

9 Homologie singulière et suites exactes

Exercice 6.1 $\square$ Montrer qu'il existe un champ de vecteur continu sur $\mathbb{S}^2$ qui s'annule en exactement un point.

Exercice 6.2 $\square$ Dans tout cet exercice, on fixe un entier $n > 0$.

1. Soit $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que f induit sur $H_n(\mathbb{S}^n)$ l'application $k \operatorname{Id}_{H_n(\mathbb{S}^n)}$. On appelle degré de f cet entier k et on le note $\deg(f)$.
2. Montrer que si $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ n'est pas surjective alors $\deg(f) = 0$. Indication: écrire f comme une composition avec une inclusion.
3. Montrer que, pour tous $f, g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, $\deg(g \circ f) = \deg(g) \circ \deg(f)$.
4. Rappeler quel est le degré d'une symétrie hyperplane restreinte à $\mathbb{S}^n$ et en déduire le degré de l'application antipodale $A : x \mapsto -x$.
5. On suppose que $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ n'a aucun point fixe. Montrer que f est homotope à A .
6. Soit G un groupe et $\rho : G \rightarrow \operatorname{Homeo}(\mathbb{S}^n)$ une action de G sur $\mathbb{S}^n$ par homéomorphismes. On suppose que ρ est libre (tout élément non trivial de G agit sans point fixe). Montrer que si n est pair alors G est trivial ou isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 6.3 $\square$ Cet exercice passe en revue les exemples fondamentaux de suites exactes courtes de modules.

1. Montrer que $0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ est une suite exacte si et seulement si M est un module nul.

2. Montrer que $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$ est une suite exacte si et seulement si φ est injective.

3. Montrer que $M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ est une suite exacte si et seulement si φ est surjective.

4. Montrer que $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ est une suite exacte si et seulement si φ est un isomorphisme.

Exercice 6.4 $\square$ Cet exercice aborde le contenu algébrique général des suites exactes courtes.

1. Montrer que, pour tout module M et tout sous-module N de M , l'inclusion $\iota : N \hookrightarrow M$ et la projection $\pi : M \rightarrow M/N$ fournissent une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

Montrer que toute suite exacte courte est isomorphe à un exemple de ce type.

2. Montrer que, pour tous modules N et N' , l'inclusion et la projection fournissent une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} N \oplus N' \xrightarrow{p'} N' \longrightarrow 0$$

Une suite exacte isomorphe à un exemple de ce type est dite scindée. Montrer que la suite exacte associée à un sous-module N d'un module M est scindée si et seulement si N admet un supplémentaire N' . Donner un exemple de suite exacte courte qui n'est pas scindée. On rappelle que l'existence de tels exemples est la raison fondamentale pour laquelle on ne peut pas échapper à la discussion des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans les cours d'algèbre élémentaires (cette situation est à comparer avec celle de la question suivante).

3. Soit $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ une suite exacte courte. Montrer que si Q est libre alors cette suite est scindée. En particulier N est isomorphe à $M \oplus Q$. Cette question est nettement plus difficile. On pourra commencer par montrer que l'application de N dans Q admet un inverse à droite *linéaire*. On rappelle que tout espace vectoriel est libre, ce qui explique pourquoi on peut se passer d'espaces vectoriels quotients dans les cours d'introduction à l'algèbre linéaire : tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire, et ce supplémentaire est isomorphe au quotient par le sous-espace.

Exercice 6.5 $\square$ Cet exercice explique comment « découper » une suite exacte longue en suites exactes courtes. On considère une suite exacte longue de modules.

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

On rappelle que le conoyau d'une application linéaire $f : M \rightarrow N$ est $\text{coker}(f) := N / \text{im}(f)$ et sa co-image est $\text{coim}(f) := M / \ker(f)$, ces deux modules étant munis de leur projection canonique depuis N et M respectivement.

Montrer qu'on peut écrire seize suites exactes courtes deux à deux isomorphes de la forme

$$0 \rightarrow A \rightarrow M_i \rightarrow B \rightarrow 0$$

où A et B sont des noyaux, images, conoyaux ou co-images des f_j pour $i-1 \leq j \leq i+2$. En particulier une de ces suites doit avoir $A = \text{coker}(f_{i+2})$ et $B = \ker(f_{i-1})$. Montrer que, parmi ces suites exactes, celles faisant intervenir à la fois f_i et f_{i+1} sont équivalentes à l'exactitude de la suite longue de départ en M_i .