

## FLEXIBILITÉ EN GÉOMÉTRIE DE CONTACT EN GRANDE DIMENSION

[d'après Borman, Eliashberg et Murphy]

par Patrick MASSOT

### 1. INTRODUCTION

Le but principal de ce texte est d'expliquer le théorème suivant, démontré en 2014 par Matthew Strom Borman, Yakov Eliashberg et Emmy Murphy et qui répond à une question remontant au moins à [Che53].

**THÉORÈME 1.1** ([BEM15]). — *Toute structure presque de contact est homotope à une structure de contact.*

En fait le théorème précédent fonctionne aussi à paramètres pour une classe particulière de structures de contact, dites vrillées, que l'on trouve dans toutes les classes d'homotopie de structures presque de contact. En particulier deux telles structures sont homotopes parmi les structures de contact si et seulement si elles le sont parmi les structures presque de contact.

#### 1.1. Le $h$ -principe

Avant de rappeler ce que sont les structures de contact et presque de contact, il est utile de rappeler le contexte plus général de la dichotomie dégagée par M. Gromov entre les problèmes géométriques flexibles et rigides. Il s'agit ici de préciser sur des exemples la définition floue suivante : on dit qu'un problème de construction géométrique vérifie le  $h$ -principe de Gromov si les seules obstructions à sa résolution sont de nature homotopique. La section 3 présente un cadre général permettant d'énoncer ce principe.

Un des problèmes les plus simples vérifiant le  $h$ -principe est celui des déformations d'immersions du cercle  $\mathbb{S}^1$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Le problème géométrique est ici : étant données deux immersions  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  du cercle dans le plan, peut-on déformer  $\gamma_0$  en  $\gamma_1$  parmi les immersions ? À toute immersion  $\gamma$  du cercle dans le plan, on peut associer  $G(\gamma) : \theta \mapsto \dot{\gamma}(\theta)/|\dot{\gamma}(\theta)|$  qui est une application du cercle dans le cercle. Si  $\gamma_0$  se déforme en  $\gamma_1$  parmi les immersions alors  $G(\gamma_0)$  et  $G(\gamma_1)$  sont homotopes donc ont même degré. Le problème de départ présente donc une obstruction homotopique :  $\deg(G(\gamma_0)) - \deg(G(\gamma_1))$  qui vit naturellement dans le groupe d'homotopie  $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ . Le

théorème de Whitney-Graustein [Whi37] affirme qu'il n'y a pas d'obstruction géométrique : on peut réaliser géométriquement la déformation dès lors que l'obstruction homotopique s'annule. Un aspect important de cette discussion est le passage par un découplage entre une application lisse et sa dérivée. Il n'y a aucun problème à déformer  $\gamma_0$  en  $\gamma_1$  sans se soucier de l'annulation de la dérivée pendant la déformation,  $\gamma_t(\theta) = (1 - t)\gamma_0(\theta) + t\gamma_1(\theta)$  fait l'affaire. Par ailleurs la théorie élémentaire des revêtements montre que l'annulation de l'obstruction homotopique est équivalente à l'existence d'une déformation reliant  $G(\gamma_0)$  à  $G(\gamma_1)$  parmi les applications du cercle dans le cercle, ou encore à l'existence d'une déformation  $t \mapsto \Gamma_t$  reliant  $\dot{\gamma}_0$  à  $\dot{\gamma}_1$  parmi les applications du cercle dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . On obtient ainsi un chemin de couples  $(\gamma_t, \Gamma_t)$  reliant  $(\gamma_0, \dot{\gamma}_0)$  à  $(\gamma_1, \dot{\gamma}_1)$  mais sans garder la contrainte, dite d'holonomie, que le deuxième élément du couple est la dérivée du premier. Le cœur du théorème de Whitney-Graustein est d'affirmer qu'un tel chemin est toujours homotope, à extrémités fixées, à un chemin holonome. Le cadre naturel pour discuter cette notion d'holonomie est celui des espaces de jets d'Ehresmann, comme on l'expliquera dans la section 3. Les sections de ces espaces de jets fournissent une notion générale de solution formelle, c'est à dire de solution où les dérivées sont considérées comme des variables indépendantes.

À l'opposé du  $h$ -principe, on dit qu'un problème est rigide s'il existe des obstructions en plus de ce que fournit la théorie de l'homotopie ou, plus précisément, que l'existence d'une solution formelle n'implique pas l'existence d'une solution authentique. Un exemple très élémentaire est celui des immersions du cercle dans la droite. Il existe bel et bien des applications du cercle dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  mais aucune d'entre elles n'est homotope à une application de la forme  $\theta \mapsto (f(\theta), f'(\theta))$ .

La philosophie du  $h$ -principe et les techniques générales servant à démontrer des résultats de  $h$ -principe ont des applications bien au delà de la topologie différentielle, comme expliqué par exemple dans l'exposé [Vil10] de ce séminaire.

## 1.2. Les structures de contact

Les structures de contact sont des champs d'hyperplans sur des variétés différentiables réelles de dimension impaire qui apparaissent naturellement dans de nombreux contextes incluant l'étude des équations aux dérivées partielles d'ordre un, l'optique géométrique, la thermodynamique, la théorie du contrôle, la dynamique hamiltonienne et la géométrie complexe. On appelle champ d'hyperplans sur une variété  $M$  un sous-fibré de corang 1 du fibré tangent  $TM$ . Dans toute la suite, on évitera des discussions pénibles en supposant que tous les champs d'hyperplans sont coorientés. Sous cette hypothèse, un champ d'hyperplans  $\xi$  se laisse décrire comme le champ des noyaux d'une 1-forme  $\alpha$  globale, coorienté par  $\alpha$  (les vecteurs pointant du côté positif de  $\xi$  sont ceux sur lesquels  $\alpha$  est positive). Deux telles formes se déduisent l'une de l'autre par multiplication par une fonction strictement positive. On dit que  $\xi$  est de contact si la dérivée extérieure  $d\alpha$  restreinte à  $\xi$  est symplectique en tout point  $m$ , c'est à dire que l'application de  $\xi_m$  dans son dual  $\xi_m^*$  qui envoie  $v$  sur  $d\alpha(v, \cdot)$  est un isomorphisme. On dit alors

que  $\alpha$  est une forme de contact. Cette propriété ne dépend que de  $\xi$  et pas du choix de  $\alpha$  parmi les 1-formes ayant  $\xi$  pour noyau car  $d(f\alpha)|_{\ker \alpha} = fd\alpha|_{\ker \alpha}$  pour toute fonction  $f$ . Une variété de contact  $(M, \xi)$  est une variété équipée d'une structure de contact. Les hyperplans  $\xi$  sont alors équipés de la classe conforme de structures symplectiques constituée de tous les  $d\alpha|_{\xi}$ . La condition de contact sur  $\alpha$  est équivalente à l'exigence que  $\alpha \wedge d\alpha^n$  soit une forme volume. En particulier la variété ambiante est orientable. Si on fixe à l'avance une orientation de la variété alors une structure de contact coorientée est dite positive si les formes volumes ainsi obtenues le sont.

La version formelle d'une structure de contact (coorientée et positive) sur une variété orientée  $M$  est une structure presque de contact, c'est à dire une paire  $(\xi, [\omega])$  où  $\xi$  est un champ d'hyperplans coorienté et  $[\omega]$  est une classe conforme de 2-formes dont les restrictions à  $\xi$  sont symplectiques et y définissent une orientation qui se combine avec la coorientation de  $\xi$  pour fournir l'orientation de  $M$ . Autrement dit, on exige que  $\alpha \wedge \omega^n$  soit une forme volume positive pour toute équation  $\alpha$  de  $\xi$  et tout représentant  $\omega$  de la classe conforme. Dans la suite on utilisera souvent une seule lettre (en général  $\zeta$ ) pour désigner une paire  $(\xi, [\omega])$ . La discussion du paragraphe précédent permet d'identifier les structures de contact à des structures presque de contact particulières. On insistera parfois sur la différence en parlant de structures presque de contact et de structures de contact *authentiques*. Comme dans la discussion des immersions du cercles, le passage au cas formel général correspond bien à une perte d'exigence d'holonomie : on ne demande aucun lien entre  $\omega$  et  $d\alpha$ . L'existence d'une structure presque de contact sur une variété  $M$  est équivalente à l'existence d'une réduction du groupe structural de  $TM$  de  $\mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{R})$  à  $U(n) \times \{1\}$ , c'est d'ailleurs sous cette forme qu'elles apparaissent dans [Che53]. Il s'agit bien d'un problème purement homotopique.

Historiquement les structures de contact sont apparues chez S. Lie dans le contexte des équations aux dérivées partielles d'ordre un. Plus exactement les « transformations de contact » (Berührungstransformationen) de Lie sont des difféomorphismes préservant une structure de contact naturelle sur les fibrés de 1-jets de fonctions. On pourra consulter à ce sujet le préluce de l'exposé [Gir10] et l'article [Gei01]. En référence à cette histoire, on nomme encore « transformations de contact » d'une variété de contact  $(M, \xi)$  les difféomorphismes de  $M$  qui préservent  $\xi$ .

D'autres structures de contact proviennent de la géométrie complexe. Par exemple, si  $V$  est une variété algébrique affine lisse de dimension complexe  $n$  dans  $\mathbb{C}^N$  alors son intersection avec presque toute sphère euclidienne est une sous-variété réelle lisse  $\Sigma$  de dimension réelle  $2n - 1$ . En tout point  $\sigma$  de  $\Sigma$ , le sous-espace complexe maximal contenu dans  $T_\sigma \Sigma$  est l'hyperplan réel  $\xi_\sigma = T_\sigma \Sigma \cap iT_\sigma \Sigma$ . La collection de ces hyperplans est une structure de contact.

Les structures de contact sont indissolublement liées aux structures symplectiques. Une forme symplectique sur une variété réelle  $X$  est une 2-forme différentielle  $\omega$  fermée et non-dégénérée, ce qui signifie qu'en tout point  $x$ ,  $\omega_x$  est symplectique, au sens de l'algèbre linéaire, sur  $T_x X$ . Par exemple, sur le cotangent  $T^*N$  de n'importe quelle

variété réelle  $N$ , la forme de Liouville  $\lambda$  est la 1-forme qui, en tout  $p$  dans  $T^*N$  vaut  $p \circ \pi_*$  où  $\pi$  est la projection de  $T^*N$  sur  $N$ . Sa dérivée extérieure  $d\lambda$  est une forme symplectique. Si on munit chaque fibre de  $T^*N$  d'un produit scalaire, la restriction de  $\lambda$  à chaque fibré en sphères y définit une structure de contact. De façon plus invariante, le quotient du complémentaire de la section nulle de  $T^*N$  par l'action des homothéties dans les fibres est une variété de contact. On obtient ainsi des exemples de variétés de contact en partant de variétés symplectiques. Dans l'autre sens, un champ d'hyperplans  $\xi$  sur une variété  $N$  est de contact si et seulement si l'ensemble des éléments non nuls de  $T^*N$  qui s'annulent sur  $\xi$  est une sous-variété symplectique de  $T^*N$ . On obtient ainsi, à partir d'une variété de contact, une variété symplectique qu'on appelle sa symplectisation.

Au contraire des structures riemanniennes, les structures de contact n'ont pas d'invariants locaux, c'est le théorème de Darboux-Pfaff : toute variété de contact de dimension  $2n + 1$  est localement isomorphe à  $\mathbb{R}^{2n+1}$  muni de sa structure de contact standard  $\xi_{\text{std}} = \ker \lambda_0$  où

$$\lambda_0 = dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i - y_i dx_i.$$

Ces structures n'ont pas non plus de déformations non triviales, au moins si la variété ambiante  $V$  est compacte sans bord : pour toute structure de contact  $\xi$  sur  $V$ , l'application du groupe des difféomorphismes  $\text{Diff}(V)$  dans l'espace des structures de contact sur  $V$  qui envoie  $\varphi$  sur  $\varphi_*\xi$  est une fibration localement triviale. En particulier, la propriété de relèvement des chemins pour cette fibration assure que tout chemin  $\xi_t$ ,  $t \in [0, 1]$  issu de  $\xi$  est de la forme  $(\varphi_t)_*\xi$  pour un chemin de difféomorphisme  $\varphi_t$  issu de l'identité, c'est le théorème de Gray.

### 1.3. Rigidité et flexibilité

Au delà de ses interactions avec d'autres branches des mathématiques, l'attractivité de la géométrie de contact (ou symplectique) provient d'un mélange subtil de problèmes vérifiant le  $h$ -principe et de problèmes rigides. Ainsi Eliashberg écrit dans [Eli15] :

Rigid and flexible results coexist in many areas of geometry, but nowhere else do they come so close to each other, as in symplectic topology, which serves as a rich source of examples on both sides of the flexible-rigid spectrum. Flexible and rigid problems and the development of each side toward the other shaped and continue to shape the subject of symplectic topology from its inception.

Dès les années 60 V. Arnold commence à énoncer dans [Arn65] une série de conjectures du côté rigide tandis que Gromov démontre de nombreux théorèmes généraux de  $h$ -principe, en commençant dans [Gro69], qui s'appliquent en particulier en géométrie symplectique et de contact. Comme on l'expliquera dans la section 3, ces théorèmes règlent complètement la question de l'existence des structures de contact sur les variétés ouvertes, c'est à dire les variétés dont aucune composante connexe n'est compacte. Toute structure presque de contact sur une telle variété est homotope à une structure de contact authentique. Dans les années 70, [Lut70] et [Mar71] ont étendu ce résultat aux

variétés fermées, c'est à dire compactes sans bord, de dimension 3. Jusqu'en 2012, la question de l'existence en grande dimension n'a ensuite connu que des résultats sporadiques, notamment dans [Gei91] concernant les variétés de dimension cinq simplement connexes et [Bou02] qui démontre en particulier l'existence de structures de contact sur tous les tores de dimension impaire. En 2012 cette question fut réglée en dimension 5 dans [CPP15]. Le théorème 1.1 est donc un bond considérable.

