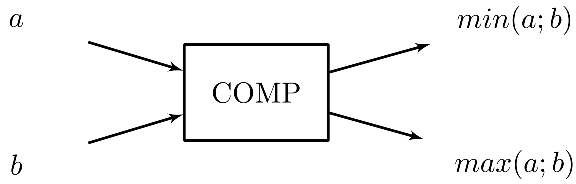
Réseaux de tri

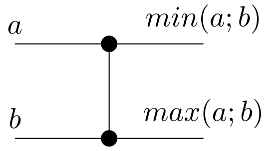
Paul Melotti

mai 2014

On dispose d'un composant comparateur-échangeur, qui permet d'obtenir le plus petit et le plus grand des deux nombres a et b donnés en entrée :

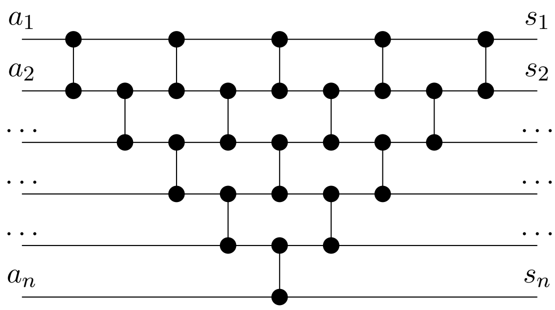


que l'on représentera plus simplement par :



Un *réseau de comparateur* est un ensemble de comparateurs connectés entre eux, sans cycle, comportant n entrées et n sorties. Une *entrée* (resp. une *sortie*) d'un réseau est une entrée (resp. une sortie) d'un comparateur non connectée. Un *réseau de tri* un réseau de comparateurs qui, étant donné une entrée $a_1, \dots, a_n$ quelconque, renvoie en sortie la liste triée $s_1 \leq \dots \leq s_n$.

1. Montrer que le réseau suivant est un réseau de tri. Comment s'appelle ce tri ?



2. Combien de portes possède ce réseau de tri ? Quel est l'intérêt par rapport à un tri logiciel qui effectue $O(n \log(n))$ comparaisons ?
3. Soit f une fonction croissante. Montrer que si un réseau de comparateurs sur les entrées $a_1, \dots, a_n$ renvoie $b_1, \dots, b_n$ alors ce même réseau lancé sur les entrées $f(a_1), \dots, f(a_n)$ renvoie $f(b_1), \dots, f(b_n)$.
4. *(Principe du 0-1)* Montrer que si un réseau de comparateurs trie correctement les entrées telles que les a_i valent 0 ou 1, alors c'est un réseau de tri.

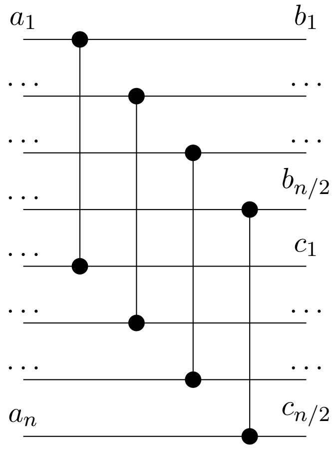
Tri de listes bitoniques

Une liste $a_1, \ldots, a_n$ est dite *bitonique* si elle vérifie l'une des conditions suivantes :
– elle est croissante puis décroissante ;
– elle est décroissante puis croissante ;
– une permutation circulaire de la liste vérifie l'une des propriétés ci-dessus.

5. À quoi ressemble une liste bitonique composée de 0 et de 1 ?

Soit n un entier de la forme $n = 2^p$, $p \in \mathbf{N}^*$. Notre objectif est maintenant de créer un réseau capable de trier les listes bitoniques $a_1, \ldots, a_n$ composées de 0 et de 1.

6. Donner un tel réseau dans les cas $p = 1$.
7. On considère le réseau suivant, noté Sep_p :



Montrer que les deux listes de sortie $b_1, \ldots b_{n/2}$ et $c_1, \ldots c_{n/2}$ sont bitoniques, et que tout b_i est inférieur ou égal à tout c_j.

8. En déduire un réseau $TriBit_p$ qui trie les listes bitoniques de taille 2^p composées de 0 et de 1. Quel est son nombre de portes ? Sa *profondeur* (nombre maximal de portes traversées par un signal d'entrée) ?

Tri-fusion

9. On se donne deux listes *triées* $a = a_1, \ldots, a_{n/2}$ et $b = b_1, \ldots ; b_{n/2}$ composées de 0 et de 1, où $n = 2^p$, $p \in \mathbf{N}^*$. Déduire de la partie précédente un réseau qui renvoie la fusion des deux listes (comme dans l'algorithme de tri-fusion).
   On appelle Fus_p ce réseau.
10. En déduire un réseau de tri pour des entrées de taille 2^p à valeurs quelconques. Quel est son nombre de portes ? Sa profondeur ?

Ajtai, Komlós, et Szemerédi ont publié en 1983 un réseau de tri comportant $O(n \log n)$ portes et de profondeur $O(\log n)$, et il est démontré que cette complexité est optimale. Toutefois, les constantes importantes devant ces ordres de grandeur rendent ce réseau inutile en pratique.