linéaire*. Soit $e : I \to Q$ une base de Q (qui existe, car on a supposé Q libre). Pour chaque i dans I, on choisit une préimage n_i de e_i par π. La propriété universelle de la base e appliquée à la fonction $n : I \to N$ fournit une application R-linéaire $s : Q \to N$ telle que, pour tout i, $s(e_i) = n_i$. On a, pour tout i, $\pi \circ s(e_i) = e_i$ donc l'unicité dans la propriété universelle de e appliqué à la fonction e assure que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_Q$. En particulier s est injective.

Montrons que N est la somme directe de ses sous-modules $\iota(M)$ et $s(Q)$, qui sont isomorphes à M et Q respectivement par injectivité de ι et s.

Montrons que l'intersection est nulle. Soit $m \in M$ et $q \in Q$ tels que $\iota(m) = s(q)$. Montrons que cette valeur commune est nulle. On applique π à l'égalité pour obtenir $\pi(\iota(m)) = \pi(s(q))$. Le membre de gauche est nul par exactitude de la suite en N. Le membre de droite vaut q. Donc $q = 0$ et donc $s(q) = 0$ comme annoncé.

Montrons que la somme est N entier. Soit $n \in N$. On veut $m \in M$ et $q \in Q$ tels que $n = \iota(m) + s(q)$. On pose naturellement $q = \pi(n)$ et il reste à montrer que $n - s(\pi(n))$ est dans l'image de ι. Or cette image est le noyau de π. Donc, il suffit de calculer $\pi(n - s(\pi(n))) = \pi(n) - (\pi \circ s)(\pi(n)) = 0$.

Remarque : Dans cette discussion, l'hypothèse que Q est libre est trop forte, la bonne hypothèse est celle de module projectif, mais cela ne jouera aucun rôle pour nous.

Exercice 6.5 🕮 Cet exercice explique comment « découper » une suite exacte longue en suites exactes courtes. On considère une suite exacte longue de modules.

$$\cdots\cdots\to M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \cdots\cdots\to$$

On rappelle que le conoyau d'une application linéaire $f : M \to N$ est $\mathrm{coker}(f) := N/\mathrm{im}(f)$ et sa co-image est $\mathrm{coim}(f) := M/\ker(f)$, ces deux modules étant munis de leur projection canonique depuis N et M respectivement.

Montrer qu'on peut écrire seize suites exactes courtes deux à deux isomorphes de la forme

$$0 \to A \to M_i \to B \to 0$$

où A et B sont des noyaux, images, conoyaux ou co-images des f_j pour $i-1 \leq j \leq i+2$. En particulier une de ces suites doit avoir $A = \mathrm{coker}(f_{i+2})$ et $B = \ker(f_{i-1})$. Montrer que, parmi ces suites exactes, celles faisant intervenir à la fois f_i et f_{i+1} sont équivalentes à l'exactitude de la suite longue de départ en M_i.

Solution : On part de la suite exacte courte associée au sous-module $\ker(f_i)$:

$$0 \longrightarrow \ker(f_i) \hookrightarrow M_i \xrightarrow{f_i} \mathrm{coim}(f_i) \longrightarrow 0$$

Le premier théorème d'isomorphisme de Noether assure que, pour chaque i, f_i induit un isomorphisme entre la co-image $\operatorname{coim}(f_i) = M_i/\ker(f_i)$ et $\operatorname{im}(f_i)$. Par ailleurs l'hypothèse d'exactitude en M_i assure que $\ker(f_i) = \operatorname{im}(f_{i+1})$ et donc $\operatorname{coim}(f_i) = \operatorname{coker}(f_{i+1})$.

On a donc

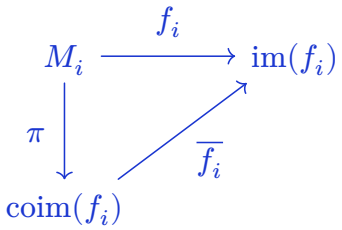
$$\ker(f_i) = \operatorname{im}(f_{i+1}) \simeq \operatorname{coim}(f_{i+1}) = \operatorname{coker}(f_{i+2})$$

en utilisant l'exactitude en M_i puis le théorème de Noether pour f_{i+1} puis l'exactitude en M_{i+1} et

$$\ker(f_{i-1}) = \operatorname{im}(f_i) \simeq \operatorname{coim}(f_i) = \operatorname{coker}(f_{i+1})$$

en remplaçant i par $i-1$ (donc en utilisant l'exactitude en M_{i-1} et M_i et le théorème de Noether pour f_i). On a donc quatre possibilités (dont $\operatorname{coker}(f_{i+2})$) pour remplacer $\ker(f_i)$ dans la suite exacte ci-dessus et quatre possibilités (dont $\ker(f_{i-1})$) pour remplacer $\operatorname{coim}(f_i)$, ce qui donne seize possibilités.

Le fait que les suites exactes correspondantes sont deux à deux isomorphes est évident pour les réécritures venant d'égalités telles que $\ker(f_i) = \operatorname{im}(f_{i+1})$ et provient de la commutativité de



ou de l'analogue pour f_{i+1} sinon.

En particulier ces suites exactes incluent

$$0 \longrightarrow \ker(f_i) \overset{\iota}{\hookrightarrow} M_i \overset{\pi}{\longrightarrow} \operatorname{coker}(f_{i+1}) \longrightarrow 0$$

dont l'exactitude est équivalente à $\operatorname{im}(\iota) = \ker(\pi)$, c'est-à-dire $\ker(f_i) = \operatorname{im}(f_{i+1})$ et

$$0 \longrightarrow \operatorname{im}(f_{i+1}) \overset{\iota'}{\hookrightarrow} M_i \overset{\pi'}{\longrightarrow} \operatorname{coim}(f_i) \longrightarrow 0$$

dont l'exactitude est équivalente à $\operatorname{im}(\iota') = \ker(\pi')$, c'est-à-dire $\operatorname{im}(f_{i+1}) = \ker(f_i)$ (et de même pour la variante faisant intervenir $\operatorname{coim}(f_{i+1})$).