Les premières avancées décisives du côté rigide datent du début des années 80 avec [Ben83], qui montre que les classes de déformation de structures de contact en dimension 3 ne coïncident pas avec les classes de déformation de structures presque de contact, et [CZ83] qui montre que les systèmes dynamiques liés à la géométrie symplectique ont des spécificités allant au-delà de celles découlant de la préservation du volume. À partir du milieu des années 80 et la révolution des courbes holomorphes de Gromov [Gro85] et de l'homologie de Floer [Flo88], le côté rigide est devenu dominant, comme en témoignent par exemple les exposés [Ben87, Ben90, Sik91, Lau95, Kot97] dans ce séminaire. En particulier les courbes holomorphes permettent de démontrer que chaque sphère de dimension impaire supérieure à 5 porte plusieurs structures de contact apparaissant au bord de variétés complexes qui sont homotopes parmi les structures presque de contact mais pas parmi les structures de contact [Eli91, Gei97, Ust99].

Mais le côté flexible progressait tout de même avec la théorie des structures de contact vrillées dans [Eli89] et la caractérisation topologique des variétés de Stein dans [Eli90]. Au passage cette caractérisation fournit de nombreux exemples de variétés de contact en grande dimension. Il existe aussi des développements importants dont la position dans cette dichotomie est moins tranchée : la théorie des sections hyperplanes symplectiques de Donaldson dans [Don96] et son pendant de contact, la théorie des livres ouverts de Giroux dans [Gir02], qui ont fait l'objet respectivement des exposés [Sik98] et [Col08] de ce séminaire. Ces théories s'appliquent à toutes les variétés symplectiques ou de contact et passent par des constructions ayant une saveur flexible. Mais elles incorporent aussi des arguments quantitatifs plus rigides et aboutissent à des objets rigides.

L'exposé [Gir93] présente l'état du rapport de force entre flexibilité et rigidité en géométrie de contact en dimension 3 au début des années 90. En particulier la confrontation des résultats de [Ben83] et [Eli89] conduit Eliashberg à séparer les structures de contact en dimension 3 en deux classes. Les variétés de contact vrillées, définies par la présence d'un disque de dimension 2 tangent à la structure de contact le long de son bord, ont un comportement flexible : elles existent dans toutes les classes d'homotopie de champs de plans et sont déformables l'une en l'autre parmi les structures de contact si et seulement si elles le sont parmi les champs de plans. La classe complémentaire des structures de contact tendues, qui n'est pas vide d'après le théorème de Bennequin, ne vérifie aucune de ces propriétés. De plus les structures de contact vrillées n'apparaissent jamais au bord de variétés complexes ou symplectiques et les systèmes dynamiques qui leur sont attachés ont des propriétés spécifiques.

L'existence d'une classe analogue de structures de contact vrillées en grande dimension est restée une question ouverte sans conjecture claire jusqu'à l'apparition de [Nie06] où Niederkrüger dégage une classe de structures de contact en toute dimension qui, à l'instar des structures vrillées en dimension 3, ne peuvent apparaître au bord d'une variété symplectique ou complexe. De plus, d'après Bourgeois et Niederkrüger, les invariants basés sur la théorie des courbes holomorphes ne permettent aucune distinction entre ces structures de contact [BN10]. Ces résultats accréditaient l'existence d'une classe flexible en toute dimension, mais le côté flexible de la géométrie de contact n'est vraiment entré dans une nouvelle ère qu'en 2012 avec l'apparition quasi-simultanée de [CPP15] où Casals, Pancholi et Presas règlent la question de l'existence des structures de contact en dimension 5 et de [Mur12] où Murphy démontre un théorème de flexibilité pour certaines sous-variétés des variétés de contact en grande dimension. Ce dernier théorème a notablement redessiné la frontière perçue entre flexibilité et rigidité, avec de nombreuses implications en géométrie symplectique et analyse complexe (voir [Eli15]). À la toute fin de cette même année 2012, Courte s'appuie sur les résultats de flexibilité de [Eli90, EG91] (et [Mur12] pour la dimension 5) pour montrer dans [Cou14] qu'une variété de contact de dimension au moins cinq n'est pas déterminée par sa symplectisation tandis que Murphy, Niederkrüger, Plamenevskaya et Stipsicz démontrent dans [MNPS13] des résultats de flexibilité très spécifiques mais renforçant l'espoir d'une extension de la théorie de structures de contact vrillées en toute dimension.

L'article [BEM15] n'utilise pas formellement ces résultats de 2012 pour démontrer le théorème 1.1 mais est né dans cette ambiance de renouveau du côté flexible. Il va bien au-delà de la question de l'existence et met à jour un classe de structures de contact flexibles en toute dimension. Pour énoncer cette version renforcée du théorème 1.1, il est nécessaire de donner quelques définitions et notations autour des germes de structures de contact. Soit  $F$  une partie quelconque d'une variété  $N$ . Un germe de structure de contact le long de  $F$  est une classe d'équivalence de paires  $(U, \xi)$  où  $U$  est un voisinage ouvert de  $F$  et  $\xi$  une structure de contact sur  $U$  et  $(U, \xi) \sim (V, \zeta)$  si  $\xi = \zeta$  sur un ouvert de  $U \cap V$ . On notera, un peu abusivement,  $(F, \xi)$  la classe d'équivalence d'un  $(U, \xi)$ . Un germe de plongement de  $F$  dans une variété  $M$  est une classe d'équivalence de paires  $(U, \varphi)$  où  $U$  est un voisinage ouvert de  $F$  dans  $N$ ,  $\varphi: U \hookrightarrow M$  est un plongement lisse et avec une relation d'équivalence et un abus de notations analogues. Pour un germe de structure de contact  $(F, \xi)$  fixé, un germe de plongement  $\varphi$  dans une variété  $M$  munie d'un champ d'hyperplan  $\zeta$  est de contact s'il est représenté par un  $\varphi_0: U \hookrightarrow M$  vérifiant  $\varphi_0^* \zeta = \xi$ . Étant donné un germe de plongement  $\varphi: F \hookrightarrow M$  et un germe de structure de contact  $\xi$  le long de  $F$ , on note  $\mathbf{Cont}(M; F, \xi, \varphi)$  l'espace des structures de contact sur  $M$  pour lesquelles  $\varphi$  est de contact. On note  $\mathbf{cont}(M; F, \xi, \varphi)$  l'espace des structures presque de contact sur  $M$  pour lesquelles  $\varphi$  est de contact (en particulier ces structures sont authentiquement de contact au voisinage de l'image de  $\varphi$ ).

**THÉORÈME 1.2** ([BEM15]). — *Pour tout entier  $n$  strictement positif, il existe un disque fermé  $D_{\text{ot}}$  de dimension  $2n$  lisse par morceaux dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  et un germe de structure de*

contact  $\xi_{\text{ot}}$  le long de  $D_{\text{ot}}$  tel que, pour tout germe de plongement  $\varphi : D_{\text{ot}} \hookrightarrow M$  de  $D_{\text{ot}}$  dans une variété  $M$  de dimension  $2n + 1$ , l'inclusion de  $\mathbf{Cont}(M; D_{\text{ot}}, \xi_{\text{ot}}, \varphi)$  dans  $\mathbf{cont}(M; D_{\text{ot}}, \xi_{\text{ot}}, \varphi)$  est une équivalence d'homotopie faible.

De plus il est élémentaire de vérifier que, pour tout  $\varphi$ , toute structure presque de contact  $\zeta$  sur une variété  $M$  de dimension  $2n + 1$  est homotope à un élément de  $\mathbf{cont}(M; D_{\text{ot}}, \xi_{\text{ot}}, \varphi)$ . Le théorème précédent permet donc d'établir le théorème 1.1. On appelle disque vrillé tout germe  $(D_{\text{ot}}, \xi_{\text{ot}})$  vérifiant les conclusions du théorème et structures de contact vrillées les éléments de  $\mathbf{Cont}(M; D_{\text{ot}}, \xi_{\text{ot}}, \varphi)$  pour un certain plongement  $\varphi$ . Deux disques vrillés de même dimension ne sont pas nécessairement isomorphes mais, a posteriori, le théorème ci-dessus (assisté du théorème de Gray) implique que tout voisinage d'un disque vrillé contient une copie de tout autre disque vrillé de même dimension. On peut aussi déduire de ces théorèmes que, sur une variété compacte sans bord, deux structures de contact vrillées qui sont homotopes parmi les structures presque de contact sont isotopes. C'est la flexibilité promise, elle contraste avec les résultats concernant les sphères mentionnés plus haut.

Il faut noter que la démonstration d'existence d'au moins un disque vrillé par dimension dans [BEM15] n'est pas explicite. La démonstration est constructive mais passe par un tel empilement d'étapes qu'il semble difficile d'obtenir une description explicite en la suivant. Cependant, dans [CMP15], Casals, Murphy et Presas démontrent des critères plus maniables permettant d'assurer qu'une variété de contact est vrillée. En particulier une structure de contact sur une variété compacte sans bord est vrillée si et seulement si elle est portée, au sens de Giroux, par un livre ouvert qui est une stabilisation négative, voir l'exposé [Col08] pour les définitions de ces termes. Cette condition avait été proposée par Giroux comme une façon prometteuse de définir les structures de contact vrillées en grande dimension. De même l'existence de certains plastikstufes de Niederkrüger est équivalente à l'existence d'un disque vrillé. Enfin une variété de contact est vrillée si et seulement si elle contient un ouvert isomorphe à  $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{2n-2}, \ker(\alpha + \lambda))$  où  $(\mathbb{R}^3, \ker \alpha)$  est un voisinage d'un disque vrillé de dimension 3 et  $\lambda$  est une 1-forme standard. Cette condition avait été conjecturée comme étant la bonne par Niederkrüger, par exemple dans [Nie13]. En particulier les conjectures de Giroux et Niederkrüger étaient équivalentes, un fait qui avait résisté aux tentatives de démonstrations directes.

Ainsi le théorème 1.2 clôt la quête d'une classe de structures de contact flexible en grande dimension et, avec l'aide de [CMP15], unifie l'essentiel des tentatives précédentes. Un tel succès renforce considérablement l'élan du côté flexible, déjà bien relancé en 2012. En particulier, on peut légitimement espérer des progrès aussi du côté symplectique. En laissant de côté le monde étrange de la dimension 4, la question est : si une variété fermée  $M$  de dimension paire  $2n \geq 6$  admet une structure presque complexe  $(J \in \text{End}(TM), J^2 = -\text{Id})$  et une classe de cohomologie de de Rham  $\Omega$  de degré 2 telle que  $\Omega^n \neq 0$ , admet-elle une structure symplectique ? Pour l'instant la question reste ouverte, mais [EM15] apporte déjà des résultats dans cette direction.

*Remerciements.* — En plus de l'article [BEM15], ce texte s'appuie sur de nombreuses ressources pédagogiques. Il s'agit, dans l'ordre où je les ai consultées, de : des exposés de Yakov Eliashberg au BIRS à Banff (disponible sur Youtube) et à l'UCL à Londres, un groupe de travail à l'ENS Lyon animé par Sylvain Courte et Alexandre Vérine, une série d'articles par Laura Starkston et Roger Casals sur le blog « The electric handle slide », un cours d'Emmy Murphy à l'université de Glasgow et des notes par Nick Sheridan d'un cours de Matthew Strom Borman à l'IAS (les notes sont sur le site de Borman et le cours lui-même est disponible sur Youtube). Je remercie aussi Yakov Eliashberg pour ses réponses à mes questions durant la préparation de ce texte et Sylvain Courte pour d'enrichissantes discussions au sujet de cette démonstration. Enfin je remercie Alexandre Vérine, Hélène Eynard et Sylvain Courte pour leurs commentaires sur des versions préliminaires de ce texte.

## 2. PLAN DE LA DÉMONSTRATION

On présente ici une vue d'ensemble de la démonstration du théorème 1.2, au prix d'un certain flou dans quelques définitions et énoncés. Les sections suivantes contiennent des définitions et énoncés précis ainsi que quelques éléments de démonstrations. Ici et dans toute la suite, la discussion est simplifiée en ne retenant de l'équivalence d'homotopie promise que la surjectivité sur les composantes connexes. Cet énoncé plus faible fait déjà apparaître toutes les idées essentielles. Il s'agit donc de démontrer, en voyant apparaître naturellement les disques vrillés, le théorème 1.1 : toute structure presque de contact est homotope à une structure de contact. Ici et dans toute la suite, on supposera connexes toutes les variétés intervenant. Cela n'occasionne aucune perte de généralité.

Comme évoqué plus haut et détaillé dans la section 3, les techniques développées par Gromov dans [Gro69] permettent de régler le cas des variétés ouvertes (c'est à dire dont aucune composante n'est compacte sans bord). La démonstration dans le cas des variétés fermées commence par l'idée la plus naïve possible : en retirant une boule d'une variété fermée, on obtient une variété ouverte. Ainsi il existe une homotopie qui rend la structure presque de contact authentique dans le complémentaire d'une boule. On a donc résolu le problème en laissant un trou.

Cette première réduction conduit au problème dit des coquilles de contact. Une coquille de contact est une boule  $B$ , à bord lisse par morceaux, munie d'une structure presque de contact  $\zeta$  qui est de contact près du bord. On cherche une homotopie relative au bord déformant  $\zeta$  en structure de contact. On dit que deux coquilles de contact  $(B, \zeta)$  et  $(B', \zeta')$  sont équivalentes s'il existe un difféomorphisme  $\varphi : B \rightarrow B'$  tel que  $\varphi_*\zeta$  est homotope à  $\zeta'$  relativement au bord. Ainsi le problème des coquilles de contact consiste à montrer que toute coquille est équivalente à une coquille pour laquelle  $\zeta$  est partout une authentique structure de contact. L'ensemble des coquilles de contact est naturellement ordonné par ce problème. En effet, soit  $(B, \zeta)$  et  $(B', \zeta')$  deux coquilles de contact. Supposons que l'on puisse déformer  $\zeta$  relativement au bord de  $B$  jusqu'à la



rendre de contact sur un voisinage  $U$  de  $\partial B$  tel que  $B \setminus U$  munie de la restriction de  $\zeta$  soit équivalente à  $(B', \zeta')$ . Dans ce cas la résolution du problème pour  $(B', \zeta')$  entraîne immédiatement sa résolution pour  $(B, \zeta)$  et on dit que  $(B, \zeta)$  domine  $(B', \zeta')$ .

