TP4 - Introduction aux graphes : des relations binaires aux systèmes de votes

Thomas Bourgeat Paul Melotti (paul.melotti@ens.fr)

14 novembre 2013, 28 novembre 2013

Les questions marquées d'une étoile sont plus difficiles et pourront être sautées.

1 Graphe de relation

Le but du sujet est de vous faire griffoner un nombre maximum de petits dessins. Vous êtes donc conviés à sortir une feuille et à réfléchir avec ce nouvel objet qu'est le graphe. Dans ce sujet on va s'intéresser à visualiser graphiquement des propriétés de relations. Pour représenter une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble X, on va construire le graphe suivant :

- Les sommets sont les éléments de l'ensemble.
- On construit une arête (orientée) (s, t) lorsque $s\mathcal{R}t$.

On note $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ ce graphe.

Question 1

On représente une relation binaire sur un ensemble fini X par son graphe. On représente en Caml ce graphe par sa *matrice d'adjacence* : c'est une matrice de booléens de taille $|X| \times |X|$, telle que l'indice s, t vaut `true` ssi $s\mathcal{R}t$. On notera `graphe` son type.

Dessinez le graphe et écrivez la matrice d'adjacence pour les relations suivantes :

- divisibilité entière sur l'ensemble $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$;
- inclusion ensembliste sur les parties de {riri; fifi; loulou}.

Question 2

Écrire des fonctions :

a) `complet: int -> graphe` qui étant donné le cardinal n de X renvoie le graphe de la *relation complète* sur X, notée $\mathcal{C}$, définie par : $\forall x, y,\ x\mathcal{C}y$.

b) `diag: int -> graphe` qui étant donné le cardinal n de X renvoie le graphe de la *relation diagonale* sur X, notée Δ, définie par : $x\Delta y$ ssi $x = y$.

c) `inter: graphe -> graphe -> graphe` qui étant donné deux graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ ayant les mêmes sommets renvoie leur *intersection*, c'est-à-dire le graphe dont les arêtes sont celles qui appartiennent à la fois à $\mathcal{G}$ et à $\mathcal{G}'$.

d) `union: graphe -> graphe -> graphe` qui étant donné deux graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ ayant les mêmes sommets renvoie leur *union*, c'est-à-dire le graphe dont les arêtes sont celles qui appartiennent à $\mathcal{G}$ ou à $\mathcal{G}'$.

e) `inclus: graphe -> graphe -> bool` qui étant donné deux graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ ayant les mêmes sommets dit si $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$ au sens des relations, c'est-à-dire si toute arête de $\mathcal{G}$ est une arête de $\mathcal{G}'$.

f) `recip: graphe -> graphe` qui étant donné un graphe $\mathcal{G}$ renvoie sa *réciproque*, c'est-à-dire le graphe qui contient l'arête (s, t) ssi $\mathcal{G}$ contient l'arête (t, s).

g) `compose: graphe -> graphe -> graphe` qui étant donné deux graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ ayant les mêmes sommets renvoie leur *composée*, c'est-à-dire le graphe qui contient l'arête (s, t) ssi il existe u tel que $(s, u) \in \mathcal{G}$ et $(u, t) \in \mathcal{G}'$.

Question 3

Décrire en termes d'union, d'intersection et d'inclusion de graphes les propriétés suivantes sur la relation :

- Réflexive ($\forall x,\ x\mathcal{R}x$)
- Symétrique ($\forall x, y,\ x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$)
- Transitive ($\forall x, y, z,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$)
- Antisymétrique ($\forall x, y,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \implies x = y$)
- Totale ($\forall x, y,\ x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$)

Écrire des fonctions qui étant donné le graphe de la relation, testent ces différentes propriétés.

Question 4

a) Étant donné une relation $\mathcal{R}$ on appelle la clôture reflèxive la plus petite relation réflexive qui contient $\mathcal{R}$. Écrire une fonction qui étant donné le graphe d'une relation renvoie le graphe de sa clôture réflexive.

b) Même question pour "symétrique".

c) (*) Même question pour "transitive".

Question 5

On suppose dans cette question que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Comment se manifeste une classe d'équivalence dans $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$? Écrire une fonction qui étant donné le graphe d'une relation d'équivalence, renvoie l'ensemble des classes d'équivalence (au choix comme une liste de listes ou comme un tableau de listes).

Question 6

(*) À quoi ressemble un ordre total ? On appelle linéarisation d'un ordre partiel, un ordre total qui contient cet ordre partiel, au sens de l'inclusion des graphes. Écrire une fonction qui linéarise un ordre partiel.

2 Paradoxe de Condorcet

On considère le système de vote suivant : 3 candidats, 60 votants, et on demande à chaque votant de donner une liste ordonnée de ses préférences.