On considère donc une coquille de contact  $(B, \zeta)$  à déformer. Par déformation sur une petite boule  $B' \subset B$ , on se ramène à un problème analogue sur un anneau  $\mathbb{S}^{2n} \times [0, 1]$  muni de la restriction de  $\zeta$  qui est maintenant de contact au voisinage de  $\mathbb{S}^{2n} \times \{0, 1\}$ . L'idée suivante est de recouvrir cet anneau par  $N - 1$  tranches  $M_j = \mathbb{S}^{2n} \times [j/N - 1/N, j/N + 1/N]$  auxquelles on applique le théorème de Gromov pour déformer la restriction de  $\zeta$  en une structure de contact  $\xi_j$ . Bien sûr les structures obtenues n'ont aucune raison de se recoller sur les intersections des tranches. Mais le théorème de Gromov fonctionne en famille donc les structures obtenues sont très proches les unes des autres si  $N$  est très grand. Une variante du théorème de Gray, qui atteste l'absence de déformation des structures de contact modulo isotopie, entraîne alors que le germe de  $\xi_{j+1}$  le long de  $S_{j+1} = \mathbb{S}^{2n} \times \{(j+1)/N\}$  apparaît le long d'une hypersurface  $S'_j$  dans  $M_j$  qui est le graphe d'une fonction de  $S_j$  dans  $[j/N - 1/N, j/N + 1/N]$ . Des techniques de localisation de cette fonction permettent d'obtenir une structure de contact dans le complémentaire d'un nombre fini de trous. Chacun de ces trous est une coquille de contact mais dont la structure presque de contact est bien mieux contrôlée qu'initialement.

En effet ces coquilles dominent ce qu'on appelle des trous circulaires et qu'il est commode, pour l'instant, de décrire de la façon suivante. Ces trous sont difféomorphes à  $\Delta \times \mathbb{D}^2$  où  $\Delta$  est une boule dans  $\mathbb{R}^{2n-1}$  et équipées d'une structure presque de contact  $\zeta$  qui, près du bord, est une structure de contact de la forme  $\ker(\lambda_0 + \bar{K}(x, r)d\theta)$  où  $\lambda_0$  est la forme de contact standard sur  $\mathbb{R}^{2n-1}$ ,  $x$  est dans  $\Delta$  et  $re^{i\theta}$  dans  $\mathbb{D}^2$ . Ce modèle est donc paramétré par le choix de boule  $\Delta$  et surtout par la fonction  $K = \bar{K}(x, 1)$ . Cette fonction, appelée hamiltonien du trou, va de  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}$  et est nécessairement strictement positive au voisinage du bord. La description complète de  $\zeta$  demande de préciser plus de choses mais celles-ci n'influent pas sur la classe d'équivalence de coquille de contact obtenue. On notera abusivement  $(B_K, \zeta_K)$  un représentant quelconque de cette classe. La discussion menée jusqu'ici conduit à l'énoncé suivant, pour lequel on donnera un peu plus de détails dans la section 4.

**PROPOSITION 2.1** (Réduction aux trous circulaires). — *Toute structure presque de contact  $\zeta$  est homotope à une structure qui est de contact dans le complémentaire d'un nombre fini de trous circulaires. De plus, si  $\zeta$  est déjà de contact au voisinage d'un fermé  $A$ , on peut construire cette homotopie relativement à un voisinage de  $A$ .*

On veut ensuite se ramener à un unique modèle de trou circulaire. Si le hamiltonien du trou est partout strictement positif alors ce dernier est très facile à remplir. Le point crucial suivant est que l'ordre sur les coquilles de contact est compatible avec l'ordre sur les hamiltoniens : si  $\Delta' \subset \Delta$  et  $K' \leq K$  alors le trou circulaire  $(B_{K'}, \zeta_{K'})$ , associé à  $(\Delta, K)$ , domine  $(B_K, \zeta_K)$ . On dira donc que  $K$  domine  $K'$ . Le groupe des transformations de

contact de  $\mathbb{R}^{2n-1}$  agit sur les paires  $(\Delta, K)$  : la coquille de contact associée à  $(\Delta, K)$  est équivalente à celle associée à  $(\Phi(\Delta), \Phi_*K)$  où  $\Phi_*K(x) = c_\Phi(\Phi^{-1}(x))K(\Phi^{-1}(x))$ ,  $c_\Phi(x)$  étant le facteur conforme de  $\Phi$ , défini par  $\Phi^*\lambda_0 = c_\Phi\lambda_0$ . En effet, avec cette définition,  $(\Phi \times \text{Id})^*(\lambda_0 + \Phi_*K(x, r)d\theta) = c_\Phi(x)\lambda_0 + \Phi_*K(\Phi(x), r)d\theta = c_\Phi(x)(\lambda_0 + K(x, r)d\theta)$

Ainsi le problème d'existence des structures de contact est lié à l'étude de la relation d'ordre sur les paires  $(\Delta, K)$  modulo l'action des transformations de contact. Lorsque la variété ambiante est de dimension 3, et donc  $\Delta$  de dimension un, on montre de façon complètement élémentaire l'existence d'un hamiltonien explicite qui, modulo l'action des transformations de contact, est inférieur à n'importe quel autre. En fait n'importe quel hamiltonien qui est quelque part strictement négatif convient.

En dimension plus grande, l'existence d'une telle classe de hamiltoniens reste à ce jour une question ouverte. Pour exprimer l'énoncé plus faible mais suffisant qui est connu on généralise légèrement la notion de domination. On dit qu'une coquille de contact  $(B, \zeta)$  domine une collection de coquilles de contact  $(B_i, \zeta_i)$  si  $\zeta$  est homotope, relativement au bord, à une structure presque de contact qui est authentique dans le complémentaire d'une collection de coquilles de contact équivalentes aux  $(B_i, \zeta_i)$ .

**PROPOSITION 2.2** (Existence de trous universels). — *En chaque dimension, il existe un trou circulaire  $(B_{\text{univ}}, \xi_{\text{univ}})$  universel, c'est à dire tel que tout trou circulaire domine une collection finie de trous tous équivalents à  $(B_{\text{univ}}, \xi_{\text{univ}})$ .*

Le mot universel se réfère au fait que tout trou circulaire est concerné mais ne suggère pas l'unicité du trou universel. En effet tout trou dominé par un trou universel est universel. Le premier ingrédient de la démonstration de la proposition ci-dessus est un critère portant sur les domaines de  $(\mathbb{R}^{2n-1}, \xi_{\text{std}})$  étoilés. Ici et dans toute la suite, le mot domaine désigne un compact d'intérieur non vide et dont le bord est lisse par morceaux. On dit qu'il est étoilé si son bord est transversal au champ de vecteurs

$$Z = 2z\partial_z + \sum(x_i\partial_{x_i} + y_i\partial_{y_i}).$$

**PROPOSITION 2.3** (Désordre et domination). — *Sur une boule étoilée  $\Delta$ , pour qu'un hamiltonien  $K_1$  en domine un autre  $K_0$  modulo transformation de contact, il suffit qu'il existe une sous-boule  $\Delta' \subset \Delta$  au voisinage de laquelle  $K_0$  est strictement négatif et hors de laquelle  $K_1$  est positif et domine  $K_0$ .*

Le cheminement de la démonstration (qui sera expliquée plus en détail dans la section 5.2) est le suivant. Les hypothèses permettent de se ramener au cas où  $K_0$  est strictement négative en l'origine et nulle sur un voisinage du bord où  $K_1$  est strictement positive. On utilise une version tronquée du flot de  $Z$  pour agir sur  $K_0$  avec un facteur conforme très grand sur un voisinage de l'origine envoyé sur presque toute la boule. Le facteur conforme est hors de contrôle près du bord mais il y est multiplié par  $K_0$  qui est nul.

Pour démontrer la proposition 2.2, l'ingrédient suivant est l'addition des hamiltoniens. Soit  $D_j$ ,  $j \in J$ , une famille ordonnée de boules fermées dans  $\Delta \times \mathbb{S}^1$  et  $\phi_j : D_j \rightarrow$

$\mathbb{R}$  des fonctions strictement positives près du bord et nulles au bord. Une variante de la construction des coquilles  $(B_K, \zeta_K)$  fournit une famille de coquilles de contact  $(B_j, \zeta_j)$ . Chacune de ces coquilles dépend de la géométrie de contact du support de  $\phi_j$  et de la somme des  $\phi_i$ ,  $i < j$  sur ce support. Soit  $K$  un hamiltonien sur  $\Delta$ . Si  $\sum_j \phi_j(x, t) \leq K(x)$  pour tout  $(x, t) \in \Delta \times \mathbb{S}^1$  alors la coquille de contact  $(B_K, \zeta_K)$  domine la collection des  $(B_j, \zeta_j)$ . Il s'agit essentiellement du même phénomène que celui permettant la localisation dans la discussion conduisant à la proposition 2.1.

Pour exploiter ce lien entre addition et domination, il est crucial de pouvoir contrôler le nombre de coquilles  $(B_j, \zeta_j)$  susceptibles d'apparaître tout en contrôlant la valeur des sommes de  $\phi_j$  là où elles sont positives (la proposition 2.3 atteste que la partie négative n'importe pas). Pour cela il suffit de disposer d'une famille de recouvrements de  $\Delta \times \mathbb{S}^1$  de plus en plus fins qui, localement, ne diffèrent que par un changement d'échelle d'un facteur conforme de plus en plus petit. Le point crucial est que  $\mathbb{R}^{2n+1}$  muni de sa structure de contact standard peut être vu comme un groupe de Lie très particulier, le groupe de Heisenberg, muni d'une structure de contact invariante à droite. Ce groupe admet des réseaux co-compacts, ce qui permet de recouvrir  $\mathbb{R}^{2n+1}$  par des ouverts relativement compacts ayant tous la même géométrie de contact et intersectant tous leurs voisins de la même façon. Mais en plus il admet un flot d'automorphismes extérieurs  $\delta^\lambda$ , les dilatations de Heisenberg, qui préservent la structure de contact, ont pour facteur conforme  $\lambda^2$  et rétrécissent arbitrairement n'importe quel compact quand  $\lambda$  tend vers zéro. En particulier, à l'instar de la situation en géométrie euclidienne mais au contraire de la géométrie hyperbolique, ce groupe admet des réseaux cocompact de covolume arbitrairement petit. Grâce à cette particularité, on peut construire des familles comportant de très nombreuses fonctions  $\phi_j$  dont les coquilles  $(B_j, \zeta_j)$  se répartissent dans un nombre fini de classes d'équivalence qui ne dépend que de la dimension. Tout trou dominé par un représentant de chacune de ces classes est ainsi universel.

La réduction au trou universel ramène le problème d'existence des structures de contact à l'examen d'un unique trou circulaire qui ne dépend que de la dimension et dont la forme (mais pas les paramètres exacts) est explicite. Cependant le hamiltonien de ce trou universel n'est pas positif donc il n'y a pas de solution évidente et il faut encore faire un détour.

Comme décrit plus précisément dans la section 6, ce détour passe par l'opération de somme connexe des coquilles de contact et l'existence de coquilles de contact ayant une propriété de doublement contrôlé. Étant données deux coquilles de contact  $(B, \zeta)$  et  $(B', \zeta')$  dans une même variété presque de contact  $(M, \zeta_M)$  et un arc  $\gamma$  reliant  $\partial B$  à  $\partial B'$  d'une façon convenable en ne traversant que des régions où  $\zeta_M$  est de contact, on peut épaissir légèrement  $B \cup \gamma \cup B'$  en une nouvelle coquille de contact notée  $(B \# B', \zeta \# \zeta')$ . Cette coquille est essentiellement indépendante du choix de  $\gamma$  et de l'épaississement et on a donc une opération définie abstraitement sur les coquilles de contact, sans variété ambiante.

Une coquille de contact  $(B, \zeta)$  est dite doublante si elle est dominée par son double  $(B\#B, \zeta\#\zeta)$  et que cette domination est triviale au-dessus du complémentaire d'un disque  $D \subset \partial B$ . Plus précisément, on dit que  $(B, \zeta)$  est doublante le long d'un disque  $D \subset \partial B$  si, pour tout petit voisinage tubulaire  $\partial B \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  du bord de  $B$ , il existe une structure de contact  $\xi$  sur un anneau sphérique  $S \times [0, 1]$ , un disque  $D'$  dans  $S$  et des isomorphismes compatibles entre certains germes. Pour décrire ces isomorphismes illustrés sur la figure 1, on note  $S_r = S \times \{r\}$  etc. On demande

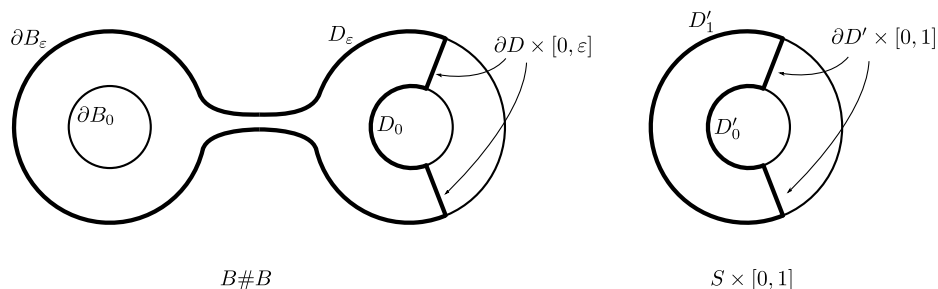


FIGURE 1. Propriété de doublement de coquille.

$$\begin{aligned} (S_0, \xi) &\simeq (\partial B_0, \zeta) \text{ où } D'_0 \text{ correspond à } D_0 \\ (S_1, \xi) &\simeq (\partial B_\varepsilon \# \partial B_\varepsilon, \zeta \# \zeta) \text{ où } D'_1 \text{ correspond à } \partial B_\varepsilon \# D_\varepsilon \\ (\partial D' \times [0, 1], \xi) &\simeq (\partial D \times [0, \varepsilon], \zeta). \end{aligned}$$

LEMME 2.4. — Soit  $(B, \zeta)$  une coquille de contact doublante le long d'un disque  $D$ . Soit  $(M, \eta)$  une variété presque de contact contenant  $(B, \zeta)$  et une copie disjointe du germe  $(D, \zeta)$ . On suppose qu'il existe un arc  $\gamma$  reliant  $B$  à  $D$  au voisinage duquel  $\zeta$  est de contact. Alors la restriction de  $\eta$  à un voisinage  $U$  de  $B \cup \gamma \cup D$  suffisamment petit est homotope à une structure de contact, relativement au complémentaire de  $U$ .

La démonstration de ce lemme est pratiquement incluse dans la définition de coquille doublante. Quitte à modifier  $\gamma$  dans  $U$ , on peut supposer qu'il existe un domaine réunion d'un voisinage  $B \cup (B \times [0, \varepsilon])$  de  $B$ , d'un tube autour de  $\gamma$  et d'un  $D \times [0, \varepsilon]$  s'appuyant sur  $D = D \times \{0\}$  dont le bord correspond à la réunion des hypersurfaces  $\partial B_\varepsilon \# D_\varepsilon$ ,  $\partial D \times [0, \varepsilon]$  et  $D_0$  apparaissant dans la condition de doublement. Ainsi on peut remplacer ce domaine, qui contient en particulier  $B$ , par la partie correspondante de  $S \times [0, 1]$  munie de la structure de contact  $\xi$ .

Bien sûr l'existence de coquilles doublantes n'a rien d'évident, elle est même décrite comme étant le « main lemma » dans [BEM15].

PROPOSITION 2.5 (Doublement). — Tout trou circulaire domine une coquille de contact doublante.

Ces coquilles sont construites comme trous circulaires associés à des couples  $(\Delta, K)$  dits spéciaux. La somme connexe  $B_K \# B_K$  est encore un trou circulaire, associé à un certain couple  $(\Delta \# \Delta, K \# K)$ . La démonstration de la proposition 2.5 consiste à construire un plongement de contact  $\Theta$  de  $\Delta$  dans son double  $\Delta \# \Delta$  et surtout à montrer que, pour un bon choix de  $K$ ,  $\Theta_* K \leq K \# K$ . Les  $K$  peuvent être choisis dans une famille explicite mais ni cette explicitation ni la démonstration ne parviennent à dissiper complètement l'impression que la proposition est miraculeuse.

Si une coquille de contact  $(B, \zeta)$  est doublante le long d'un disque  $D$  et dominée par un trou circulaire universel alors le germe  $(D, \xi)$  est un disque vrillé. On rappelle que cela signifie que la conclusion du théorème 1.2 s'applique pour  $(D, \xi)$ . Les propositions 2.2 et 2.5 assurent donc l'existence d'un disque vrillé en toute dimension. Ici on explique simplement pourquoi un tel germe  $(D_{\text{ot}}, \xi_{\text{ot}})$  permet de démontrer le théorème 1.1, en rassemblant tous les morceaux de la discussion ci-dessus.

Soit  $(M, \zeta)$  une variété presque de contact. Comme toutes les structures presque de contact sur une boule sont homotopes pourvu qu'on ne fixe aucune condition au bord, on peut déformer  $\zeta$  jusqu'à ce que  $(D_{\text{ot}}, \xi_{\text{ot}})$  se plonge dans  $(M, \zeta)$ . On note  $V$  un voisinage de  $D_{\text{ot}}$  dans  $M$ . On retire à  $M$  une boule  $B$  disjointe de  $V$ . On obtient ainsi une variété ouverte. Le théorème de Gromov admet une version relative : il n'est nul besoin de modifier les structures presque de contact là où elles sont déjà de contact, pourvu que le complémentaire de ces régions soit ouvert. Ainsi on peut supposer que  $\zeta$  est de contact dans le complémentaire de  $B$  et contient toujours sa copie de  $(D_{\text{ot}}, \xi_{\text{ot}})$  dans  $V$ . On a ainsi un trou et un disque.

La proposition 2.1 permet de remplacer le trou  $(B, \zeta)$  par une multitude de petits trous circulaires. Soit  $(B_{\text{univ}}, \xi_{\text{univ}})$  un trou universel dominant la coquille  $(B_{\text{ot}}, \zeta_{\text{ot}})$  ayant servi à construire  $(D_{\text{ot}}, \xi_{\text{ot}})$ . Par définition d'un trou universel, on peut remplacer chacun des trous circulaires par encore des petits trous isomorphes à  $(B_{\text{univ}}, \xi_{\text{univ}})$  puis chacun de ces trous par toujours des petits trous mais équivalents à  $(B_{\text{ot}}, \zeta_{\text{ot}})$  puisque ce dernier est dominé par  $(B_{\text{univ}}, \xi_{\text{univ}})$ .

À ce stade, la propriété de doublement (sans se préoccuper du disque, en utilisant simplement que  $B_{\text{ot}} \# B_{\text{ot}}$  domine  $B_{\text{ot}}$ ) permet de se ramener à un seul trou. En effet tant qu'il y a au moins deux trous on peut en faire la somme connexe et la remplacer par un seul trou. Lorsqu'il ne reste plus qu'un trou, on le relie au disque contenu dans  $V$  par un arc et on conclut par le lemme 2.4.

### 3. APPROXIMATION HOLONOME ET STRUCTURES DE CONTACT

Le but de cette section est d'expliquer comment l'existence de structures de contact sur les variétés ouvertes découle d'un théorème général permettant de démontrer de nombreux résultats de  $h$ -principe, presque sans aucun argument spécifique. Au passage

on explique comment les espaces de jets d'Ehresmann donnent un cadre général permettant de considérer les dérivées comme variables indépendantes, comme on l'a fait dans la discussion des immersions du cercle dans l'introduction.

Soit  $p: X \rightarrow M$  une fibration localement triviale. Le fibré  $p^r: X^{(r)} \rightarrow M$  des  $r$ -jets de germes de sections de  $p$  a pour fibre au-dessus de  $m$  l'ensemble des classes d'équivalence de sections définies sur un voisinage de  $m$ , deux sections étant équivalentes si, vue dans des cartes, elles ont même développement de Taylor en  $m$  jusqu'à l'ordre  $r$ . Toute section  $s$  de  $p$  définit tautologiquement une section  $j^r s$  de  $X^{(r)}$ .

Une relation différentielle d'ordre  $r$  sur les sections de  $p$  est une partie  $\mathcal{R}$  de l'espace total du fibré  $X^{(r)}$ . Une solution (authentique) de  $\mathcal{R}$  est une section  $s: M \rightarrow X$  de  $p$  dont le  $r$ -jet  $j^r s$  prend ses valeurs dans  $\mathcal{R}$ . Une solution formelle de  $\mathcal{R}$  est une section de  $p^r$  à valeurs dans  $\mathcal{R}$  mais qui n'est pas nécessairement holonome, c'est à dire de la forme  $j^r s$  pour une section  $s$  de  $p$ . Pour les relations différentielles usuelles, l'existence de solutions formelles est un problème de nature homotopique, qui relève de la théorie de l'obstruction. Par définition, la relation  $\mathcal{R}$  vérifie le  $h$ -principe si toute solution formelle est homotope à une solution authentique. On peut renforcer cette exigence en considérant des familles de solutions, on parle alors de  $h$ -principe à paramètres, ou en fixant les solutions dans certaines régions de  $M$ , on parle alors de  $h$ -principe relatif. Dans l'exemple des immersions utilisé dans l'introduction,  $M = \mathbb{S}^1$ ,  $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$  et la trivialisatation naturelle de  $T\mathbb{S}^1$  permet d'identifier  $X^{(1)}$  à  $\mathbb{S}^1 \times T\mathbb{R}^2$  de sorte que  $j^1 \gamma$  devienne  $\theta \mapsto (\theta, \gamma(\theta), \dot{\gamma}(\theta))$ . La contrainte d'immersion devient la relation différentielle  $\mathcal{R} = \{(\theta, p, v) \in X^{(1)}; v \neq 0\}$ . La famille des  $\theta \mapsto (\theta, \gamma_t(\theta), \Gamma_t(\theta))$  considérée plus haut est une famille de solutions formelles à déformer, relativement au bord de l'espace  $[0, 1]$  des paramètres, en famille de solutions authentiques.

On peut maintenant énoncer le théorème général permettant de déformer toute structure presque de contact sur une variété ouverte en structure de contact. Il s'agit d'une variante de la méthode de relèvement des homotopies pour les faisceaux continus de Gromov. La méthode d'origine provient de [Gro69] et est exposée dans [Gro86], la variante très maniable énoncée ci-dessous est due à Eliashberg et Mishachev dans [EM01]. Dans l'énoncé, on appelle polyèdre dans une variété  $V$  tout sous-complexe d'une triangulation lisse de  $V$  (au sens de Whitehead).

**THÉORÈME 3.1** (Théorème d'approximation holonome d'Eliashberg et Mishachev)

*Soit  $X \rightarrow V$  un fibré,  $A \subset V$  un polyèdre de codimension strictement positive et  $F$  une section de  $X^{(r)}$  définie sur un voisinage  $U$  de  $A$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une isotopie  $\delta_t: V \rightarrow V$  qui est  $\varepsilon$ -proche de l'identité en topologie  $C^0$  et une section holonome  $F'$  définie sur un voisinage de  $\delta_1(A)$  et  $\varepsilon$ -proche de  $F$  en topologie  $C^0$  sur ce voisinage.*

L'énoncé ci-dessus suppose implicitement qu'on a fixé des métriques riemanniennes sur  $V$  et  $X^{(r)}$  permettant de parler de distance entre les points de  $V$  et entre sections de  $X^{(r)}$ . L'énoncé obtenu est indépendant de ces choix, au moins si  $A$  est compact,

ce qui suffira pour nous (si  $A$  n'est pas compact il faut remplacer  $\varepsilon$  par une fonction strictement positive et tout reste vrai).

L'archétype d'application élémentaire du théorème d'approximation holonome est la construction de chemins de randonnée. Dans cet exemple,  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $X$  est le fibré trivial  $M \times \mathbb{R}$  et  $r = 1$ . Ainsi  $X^{(1)}$  s'identifie au fibré trivial  $M \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2)^*$  et une section est holonome si elle est de la forme  $x \mapsto (x, f(x), df(x))$ . Le plan  $M$  représente la carte d'une région montagneuse. Cette carte est accompagnée d'une fonction d'altitude  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ . On cherche un chemin de pente partout très faible allant de  $x_0$  où  $h = 0$  à  $x_1$  où  $h = h_1 \gg 1$  en restant à proximité du segment  $K = [x_0, x_1]$  supposé de longueur  $\varepsilon \ll 1$ . La section de référence  $F$  de  $X^{(1)}$  est donc  $x \mapsto (x, h(x), 0)$ . Cette section est très loin d'être holonome. En effet l'inégalité des accroissements finis interdit l'existence d'une fonction de  $[0, \varepsilon]$  dans  $[0, h_1]$  ayant une dérivée très proche de zéro. Mais en remplaçant  $K$  par un chemin très long qui oscille dans un voisinage arbitrairement petit de  $K$ , cette obstruction disparaît et la solution existe, en creusant ou remblayant arbitrairement peu la montagne et avec une pente arbitrairement petite. C'est le concept de chemin en lacets. La codimension strictement positive de  $K$  dans  $M$  est cruciale car elle donne de la place pour osciller. Bien sûr le théorème ne promet aucun contrôle sur la norme  $C^1$  de l'isotopie  $\delta$  : il est nécessaire de s'éloigner beaucoup de la direction de  $K$ .

La définition des structures presque de contact donnée dans l'introduction ne rentre pas tout à fait directement dans le cadre des sections d'espaces de jets mais on explique maintenant comment s'y ramener facilement.

Soit  $\alpha$  une forme différentielle sur un espace affine  $\mathcal{E}$  dirigée par un espace vectoriel  $E$ . Si on voit  $\alpha$  comme fonction de  $\mathcal{E}$  dans  $\Lambda^k E^*$ , la dérivée extérieure  $d\alpha$  peut être vue comme  $k + 1$  fois l'antisymétrisation de la différentielle  $D\alpha$  allant de  $\mathcal{E}$  dans  $\otimes^{k+1} E^*$ . Cette description locale montre qu'il existe un opérateur  $D: (\Lambda^k T^*V)^{(1)} \rightarrow \Lambda^{k+1} T^*V$  tel que, pour toute  $k$ -forme  $\alpha$  sur  $V$ ,  $d\alpha = D(j^1\alpha)$ . De plus  $D$  est linéaire et surjectif en restriction à chaque fibre de  $\pi: (\Lambda^k T^*V)^{(1)} \rightarrow \Lambda^k T^*V$ .

Soit maintenant  $V$  une variété ouverte et  $(\xi, [\omega])$  une structure presque de contact sur  $V$ . Soit  $\alpha$  une 1-forme de noyau  $\xi$ . La condition presque de contact est  $\alpha \wedge \omega^n > 0$ . Soit  $F$  une section (non-holonome) de  $(T^*V)^{(1)}$  telle que  $\pi \circ F = \alpha$  et  $D \circ F = \omega$ . L'existence de  $F$  est assurée par la surjectivité discutée ci-dessus. Comme  $V$  est ouverte, elle se rétracte par isotopie sur un voisinage arbitrairement petit d'un polyèdre  $A$  de codimension strictement positive. Pour le voir on fixe une triangulation lisse de  $V$  et, pour chaque simplexe  $\sigma$  de dimension  $n = \dim(V)$  on retire à  $V$  un arc allant de l'intérieur de  $\sigma$  à l'infini en ne rencontrant que des simplexes de dimension  $n$  et  $n - 1$ . La variété  $V$  se rétracte sur le complémentaire d'un voisinage de ces arcs, puis sur un voisinage arbitrairement petit du sous-complexe formé des simplexes n'intersectant aucun de ces arcs.