Question 1

Considérons la situation

- 23 votants préfèrent : A > B > C
- 17 votants préfèrent : B > C > A
- 2 votants préfèrent : B > A > C
- 10 votants préfèrent : C > A > B
- 8 votants préfèrent : C > B > A

Construire le graphe de la relation suivante : on considère que X est moins bien que Y ($X < Y$) si il y a une majorité de gens qui pensent que X est moins bien que Y.

Question 2

La relation obtenue est-t-elle :

- avec un élément maximum ?
- un ordre partiel ?
- transitive ?

Question 3

Proposer une manière de résoudre le paradoxe de Condorcet. Qui éliriez-vous ?

3 Une solution : le scrutin par rangement des paires

On souhaite appliquer l'idée de vote de Condorcet dans le cas général. Comme précédemment, on construit le graphe de la relation “une majorité de personnes pense que $A < B$”. On suppose que le nombre d'électeurs est impair, de manière à toujours avoir l'arête (A, B) ou bien l'arête (B, A).

Le problème, on l'a vu, est que ce graphe peut contenir des cycles (dans un graphe, un cycle est une suite $c_0, ...c_n$ de sommets tels que $(c_0, c_1), ..., (c_{n-1}, c_n), (c_n, c_0)$ sont des arêtes du graphe). Pour éviter ce problème, on va pondérer l'arête (A, B) par le nombre de personnes qui pensent que $A < B$. Au lieu d'ajouter toutes les arêtes d'un coup, on les ajoute par ordre de poids décroissant, en n'ajoutant pas les arêtes qui créent des cycles. À la fin, on obtient un graphe sans cycle (*acyclique*), et on élit l'élément maximum de ce graphe (on va montrer que cet élément existe et est unique).

Question 1
Appliquer cette méthode sur l'exemple précédent.

Question 2
Montrer que dans un graphe fini acyclique, il existe un élément maximal (un élément a tel qu'il n'existe pas d'arête (a, b) dans le graphe).

Question 3
Montrer qu'à la fin de la méthode par rangement des paires, il existe un unique élément maximal.

Question 4
(*) Écrire une fonction `ajoutable : int -> int -> graphe -> bool` qui étant donné deux entiers i, j et un graphe $\mathcal{G}$ dont on suppose qu'il ne contient pas l'arête (i, j), dit si l'ajout de l'arête (i, j) à $\mathcal{G}$ va créer un cycle. La fonction renverra `false` dans ce cas.

Pour répondre à cette question on pourra au préalable réfléchir à la question 1-4c) sur la clôture transitive, si ce n'est pas déjà fait.

Question 5
On suppose qu'un fonctionnaire a déjà fabriqué la liste des couples de candidats classés par ordre de poids décroissant : en tête, on a le couple (A, B) tel que le nombre de personnes qui pensent que $A < B$ est maximal, etc. Écrire une fonction `elit : int -> (int*int) list -> int` qui, étant donné le nombre de candidats et la liste des couples par poids décroissant, détermine le vainqueur pour la méthode par rangement des paires.

4 Morphisme de graphes

On appelle un morphisme de graphe, une application d'un graphe dans un autre qui préserve l'adjacence.

Question 1
Ecrire une fonction qui prend deux graphes, une fonction d'un graphe dans l'autre, et détermine si cette fonction est un morphisme de graphe.

Question 2
Qu'est-ce qu'un morphisme de graphes pour le monde des relations d'ordres ?

Facultatif culturel :
(*) On dit que deux graphes sont isomorphes s'il existe entre eux un morphisme de graphes bijectif dont l'inverse est un morphisme de graphes.

Écrire une fonction qui détermine si deux graphes sont isomorphes. Quelle est la complexité de votre algorithme ?

5 Coloriage de graphes

Un k-coloriage d'un graphe $\mathcal{G}$ est un coloriage des sommets du graphe $\mathcal{G}$ à l'aide de k couleurs, tel que deux sommets adjacents ne sont jamais de la même couleur.

Question 1
Montrer que tout arbre est 2-coloriable.

Question 2
Le degré d'un sommet est le nombre de voisins de ce sommet, le degré d'un graphe et le maximum des degrés de ses sommets.

On va encoder un coloriage par un tableau d'entier, de la taille du nombre de sommets du graphe. Montrer que tout graphe de degré borné par k, est $k + 1$-coloriable. Écrire une fonction qui renvoie un tel coloriage.

Question 3
On définit le nombre chromatique du graphe $\mathcal{G}$ comme le plus petit k tel que $\mathcal{G}$ soit k-coloriable. Si c'est le graphe d'une relation d'equivalence, à quoi correspond ce k ?