On peut donc appliquer le théorème d'approximation holonome pour obtenir une isotopie  $\delta$  et une approximation holonome  $F' = j^1\alpha'$  de  $F$  sur un voisinage  $W$  de  $\delta_1(A)$ .

Comme  $F'$  est très proche de  $F$ ,  $\alpha' = \pi \circ F'$  est très proche de  $\alpha = \pi \circ F$  tandis que  $D \circ F' = d\alpha'$  est très proche de  $D \circ F = \omega$ . Ainsi  $\alpha' \wedge d\alpha'^m$  vérifie aussi la condition ouverte de non annulation sur  $W$  donc  $\ker \alpha'$  est une authentique structure de contact homotope à  $(\alpha, \omega)$  (le segment entre les deux fournissant une homotopie  $(\alpha_s, \omega_s)$ ).

Soit  $g_t$  une isotopie de plongements de  $V$  dans  $V$  issue de l'identité et telle que  $g_1(V) \subset W$ . Comme la condition de contact est invariante par difféomorphisme local,  $\alpha'' = g_1^* \alpha'$  définit aussi une structure de contact, cette fois ci sur  $V$  tout entière. En concaténant les homotopies  $t \mapsto g_t^*(\alpha, [\omega])$  et  $s \mapsto g_1^*(\alpha_s, \omega_s)$ , on obtient une homotopie reliant  $(\alpha, [\omega])$  à  $(\alpha'', [d\alpha''])$  parmi les structures presque de contact.

Dans la discussion ci-dessus, on notera les rôles cruciaux joués par les trois faits suivants :  $V$  est ouverte, la relation différentielle pertinente est ouverte et elle est invariante par difféomorphisme. C'est ainsi que le théorème d'approximation holonome permet de redémontrer le théorème de Gromov assurant la validité du  $h$ -principe en toute généralité sous ces trois hypothèses.

## 4. RÉDUCTION AUX TROUS CIRCULAIRES

### 4.1. Soucoupes et partitions de l'unité

Comme expliqué dans la section 2, après application au complémentaire d'une boule du théorème de Gromov discuté dans la section précédente, le travail a lieu dans  $\mathbb{S}^{2n} \times [0, 1]$  découpé en fines tranches  $M_j = \mathbb{S}^{2n} \times [j/N - 1/N, j/N + 1/N]$  autour de  $S_j = \mathbb{S}^{2n} \times \{j/N\}$ . Sur ces tranches, la version à un paramètre du même théorème de Gromov fournit des structures de contact  $\xi_j$  de sorte que le germe  $(S_{j+1}, \xi_j)$  apparaisse le long d'un graphe  $S'_j$  dans  $M_j$ .

Si par miracle  $S'_j$  est entièrement au-dessus de  $S_j$ , c'est à dire contenue dans  $\mathbb{S}^{2n} \times [j/N, j/N + 1/N]$ , alors  $\xi_j$  et  $\xi_{j+1}$  sont faciles à raccorder. En effet  $S_j$  et  $S'_j$  bordent alors un anneau qu'on peut identifier à  $\mathbb{S}^{2n} \times [j/N, (j+1)/N]$  de sorte que les trois structures de contact  $\xi_j, \xi_j$  vu à travers cette identification et  $\xi_{j+1}$  se recollent en structure de contact sur  $M_j \cup M_{j+1}$ . Dans le cas général où  $S_j$  et  $S'_j$  s'intersectent, on va voir qu'une utilisation soigneuse de partitions de l'unité permet, après déformation et multiplication du nombre de sphères intermédiaires, de sa ramener au cas où toute l'intersection  $S_j \cap S'_j$  est concentrée dans un petit disque  $D \subset S_j$  le long duquel  $\xi_j$  est parfaitement contrôlée. Le raccordement discuté dans le cas miraculeux s'applique au-dessus du complémentaire de  $D$  mais laisse un trou correspondant à  $D \times [j/N, (j+1)/N]$  pincé le long du bord. On appelle soucoupes ces disques pincés.

Plus précisément, une soucoupe de dimension  $2n + 1$  est un domaine de la forme

$$B = \{(w, v) \in D \times \mathbb{R}; f_-(w) \leq v \leq f_+(w)\}$$

où  $D$  est un disque fermé de dimension  $2n$  à bord lisse par morceaux,  $f_-$  et  $f_+$  sont des fonctions lisses de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifient  $f_- < f_+$  dans l'intérieur de  $D$  et dont les



jets d'ordre infini coïncident le long du bord de  $D$ . On note que chaque soucoupe est feuilletée par les graphes  $D_s$  de  $(1-s)f_- + sf_+$ ,  $s \in [0, 1]$ .

Pour définir le contrôle de la structure de contact visé le long de ces disques, on se place dans  $V_0 = \mathbb{R}^{2n-1} \times \mathbb{R}^2$  munie de  $\alpha_0 = \lambda_0 - y_n dx_n$  où  $\lambda_0$  est la forme de contact standard sur  $\mathbb{R}^{2n-1}$ . On dit qu'un disque (fermé) inclus dans l'hyperplan  $\Pi = \{y_n = 0\}$  est régulier si le feuilletage de  $D$  dirigé par  $\partial_{x_n}$  est isomorphe à un feuilletage produit (à fibres connexes) et si la projection de  $D$  dans  $\mathbb{R}^{2n-1}$  est étoilé, c'est à dire que son bord est transversal au champ de vecteurs  $Z$  de l'équation (2). On note que cette projection est un exemple de réduction de contact, une opération analogue à la réduction symplectique des sous-variétés coisotropes.

Un disque  $D$  de dimension  $2n$  dans une variété de contact  $(V, \xi)$  quelconque de dimension  $2n+1$  est dit régulier si le germe  $(D, \xi)$  est isomorphe à un germe de disque régulier dans le cas modèle  $(V_0, \ker \alpha_0)$ . Une soucoupe régulière est une soucoupe munie d'une structure presque de contact  $\zeta$  qui est authentique près du bord et telle que, en tout point  $x \in D_s$ ,  $\zeta$  est de la forme  $(\ker \alpha_s, [d\alpha_s])$  où  $\alpha_s$  est une forme de contact définie au voisinage de  $D_s$  et pour laquelle  $D_s$  est un disque régulier.

La réduction aux trous circulaires (proposition 2.1) passe par l'énoncé suivant.

**PROPOSITION 4.1.** — *Toute structure presque de contact  $\zeta$  est homotope à une structure qui est de contact dans le complémentaire d'un nombre fini de soucoupes régulières. De plus, si  $\zeta$  est déjà de contact au voisinage d'un fermé  $A$ , on peut construire cette homotopie relativement à un voisinage de  $A$ .*

Pour expliquer la localisation conduisant à cette proposition, on commence par décrire plus précisément le résultat obtenu en appliquant le théorème de Gromov à de fines sphères épaissies. Pour cela on décrit un modèle de structure presque de contact sur  $\Sigma \times [0, 1]$  pour  $\Sigma$  une variété compacte sans bord de dimension  $2n$  (en pratique  $\mathbb{S}^{2n}$ ). Soit  $\xi$  une structure de contact sur  $\Sigma \times \mathbb{R}$ ,  $\psi$  une fonction de  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}$  et  $\delta$  une constante strictement positive dont la valeur exacte n'aura pas d'importance. À ces données on peut associer la famille de plongements  $\Psi_s : \Sigma \times [s - \delta, s + \delta] \hookrightarrow \Sigma \times \mathbb{R}$ ,  $s \in [0, 1]$  définie par

$$\Psi_s(x, t) = (x, s\psi(x) + t - s)$$

dont les images sont des voisinages des graphes de  $s\psi$ . On a alors une famille de germes de structures de contact  $\xi_s = \Psi_s^* \xi$  le long de  $\Sigma \times \{s\}$ . Si  $\alpha$  est une équation de  $\xi$  alors les  $\xi_s$  ont pour équations les  $\alpha_s = \Psi_s^* \alpha$  et la famille des  $(\alpha_s, d\alpha_s)$  définit une structure presque de contact  $\zeta_\psi$  sur  $\Sigma \times [0, 1]$ . On dira que  $\zeta_\psi$  est de type graphe.

On se ramène au cas de ces structures presque de contact en appliquant le théorème de Gromov à paramètres à de fines tranches  $\mathbb{S}^{2n} \times [a, b]$ , le théorème de Gray et des déformations artisanales ad hoc. Les graphes des fonctions  $\psi$  obtenues sont les hypersurfaces  $S'_j$  annoncées. Comme expliqué plus haut, le cas des fonctions strictement positives ne pose aucun problème. De plus, en augmentant le nombre de tranches, on peut rendre la norme  $C^1$  des fonctions apparaissant aussi petite que désirée.

On veut localiser ces fonctions  $\psi$  au-dessus de disques réguliers. Pour cela il est impératif de se débarrasser des zones où  $\xi$  est (presque) tangente aux niveaux  $\Sigma \times \{u\}$ . L'observation clef est que, dans ces zones, on dispose de champs de vecteurs dont le flot préserve  $\xi$  et qui sont transversaux aux niveaux. En effet toute structure de contact est invariante par les flots de certains champs de vecteurs qui lui sont transverses et qu'on appelle champs de Reeb. En utilisant ces flots, on pousse le graphe de  $\psi$  jusqu'à rendre  $\psi$  strictement positives dans ces zones. L'énoncé précis obtenu est le suivant.

LEMME 4.2. — *Toute structure presque de contact sur un produit  $\Sigma \times [a, b]$  est homotope à un empilement de tranches  $\Sigma \times [0, 1]$  munies de structures de type graphe  $\zeta_\psi$  telles que, pour chaque tranche, il existe des fermés  $V \subset \Sigma$  et  $V' \subset \text{Int } V$  tels que  $\psi|_V > 0$  et  $\xi$  est transversale à tous les graphes des  $s\psi$  au-dessus de  $\Sigma \setminus \text{Int } V'$ .*

Dans la suite on simplifie les notations en prétendant que  $V$  et  $V'$  sont vides (un cas qui ne se présente jamais car la caractéristique d'Euler de  $\mathbb{S}^{2n}$  n'est pas nulle. . .).

Comme illustré sur la figure 2, toute partition de l'unité  $\lambda$  ordonnée sur  $\Sigma$  pour laquelle les supports des  $\lambda_i$  sont des disques fournit une décomposition de  $\Sigma \times [0, 1]$  en soucoupes délimitées par les graphes des

$$L_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i.$$

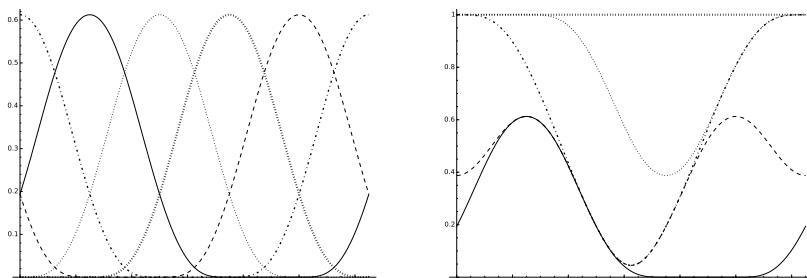


FIGURE 2. Une partition de l'unité sur  $\mathbb{S}^1$  (après identification des côtés gauche et droit de la figure) et la partition de  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$  en cinq soucoupes correspondant.

Sous l'hypothèse (fictive) que  $\xi$  est transversale à tous les graphes de  $s\psi$ ,  $s \in [0, 1]$ , on construit sans peine une partition de l'unité  $\lambda$  telle tous les supports des  $\lambda_i$  sont des disques réguliers  $D_i$ .

On décompose ensuite la fonction  $\psi$ . Le lemme élémentaire est que  $\psi$  est somme de fonctions  $\psi_i$  à support dans  $D_i$ , s'annulant à l'ordre infini le long du bord de  $D_i$  mais strictement positives sur un voisinage du bord privé du bord. Pour le voir, on considère une seconde partition de l'unité  $\lambda^-$  constitué de fonctions  $\lambda_i^-$  à support dans l'intérieur des  $D_i$ , on écrit  $\psi$  comme différence de fonctions strictement positives, disons  $\psi^+ = \psi + 2\|\psi\|_{C^0}$  et  $\psi^- = 2\|\psi\|_{C^0} - \psi$ , puis on pose  $\psi_i = \lambda_i \psi^+ - \lambda_i^- \psi^-$ .

Les graphes  $\Gamma(L_k)$  délimitant la décomposition de  $\Sigma \times [0, 1]$  en soucoupes s'envoient naturellement sur les graphes des sommes partielles  $\Psi_k = \sum_{i=1}^k \psi_i$ . Cette construction est illustrée sur la figure 3. Ces applications s'étendent en immersion  $P$  d'un voisinage

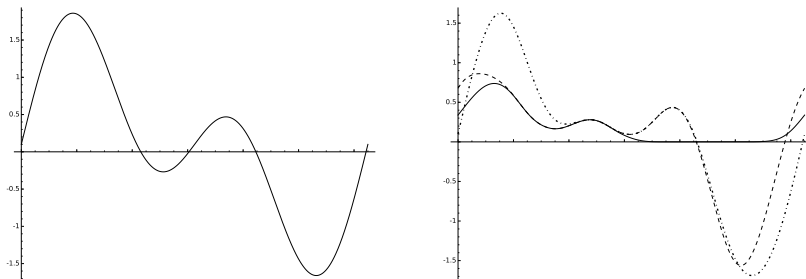


FIGURE 3. Une fonction  $\psi$  sur  $\mathbb{S}^1$  et les trois premières fonctions  $\Psi_k$  données par la partition de l'unité de la figure 2.

de la réunion  $\Gamma(L)$  des  $\Gamma(L_k)$ . La structure de contact  $P^*\xi$  s'étend en structure presque de contact par une construction en tous points analogue à celle des  $\zeta_\psi$ . Le résultat est bien une réunion de soucoupes régulières.

## 4.2. Trous circulaires

On donne maintenant une description des trous circulaires qui est à la fois plus complète que celle de la section 2 (qui ne décrivait que le bord) et plus maniable pour la suite.

Soit  $\Delta$  un domaine étoilé dans  $\mathbb{R}^{2n-1}$ . Soit  $K: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui est strictement positive au voisinage du bord de  $\Delta$ . Pour toute constante  $C > -\min K$ , on considère la boule à bord lisse par morceaux

$$B_{K,C} = \{(x, re^{it}) \in \Delta \times \mathbb{C} ; r^2 \leq K(x) + C\}.$$

Le bord de cette boule se compose d'une partie qu'on appellera horizontale où  $x$  est dans le bord de  $\Delta$  et d'une partie verticale où  $r^2 = K(x) + C$ . On choisit ensuite une fonction  $\rho$  définie au voisinage de  $B_{K,C}$  et vérifiant

- pour  $r$  proche de zéro :  $\rho = r^2$  ;
- près du bord vertical :  $\rho = r^2 - C$  ;
- près de bord horizontal :  $\partial_r \rho > 0$ , sauf si  $r = 0$ .

On choisit enfin une 1-forme  $\beta$  au voisinage de  $B_{K,C}$  qui coïncide avec  $d\rho$  près du bord et de  $\Delta \times \{0\}$  et vérifie  $\beta(\partial_r) > 0$  dès que  $r$  est non nul. Une telle forme existe car  $d\rho$  vérifie la condition de positivité partout où on impose  $\beta = d\rho$  et cette condition est convexe donc l'extension ne pose aucun problème.

Munis de tous ces choix, on définit la structure presque de contact

$$\zeta_K = \left( \ker(\lambda_0 + \rho dt), [d\lambda_0 + \beta \wedge dt] \right).$$

et on vérifie facilement qu'elle est de contact près du bord et que, modulo équivalence de coquilles de contact, le résultat ne dépend que de  $\Delta$  et  $K$ . Cette équivalence justifie

l’abus de langage qui nomme trou circulaire associé à  $K$  et note  $(B_K, \zeta_K)$  n’importe quelle coquille de contact ainsi construite. Le lien avec les soucoupes s’énonce comme suit.

PROPOSITION 4.3. — *Toute soucoupe régulière domine un trou circulaire.*

La démonstration de cette proposition est très technique, nous n’en dirons rien si ce n’est que les deux types de coquilles sont suffisamment spécifiques pour qu’une suite de constructions explicites en vienne à bout via deux modèles de coquilles intermédiaires : le trou rectiligne et le trou de serrure.

On termine cette section par une discussion informelle du lien entre trous circulaires et fibrations de contact sur le disque, ce qui permet d’expliquer au passage d’où provient la terminologie « hamiltonien ». En mécanique classique vue du point de vue hamiltonien, l’espace des phases est une variété symplectique  $(X, \omega)$ , en général un fibré cotangent équipé de la forme canonique définie dans l’introduction. La fonction d’énergie  $H$  est appelée hamiltonien. Elle engendre un champ de vecteurs  $X_H$  uniquement déterminé par la condition  $dH = \omega(\cdot, X_H)$  et dont le flot préserve  $\omega$ . Dans [Lib59], Paulette Libermann a étendu cette construction aux variétés munies d’une forme de contact  $\alpha$ . Chaque fonction  $K$  sur une telle variété engendre un unique champ de vecteurs  $X_K$  qui vérifie  $\alpha(X_K) = K$  et dont le flot préserve la structure de contact  $\ker \alpha$ . Ainsi, pour  $\alpha = \lambda_0$ , la champ radial  $Z$  de l’équation (2) correspond à la fonction  $2z$ . Cette construction fonctionne aussi avec des fonctions dépendant du temps. On obtient ainsi tous les champs de vecteurs dépendant du temps dont le flot préserve la structure de contact de départ.

Supposons maintenant qu’une coquille de contact  $(\Delta \times \mathbb{D}^2, \zeta)$  induise une structure de contact  $\xi_p$  sur chaque fibre  $\Delta \times \{p\}$  de la projection sur  $\mathbb{D}^2$ . Dans cette situation, il existe un champ de plan naturel  $\mathcal{H}$  transversal aux fibres tel que  $\zeta = \xi \oplus \mathcal{H}$  et qui, vu comme connexion d’Ehresmann, fournit un transport parallèle préservant la famille des structures de contact  $\xi_p$ . Si  $\zeta = \ker \alpha$  alors  $H$  est l’orthogonal de  $\xi$  pour  $d\alpha$  dans  $\zeta$ . Présenté ainsi, cette connexion n’a aucun raison d’être complète car les fibres ont un bord non vide mais on ignore ce problème dans cette discussion informelle. Modulo cette subtilité, le transport parallèle radial permet alors d’identifier toutes les fibres à celle située au-dessus de l’origine de  $\mathbb{D}^2$ . Dans une telle trivialisaton, on obtient bien une équation de la forme  $\lambda_0 + \rho dt$  avec  $\xi = \ker \lambda_0$ . La classe d’équivalence de la coquille de contact de départ est alors entièrement décrite par le transport parallèle le long du bord de  $\mathbb{D}^2$ , vu comme chemin issu de l’identité dans le groupe des transformations de contact de la fibre centrale. Les trous circulaires ont cette géométrie et le chemin de transformations de contact correspondant est engendré par  $X_K + \partial_t$ .

## 5. TROUS UNIVERSELS

L'objectif de cette section est d'expliquer la démonstration de la proposition 2.2 assurant l'existence d'un trou circulaire universel en chaque dimension.

### 5.1. Hamiltoniens et domination

Comme expliqué dans la section 2, le groupe de transformations de contact de  $\mathbb{R}^{2n-1}$  agit sur les paires  $(\Delta, K)$ . Soit  $\Phi$  un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^{2n-1}$ . La condition de contact  $\Phi^*\xi_{\text{std}} = \xi_{\text{std}}$  équivaut à l'existence d'une fonction  $c_\Phi$ , appelée facteur conforme de  $\Phi$  pour  $\lambda_0$ , telle que  $\Phi^*\lambda_0 = c_\Phi\lambda_0$ . On pose alors  $\Phi_*(\Delta, K) = (\Phi(\Delta), \Phi_*K)$  où

$$\Phi_*K(x) = c_\Phi(\Phi^{-1}(x))K(\Phi^{-1}(x)).$$

L'ensemble des paires  $(\Delta, K)$  est aussi ordonné, on dit que  $(\Delta, K) \leq (\Delta', K')$  si  $\Delta \subset \Delta'$ ,  $K'|_{\Delta' \setminus \Delta} > 0$  et  $K \leq K'|_\Delta$ . Des vérifications faciles conduisent au lemme suivant.

LEMME 5.1. — *Les coquilles de contact associées à  $(\Delta, K)$  et  $\Phi_*(\Delta, K)$  sont équivalentes. Si  $(\Delta, K) \leq (\Delta', K')$  alors la coquille  $B_{K'}$  domine  $B_K$ .*

### 5.2. Lemme de désordre

On explique maintenant plus en détail comment démontrer la proposition 2.3 dont voici l'énoncé.

PROPOSITION 5.2 (Désordre et domination). — *Sur une boule étoilée  $\Delta$ , pour qu'un hamiltonien  $K_1$  en domine un autre  $K_0$  modulo transformation de contact, il suffit qu'il existe une sous-boule  $\Delta' \subset \Delta$  au voisinage de laquelle  $K_0$  est strictement négatif et hors de laquelle  $K_1$  est positif et domine  $K_0$ .*

Pour comprendre cette proposition, il est utile de voir pourquoi elle est facile lorsque  $\Delta$  est de dimension un, sous les seules hypothèses que  $K_1$  est strictement positif près du bord et que  $K_0$  est quelque part strictement négatif à l'intérieur. Cela explique au passage pourquoi on a, dans ce cas, un hamiltonien dominé par n'importe quel autre modulo transformation de contact. Supposons donc que  $\Delta = [-1, 1]$ , munie de sa structure de contact triviale  $\ker dx = \{0\}$  pour laquelle tous les difféomorphismes sont des transformations de contact, de facteur conforme donné par leur dérivée. Puisque les difféomorphismes (de contact) agissent transitivement sur les points et envoient régions positives sur régions positives, on peut supposer  $K_0(0) < 0$ . On considère ensuite un difféomorphisme  $\Phi$  de  $\Delta$  (automatiquement de contact !) dont la dérivée est très grande sur un voisinage  $U$  de l'origine et très petite hors d'un voisinage  $V$  sur lequel  $K_0$  est encore strictement négative. On s'assure de plus que  $\Phi$  envoie  $U$  sur un intervalle hors duquel  $K_1$  est strictement positive. Comme le facteur conforme de  $\Phi$  n'est autre que sa dérivée,  $\Phi_*K_0 \leq K_1$ . En effet  $\Phi_*K_0$  est très négative sur  $\Phi(U)$  et reste négative sur  $\Phi(V)$  tandis que sa valeur absolue devient minuscule hors de  $\Phi(V)$ .

En dimension plus grande, il est facile d'envoyer un petit voisinage  $U$  du centre de  $\Delta$  sur une grande boule avec un grand facteur conforme. Il suffit d'utiliser le théorème de Libermann pour tronquer le flot de  $Z$ . Mais nul ne sait garantir un très petit facteur conforme hors d'un voisinage  $V$  contenant  $U$ , ce qui empêche de conclure sans hypothèse supplémentaire. Cependant cette stratégie fonctionne si  $K_0$  est nul sur un voisinage du bord tandis que  $K_1$  y est positif. En effet on peut alors abandonner le contrôle du facteur conforme là où il se trouve multiplié par  $K_0$  nul. Les hypothèses de la proposition permettent de se ramener à ce cas en remplaçant  $K_0$  par un  $K'_0 \geq K_0$  qui est nul près du bord de  $\Delta'$  et en appliquant la stratégie sur  $\Delta'$ .

### 5.3. Recouvrements équivariants

Cette section aborde le deuxième ingrédient de la démonstration de l'existence de trous universels : les recouvrements équivariants. Ici le groupe de Heisenberg joue un rôle crucial. Soit  $\omega = \sum dx_j \wedge dy_j$  la forme symplectique standard sur  $V = (\mathbb{R}^2)^{n-1}$ . On équipe  $H = V \times \mathbb{R}$  de la loi de groupe  $(u, z) * (v, w) = (u + v, z + w + \omega(u, v))$ . La forme de contact standard  $\lambda_0 = dz + \sum(x_i dy_i - y_i dx_i)$  est invariante par translation à droite dans  $H$ . Ainsi ces translations sont des transformations de contact de facteur conforme 1. De plus le groupe  $H$  admet un réseau cocompact  $\Gamma = \mathbb{Z}^{2n-1}$ . Par ailleurs on considère  $T^*\mathbb{R}$  muni de sa 1-forme canonique  $pdq$  décrite dans l'introduction :  $q$  est la coordonnée dans  $\mathbb{R}$  et  $p$  celle des fibres de  $T^*\mathbb{R}$ . Cette 1-forme est invariante par l'action de  $\mathbb{Z}$  translatant la coordonnée  $q$ . On considère ensuite  $H \times T^*\mathbb{R}$  muni de la forme de contact  $\lambda_0 + pdq$ . Dans cette variété, on note  $\Pi$  l'hyperplan  $H \times \mathbb{R}$  d'équation  $p = 0$ . Le groupe  $\Theta = \Gamma \times \mathbb{Z}$  agit par transformations de contact, préserve  $\Pi$  et y agit proprement discontinument. On note  $\pi$  la projection de  $H \times T^*\mathbb{R}$  sur  $(H \times T^*\mathbb{R})/\mathbb{Z} = H \times T^*\mathbb{S}^1$ .

Enfin on considère les dilatations  $\delta^\lambda$  envoyant  $(u, z, q, p)$  sur  $(\lambda u, \lambda^2 z, \lambda q, \lambda p)$ . Il s'agit de transformations de contact de facteur conforme  $\lambda^2$ . En conjuguant les éléments de  $\Theta$  par  $\delta^{1/N}$ , on obtient une famille de groupes  $\Theta_N$ . Chacun de ces groupes agit proprement discontinument sur  $\Pi$  et contient comme sous-groupe central le  $\mathbb{Z}$  agissant sur  $T^*\mathbb{R}$ . Le quotient  $\hat{\Theta}_N = \Theta_N/\mathbb{Z}$  agit donc sur le quotient  $H \times T^*\mathbb{S}^1$ .

La forme particulière des transformations de  $\Theta_N$  (et  $\hat{\Theta}_N$ ) leur permet de transformer les familles de fonctions  $\phi : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  définissant des soucoupes régulières comme dans la section 4. Si  $g$  est un élément de  $\Theta_N$  alors la soucoupe définie par  $\phi$  est isomorphe à la soucoupe définie par  $g \cdot \phi := \phi \circ \delta^N \circ g^{-1}/N$ . En effet

$$\begin{aligned} (g \circ \delta^{1/N})^*(\lambda_0 - sg \cdot \phi dx_n) &= (\delta^{1/N})^* g^* \lambda_0 - s\phi \circ \delta^N \circ g^{-1} \circ g \circ \delta^{1/N}/N (g \circ \delta^{1/N})^* dx_n \\ &= (\lambda_0 - s\phi dx_n)/N^2 \end{aligned}$$

Soit  $Q$  un disque régulier de  $\Pi$  dont les images par  $\Theta$  recouvrent  $\Pi$ . Lorsque  $N$  est assez grand, la projection  $\pi$  est un difféomorphisme en restriction à  $Q_N = \delta^{1/N}(Q)$  et à toutes ses images sous l'action de  $\Theta$ . Dans toute la suite on fixe un tel compact  $Q$  et on supposera toujours  $N$  suffisamment grand pour assurer cette propriété. En particulier toute fonction  $\psi$  à support dans un  $g(Q_N)$  pour  $g$  dans  $\Theta$  définit une fonction notée

$\hat{\psi}$  sur  $\pi(\Pi) = \mathbb{R}^{2n-1} \times \mathbb{S}^1$ . Les images de  $\hat{Q}_N = \pi(Q_N)$  sous l'action de  $\hat{\Theta}_N$  recouvrent  $\pi(\Pi)$ . Cette famille de recouvrements de  $\pi(\Pi)$  de plus en plus fins mais avec toujours la même combinatoire et géométrie de contact et le fait que l'action de  $\hat{\Theta}_N$  sur les fonctions divise leur valeur absolue par  $N$  permettent le lemme suivant qui est un des deux lemmes majeurs de la démonstration du théorème principal.

LEMME 5.3. — *Il existe une fonction  $\phi$  à support dans  $Q$  qui s'annule à l'ordre infini le long de  $\partial Q$  et est strictement positive près du bord et il existe une suite  $\kappa_N > 0$  tels que, pour tout  $\epsilon > 0$  et tous domaines compacts  $\Delta' \Subset \Delta \Subset \mathbb{R}^{2n-1}$ , il existe  $N$  et un ensemble fini  $\Lambda \subset \Theta_N$  tels que*

$$\Phi_\Lambda := \kappa_N + \sum_{g \in \Lambda} \widehat{g \cdot \phi} < \begin{cases} 0 & \text{sur } \Delta' \times \mathbb{S}^1 \\ \epsilon & \text{sur } (\Delta \setminus \Delta') \times \mathbb{S}^1 \end{cases}$$

et  $\Phi_\Lambda = \kappa_N$  hors d'un compact de l'intérieur de  $\Delta \times \mathbb{S}^1$ .

*Démonstration.* — Soit  $m$  le nombre d'éléments  $g$  de  $\Theta$  pour lesquels  $g(Q)$  intersecte  $Q$ . On fixe dans  $Q$  un domaine  $Q'$  relativement compact dont les images par  $\Theta$  recouvrent encore  $\Pi$ . On choisit pour  $\phi$  une fonction qui a les propriétés demandées près du bord de  $Q$  et vérifie en plus  $\max \phi|_{Q'} < -(m+1) \max \phi$ . Enfin on pose  $\mu = \max \phi$ . Ces choix sont indépendants de  $\Delta$ ,  $\Delta'$  et  $\epsilon$ .

On pose  $Q'_N = \delta^{1/N}(Q')$  et  $\hat{Q}'_N = \pi(Q'_N)$ . Les images de  $\hat{Q}'_N$  par les éléments de  $\hat{\Theta}_N$  sont de diamètres majorés par une constante qui tend vers zéro quand  $N$  tend vers l'infini. On choisit  $N$  assez grand pour que cette constante soit strictement inférieure à la distance entre  $\Delta' \times \mathbb{S}^1$  et  $\partial\Delta \times \mathbb{S}^1$ .

On choisit pour  $\Lambda$  l'ensemble des  $g$  pour lesquels  $g(\hat{Q}'_N)$  intersecte  $\Delta' \times \mathbb{S}^1$ . La réunion de ces compacts recouvre  $\Delta' \times \mathbb{S}^1$  mais est contenue dans l'intérieur de  $\Delta \times \mathbb{S}^1$ . En particulier, dans la définition de  $\Phi_\Lambda$ , le support de la somme est contenu dans l'intérieur de  $\Delta \times \mathbb{S}^1$ . Par construction de l'action du groupe sur les fonctions, chaque  $g \cdot \phi$  est majoré par  $\mu/N$ . De plus, en tout point, la somme ne fait intervenir qu'au plus  $m$  termes non nuls. La somme est donc majorée partout par  $m\mu/N$  qui est strictement inférieur à  $\epsilon - \mu/N$  pourvu qu'on choisisse  $N > (m+1)\mu/\epsilon$ . En tout point de  $\Delta' \times \mathbb{S}^1$  au moins un des termes non nuls de la somme provient d'une image de  $\hat{Q}'_N$  donc est inférieur à  $-(m+1)\mu/N$ . Les autres termes sont en nombre au plus  $m-1$  et majorés comme avant par  $\mu/N$ . On a donc une somme inférieure à  $-2\mu/N$ . On pose  $\kappa_N = \mu/N$ .  $\square$

On déduit maintenant de ce lemme et du critère de domination 5.2 l'existence d'un trou circulaire universel. Supposons qu'on veuille un trou circulaire dominé par un trou circulaire associé à un couple  $(\Delta, K_1)$ . Par hypothèse,  $\Delta$  est étoilé. De plus  $K_1$  est strictement positive au voisinage du bord de  $\Delta$  donc il existe  $\epsilon > 0$  et un domaine étoilé  $\Delta' \Subset \Delta$  tel que  $K_1|_{\Delta \setminus \Delta'} > \epsilon$ . On applique le lemme à ces données  $\Delta$ ,  $\Delta'$  et  $\epsilon$ . On choisit une fonction  $K_0$  sur  $\Delta$  qui est strictement négative sur  $\Delta'$ , inférieure à  $K_1$  sur  $\Delta \setminus \Delta'$  et qui, vu comme fonction sur  $\Delta \times \mathbb{S}^1$  reste partout supérieure à  $\Phi_\Lambda$  (figure 4). D'après la proposition 5.2 et le lemme 5.1, le trou circulaire associé à  $(\Delta, K_0)$

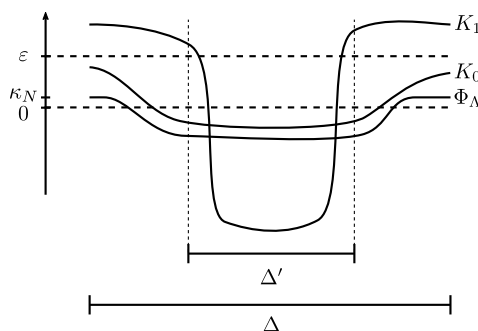


FIGURE 4. Hamiltoniens pour les trous universels

est dominé par celui associé à  $(\Delta, K_1)$ . On peut donc oublier  $K_1$  et se concentrer sur  $K_0$ . Par construction, le trou circulaire associé à  $K_0$  domine celui associé à  $\Phi_\Lambda$ . De plus la fonction constante  $\kappa_N$  définit un trou circulaire trivial à remplir car  $\kappa_N > 0$ . Il reste à ajouter les fonctions  $\widehat{g \cdot \phi}$ . On numérote les éléments de  $\Lambda$  et ajoute les fonctions dans l'ordre. On obtient ainsi un empilement de soucoupes comme dans la section 4. Chaque soucoupe s'appuie sur le graphe de la somme des fonctions ajoutées précédemment. Bien que ces soucoupes soient très nombreuses (on ne contrôle pas du tout le cardinal de  $\Lambda$ ), elles ne sont que d'au plus  $2^m$  types différents où  $m$  est le nombre d'éléments  $g$  dans  $\Theta$  tels que  $g(Q)$  intersecte  $Q$ . Ces soucoupes sont indépendantes de  $\Delta$  et  $K_1$ . On applique ensuite la proposition 4.3 à ces soucoupes pour les remplacer par des trous circulaires. Comme la collection des hamiltoniens correspondants est finie, il existe un hamiltonien inférieur à tous ceux là. Cet hamiltonien est bien universel.

## 6. DOUBLEMENT ET DISQUES VRILLÉS

L'objectif de cette section est d'expliquer comment se déroule la démonstration de la proposition 2.5 assurant l'abondance de coquilles de contact doublantes.

### 6.1. Sommes connexes de trous

Dans toute cette section, on fixe un domaine étoilé  $\Delta^\circ$  particulier dans  $\mathbb{R}^{2n-1}$ . On voit  $\mathbb{R}^{2n-1}$  comme  $(\mathbb{R}^2)^{n-1} \times \mathbb{R}$ , on équipe chaque  $\mathbb{R}^2$  de coordonnées polaires  $(r_i, \theta_i)$  et on note  $z$  la coordonnée restante. Dans ces coordonnées, la forme de contact standard s'écrit

$$\lambda_0 = dz + \sum_i r_i^2 d\theta_i.$$

On note

$$u = \sum r_i^2 \quad \text{et} \quad \Delta^\circ = \{u \leq 1, |z| \leq 1\}.$$

Pour tout hamiltonien sur  $\Delta^\circ$  on appelle pôle Nord et pôle Sud du trou circulaire correspondant les points de  $\mathbb{R}^{2n-1} \times \mathbb{C}$  dont toutes les coordonnées sont nulles sauf  $z$



qui vaut  $+1$  ou  $-1$  respectivement. On dit qu'un hamiltonien sur  $\Delta^\circ$  est à symétrie cylindrique s'il ne dépend que de  $u$  et  $z$ .

Soit  $K_+$  et  $K_-$  deux hamiltoniens à symétrie cylindrique et vérifiant  $K_+(u, 1) = K_-(u, -1)$  pour tout  $u$ . On note  $E(u)$  cette valeur commune. On décrit maintenant un modèle de somme connexe au bord des trous circulaires correspondant à  $K_+$  et  $K_-$ .

Soit  $\mathcal{Z}_\tau$  la translation de vecteur  $\tau\partial_z$  dans  $\mathbb{R}^{2n-1}$ , il s'agit d'une transformation de contact. Pour tout  $l > 0$  et  $\beta: [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui s'annule près du bord, on pose

$$\Delta^\circ \#_{l,\beta} \Delta^\circ = \mathcal{Z}_{-l-1}(\Delta^\circ) \cup T_{l,\beta} \cup \mathcal{Z}_{l+1}(\Delta^\circ)$$

où  $T_{l,\beta}$  désigne le tube  $\{u \leq \exp(-\beta(z)), |z| \leq l\}$ . Sur  $\Delta^\circ \#_{l,\beta} \Delta^\circ$  on considère le hamiltonien

$$K_+ \#_{l,\beta} K_- : (u, z) \mapsto \begin{cases} (K_+ \circ \mathcal{Z}_{l+1})(u, z) & \text{sur } \mathcal{Z}_{-l-1}(\Delta^\circ), \\ e^{-\beta(z)} E(u) & \text{sur } T_{l,\beta}, \\ (K_- \circ \mathcal{Z}_{-l-1})(u, z) & \text{sur } \mathcal{Z}_{l+1}(\Delta^\circ). \end{cases}$$

Un lemme usuel de forme normale au voisinage d'une courbe permet de démontrer le résultat suivant.

**LEMME 6.1.** — *Soit  $(M, \zeta)$  une variété presque de contact contenant deux trous circulaires disjoints  $B_+ = B_{K_+}$  et  $B_- = B_{K_-}$ . Soit  $\gamma$  un arc reliant le pôle Nord de  $B_+$  au pôle Sud de  $B_-$  et dont l'intérieur est disjoint de  $B_+$  et  $B_-$ . On suppose que  $\zeta$  est de contact au voisinage de  $\gamma$  et transversale à  $\gamma$ . Alors tout voisinage de  $B_+ \cup \gamma \cup B_-$  contient un domaine isomorphe au trou circulaire associé à  $K_+ \#_{l,\beta} K_-$  pour une certaine paire  $(l, \beta)$ .*

## 6.2. Hamiltoniens spéciaux

L'objectif de cette section est de présenter une classe de hamiltoniens, dits spéciaux, dont les trous associés vérifient la propriété de doublement présentée dans la section 2.

Une fonction  $k: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est dite spéciale si  $k(1) > 0$  et

$$ak\left(\frac{u}{a}\right) < k(u) \quad \text{pour tout } a > 1 \text{ et } u \geq 0.$$

Un hamiltonien à symétrie cylindrique est dit spécial s'il existe une fonction spéciale  $k$  et  $z_D \in ]-1, 1[$  tels que, pour tout  $u \in [0, 1]$  :

- $k(u) \leq K(u, z)$  avec égalité lorsque  $z$  est proche de  $z_D$
- la fonction  $K(u, \cdot)$  est décroissante sur  $[-1, z_D]$
- $K(u, z) \leq K(u, -1) = K(u, 1)$

Les hamiltoniens spéciaux existent en abondance : tout hamiltonien  $K_0: \Delta^\circ \rightarrow \mathbb{R}$  domine un hamiltonien spécial. Par exemple, pour tous réels strictement positifs  $a, b$  et  $\lambda$  vérifiant  $b < 1$  et  $\lambda > a/(1-b)$ , (un lissage de) la fonction

$$k: u \mapsto \begin{cases} \lambda(u-b) - a & \text{si } u \geq b, \\ -a & \text{sinon.} \end{cases}$$

est spéciale et (un lissage de)  $(u, z) \mapsto \max(k(u), k(|z|))$  est un hamiltonien spécial.

Dans toute la suite, on fixe un hamiltonien spécial  $K$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on pose  $K_\varepsilon = K - \varepsilon$  et  $\Delta_\varepsilon^\circ = \{u \leq 1 - \varepsilon, |z| \leq 1 - \varepsilon\}$ . Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit,  $K_\varepsilon$  est strictement positif près du bord de  $\Delta_\varepsilon^\circ$ .

L'énoncé suivant est appelé « Main lemma » dans [BEM15], c'est lui qui assure la propriété de doublement du trou circulaire associé à un hamiltonien spécial. Toute la fin de ce texte sera consacrée à une évocation de sa démonstration.

LEMME 6.2. — *Soit  $K$  un hamiltonien spécial sur  $\Delta^\circ$ . Pour tous  $l, \beta, \varepsilon$ , il existe une transformation de contact  $\Theta: \Delta^\circ \rightarrow \Delta^\circ \#_{l,\beta} \Delta^\circ$  qui coïncide avec  $\mathcal{Z}_{l+1}$  là où  $z$  est dans  $[z_D, 1]$  et vérifie :*

$$\Theta_*(\Delta_\varepsilon^\circ, K_\varepsilon) \leq (\Delta^\circ \#_{l,\beta} \Delta^\circ, K \#_{l,\beta} K).$$

Le condition de translation pour  $z$  dans  $[z_D, 1]$  assure que le doublement a lieu le long du complémentaire de  $\partial B_K \cap \{z \geq z_D\}$ . Ce complémentaire  $D$  sera donc un disque vrillé si on suppose  $K$  inférieur à un hamiltonien universel fournit par la section précédente. Le  $\varepsilon$  contrôle la taille du voisinage de  $D$  comme dans la définition des coquilles doublantes, il est bien arbitrairement petit.

La construction de la transformation  $\Theta$  fait intervenir deux familles de transformations. À tout difféomorphisme  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on associe la mise à l'échelle transversale

$$\Phi_h: (r_i, \theta_i, z) \mapsto (h'(s)r_i, \theta_i, h(z)).$$

Ces transformations permettent d'étirer la variable  $z$  tout en dilatant les rayons  $r_i$ . Ainsi l'image par  $\Phi_h$  d'un domaine de la forme  $\{u \leq f(z), z \in [a, b]\}$  est  $\{u \leq (h'f)(h^{-1}(z)), z \in [h(a), h(b)]\}$ . En utilisant une telle transformation, on ramène le lemme au cas où la fonction  $\beta$  est nulle, au prix d'une augmentation de  $l$ . Plus précisément, on construit une première transformation  $\Phi$  telle que  $\Phi_*(\Delta^\circ \#_{l',0} \Delta^\circ, K \#_{l',0} K) \leq (\Delta^\circ \#_{l,\beta} \Delta^\circ, K \#_{l,\beta} K)$  pour un certain  $l'$ . Dans la suite on suppose donc  $\beta$  nulle, on l'omet dans les notations, et on renomme  $l'$  en  $l$ .

Le même type de mise à l'échelle transversale, appliquée cette fois à  $\Delta^\circ$ , permet d'étirer la coordonnée  $z$  pour envoyer l'intervalle de longueur 2 couvert par  $\Delta^\circ$  sur l'intervalle de longueur  $2l + 4$  couvert par  $\Delta^\circ \#_l \Delta^\circ$ . Mais cette fois la dilation des rayons qui accompagne cet étirement est une nuisance à corriger.

La correction se fait par une transformation de torsion, au prix d'une distorsion des angles  $\theta_i$  qui n'a aucun impact car tous les hamiltoniens considérés ne dépendent pas de ces angles. Ces transformations de torsion sont paramétrées par une fonction  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et un nombre  $z_0$ . On définit

$$\Psi_{g,z_0}(r_i, \theta_i, z) = \left( \frac{r_i}{\sqrt{1 + g(z)u}}, \theta_i - \int_{z_0}^z g(s) ds, z \right)$$

qui est une transformation de contact entre les ouverts  $\{1 + g(z)u > 0\}$  et  $\{1 - g(z)u > 0\}$ . Comme annoncé, ces transformations ne changent pas la coordonnée  $z$  et, pour

$g = 1/f_1 - 1/f_2$  avec  $f_1$  et  $f_2$  des fonctions strictement positives, envoient le domaine  $\{u \leq f_1\}$  sur  $\{u \leq f_2\}$ . L'effet d'une telle transformation sur un hamiltonien  $K$  à symétrie cylindrique est :

$$(\Psi_{g,z_0})_*K(u, z) = \frac{1}{1 - g(z)u} K\left(\frac{u}{1 - g(z)u}, z\right).$$

En particulier pour toute composée  $\Gamma_{h,z_0} = \Psi_{g,z_0} \circ \Phi_h$  avec  $g(z) = 1 - 1/h'(h^{-1}(z))$  et tout hamiltonien  $K$  à symétrie cylindrique,

$$(\Gamma_{h,z_0})_*K(u, z) = \tilde{h}(u, z) K\left(\frac{u}{\tilde{h}(u, z)}, h^{-1}(z)\right)$$

où  $\tilde{h}(z) = u + (1 - u)h'(h^{-1}(z))$ .

On explique maintenant comment la condition de fonction spéciale intervient. Soit donc  $K$  un hamiltonien spécial, accompagné de ses fonctions  $k$  et  $E$  et de son altitude spéciale  $z_D$ . On fixe aussi  $z'_D < z_D$  tel que  $K(u, z) = k(u)$  quand  $z$  est dans un voisinage de  $[z'_D, z_D]$ . Soit  $h$  un difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  qui coïncide avec la translation  $z \mapsto z - l - 1$  sur un voisinage de  $]-\infty, z'_D]$  et avec la translation  $z \mapsto z + l + 1$  sur un voisinage de  $[z_D, +\infty[$  et vérifie partout  $h'(z) \geq 1$ . On pose  $\Theta = \Gamma_{h,z_0}$  pour un  $z_0 \geq z_D$ . On note  $I_l$  l'intervalle  $h([z'_D, z_D]) = [z'_D - l - 1, z_D + l + 1]$ . Il ne se passe rien de notable hors de  $\{z \in I_l\}$  car  $\Theta$  y coïncide avec une translation et  $\Theta_*K = K\#K$  dans cette zone.

Pour  $z$  dans  $I_l$ ,  $\Theta_*K(u, z) = \tilde{h}(z)k(u/\tilde{h}(z))$ . Or, pour tout  $u$  dans  $[0, 1]$ ,  $\tilde{h} \geq 1$  car  $\tilde{h}$  est une combinaison convexe de 1 et d'une valeur de  $h' \geq 1$ . Ainsi la définition de fonction spéciale assure, toujours pour  $z$  dans  $I_l$ ,  $\Theta_*K(u, z) \leq k(u) \leq K(u, z) \leq E(u) = K\#K$ .

## RÉFÉRENCES

- [Arn65] Vladimir Arnold. Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 261 :3719–3722, 1965.
- [BEM15] Matthew Strom Borman, Yakov Eliashberg, and Emmy Murphy. Existence and classification of overtwisted contact structures in all dimensions. *Acta Math.*, 215(2) :281–361, 2015.
- [Ben83] Daniel Bennequin. Entrelacements et équations de Pfaff. In *Third Schnepfenried geometry conference, Vol. 1 (Schnepfenried, 1982)*, volume 107 of *Astérisque*, pages 87–161. Soc. Math. France, Paris, 1983.
- [Ben87] Daniel Bennequin. Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques. *Astérisque*, (145-146) :4, 111–136, 1987. Séminaire Bourbaki, Vol. 1985/86.
- [Ben90] Daniel Bennequin. Topologie symplectique, convexité holomorphe et structures de contact (d'après Y. Eliashberg, D. McDuff et al.). *Astérisque*, (189-190) :Exp. No. 725, 285–323, 1990. Séminaire Bourbaki, Vol. 1989/90.

- [BN10] Frédéric Bourgeois and Klaus Niederkrüger. Towards a good definition of algebraically overtwisted. *Expo. Math.*, 28(1) :85–100, 2010.
- [Bou02] Frédéric Bourgeois. Odd dimensional tori are contact manifolds. *Int. Math. Res. Not.*, 2002(30) :1571–1574, 2002.
- [Che53] Shiing-Shen Chern. Pseudo-groupes continus infinis. In *Géométrie différentielle*, volume 1953 of *Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg*, pages 119–136. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953.
- [CMP15] Roger Casals, Emmy Murphy, and Francisco Presas. Geometric criteria for overtwistedness, 2015.
- [Col08] Vincent Colin. Livres ouverts en géométrie de contact (d’après Emmanuel Giroux). *Astérisque*, (317) :Exp. No. 969, vii, 91–117, 2008. Séminaire Bourbaki. Vol. 2006/2007.
- [Cou14] Sylvain Courte. Contact manifolds with symplectomorphic symplectizations. *Geom. Topol.*, 18(1) :1–15, 2014.
- [CPP15] Roger Casals, Dishant M. Pancholi, and Francisco Presas. Almost contact 5-manifolds are contact. *Ann. of Math. (2)*, 182(2) :429–490, 2015.
- [CZ83] C. C. Conley and Eduard J. Zehnder. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold. *Invent. Math.*, 73(1) :33–49, 1983.
- [Don96] Simon Kirwan Donaldson. Symplectic submanifolds and almost-complex geometry. *J. Differential Geom.*, 44(4) :666–705, 1996.
- [EG91] Yakov Eliashberg and Misha Gromov. Convex symplectic manifolds. In *Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989)*, volume 52 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 135–162. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [Eli89] Yakov Eliashberg. Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds. *Invent. Math.*, 98(3) :623–637, 1989.
- [Eli90] Yakov Eliashberg. Topological characterization of Stein manifolds of dimension  $> 2$ . *Internat. J. Math.*, 1(1) :29–46, 1990.
- [Eli91] Yakov Eliashberg. On symplectic manifolds with some contact properties. *J. Differential Geom.*, 33(1) :233–238, 1991.
- [Eli15] Yakov Eliashberg. Recent advances in symplectic flexibility. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 52(1) :1–26, 2015.
- [EM01] Yakov M. Eliashberg and Nikolai M. Mishachev. Holonomic approximation and Gromov’s  $h$ -principle. In *Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2*, volume 38 of *Monogr. Enseign. Math.*, pages 271–285. Enseignement Math., Geneva, 2001.
- [EM15] Yakov Eliashberg and Emmy Murphy. Making cobordisms symplectic, 2015.
- [Flo88] Andreas Floer. The unregularized gradient flow of the symplectic action. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41(6) :775–813, 1988.

- [Gei91] Hansjörg Geiges. Contact structures on 1-connected 5-manifolds. *Mathematika*, 38(2) :303–311 (1992), 1991.
- [Gei97] Hansjörg Geiges. Applications of contact surgery. *Topology*, 36(6) :1193–1220, 1997.
- [Gei01] Hansjörg Geiges. A brief history of contact geometry and topology. *Expo. Math.*, 19(1) :25–53, 2001.
- [Gir93] Emmanuel Giroux. Topologie de contact en dimension 3 (autour des travaux de Yakov Eliashberg). *Astérisque*, (216) :Exp. No. 760, 3, 7–33, 1993. Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93.
- [Gir02] Emmanuel Giroux. Géométrie de contact : de la dimension trois vers les dimensions supérieures. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II*, pages 405–414, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.
- [Gir10] Emmanuel Giroux. Sur la géométrie et la dynamique des transformations de contact (d’après Y. Eliashberg, L. Polterovich et al.). *Astérisque*, (332) :Exp. No. 1004, viii, 183–220, 2010. Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011.
- [Gro69] Misha L. Gromov. Stable mappings of foliations into manifolds. *Math. USSR-Izv.*, 3 :671–694, 1969.
- [Gro85] Misha Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82 :307–347, 1985.
- [Gro86] Misha Gromov. *Partial differential relations*, volume 9 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Kot97] Dieter Kotschick. The Seiberg-Witten invariants of symplectic four-manifolds (after C. H. Taubes). *Astérisque*, (241) :Exp. No. 812, 4, 195–220, 1997. Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96.
- [Lau95] François Laudenbach. Orbites périodiques et courbes pseudo-holomorphes, application à la conjecture de Weinstein en dimension 3 (d’après H. Hofer et al.). *Astérisque*, (227) :Exp. No. 786, 5, 309–333, 1995. Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94.
- [Lib59] Paulette Libermann. Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact. In *Colloque Géom. Diff. Globale (Bruxelles, 1958)*, pages 37–59. Centre Belge Rech. Math., Louvain, 1959.
- [Lut70] Robert Lutz. Sur l’existence de certaines formes différentielles remarquables sur la sphère  $S^3$ . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 270 :A1597–A1599, 1970.
- [Mar71] Jean Martinet. Formes de contact sur les variétés de dimension 3. In *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium, II (1969/1970)*, pages 142–163. Lecture Notes in Math., Vol. 209. Springer, Berlin, 1971.
- [MNPS13] Emmy Murphy, Klaus Niederkrüger, Olga Plamenevskaya, and András I. Stipsicz. Loose Legendrians and the plastikstufe. *Geom. Topol.*, 17(3) :1791–1814, 2013.

- [Mur12] Emmy Murphy. Loose legendrian embeddings in high dimensional contact manifolds, 2012. arXiv :1201.2245.
- [Nie06] Klaus Niederkrüger. The plastikstufe - a generalization of the overtwisted disk to higher dimensions. *Algebr. Geom. Topol.*, 6 :2473–2508, 2006.
- [Nie13] Klaus Niederkrüger. *On fillability of contact manifolds*. Mémoire d’habilitation à diriger les recherches, Université Toulouse III Paul Sabatier, 2013.
- [Sik91] Jean-Claude Sikorav. Homologie associée à une fonctionnelle (d’après A. Floer). *Astérisque*, (201-203) :Exp. No. 733, 115–141 (1992), 1991. Séminaire Bourbaki, Vol. 1990/91.
- [Sik98] Jean-Claude Sikorav. Construction de sous-variétés symplectiques (d’après S. K. Donaldson et D. Auroux). *Astérisque*, (252) :Exp. No. 844, 4, 231–253, 1998. Séminaire Bourbaki. Vol. 1997/98.
- [Ust99] Ilya Ustilovsky. Infinitely many contact structures on  $S^{4m+1}$ . *Internat. Math. Res. Notices*, (14) :781–791, 1999.
- [Vil10] Cédric Villani. Paradoxe de Scheffer-Shnirelman revu sous l’angle de l’intégration convexe (d’après C. De Lellis et L. Székelyhidi). *Astérisque*, (332) :Exp. No. 1001, vii, 101–134, 2010. Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011.
- [Whi37] Hassler Whitney. On regular closed curves in the plane. *Compositio Math.*, 4 :276–284, 1937.

Patrick MASSOT

Centre de Mathématiques Laurent Schwartz

École polytechnique

91128 Palaiseau Cedex

*E-mail* : patrick.massot@polytechnique.edu