Feuille 3, Ex 4 :

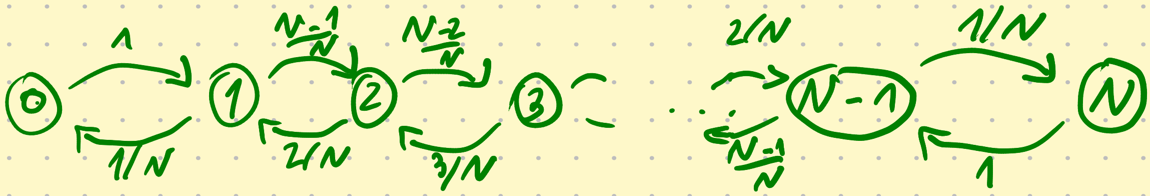
a) Sur l'evt $\{X_n = i\}$, la proba de tirer une boule dans l'urne A est $\frac{i}{N}$, et alors on obtient $X_{n+1} = i-1$. Ainsi,

$$\forall i \in [\![1;N]\!], \quad P_{i,i-1} = \frac{i}{N}$$

de même, on tire une boule dans B avec proba $\frac{N-i}{N}$, et alors $X_{n+1} = i+1$:

$$\forall i \in [\![0;N-1]\!], \quad P_{i,i+1} = \frac{N-i}{N}.$$

Graphe de cette matrice de transition :



Clairement, $\forall i \in [\![0;N-1]\!]$, $i \leftrightarrow i+1$.
Par transitivité $\forall i, j \in [\![0;N]\!]$, $i \leftrightarrow j$.
P est donc bien irréductible.

b) Déjà, P est irréductible sur un espace d'état <u>fini</u>. Elle est donc <u>récurrente positive</u>. Elle possède donc une unique mesure de <u>probabilité</u> invariante π.

Avec un peu de chance, on espère que π est réversible, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in \mathcal{X}, \quad \pi(x) P(x,y) = \pi(y) P(y,x). \quad (*)$$

Lorsque $|x-y| \neq 1$, les deux termes de $(*)$ sont nuls, c'est donc automatiquement vérifié. On veut donc trouver π tq

$$\forall i \in [\![0;N-1]\!], \quad \pi(i) P(i,i+1) = \pi(i+1) P(i+1,i)$$

c'est-à-dire

$$\forall i \in [\![0; N-1]\!], \quad \pi(i)\frac{N-i}{\cancel{N}} = \pi(i+1)\frac{i+1}{\cancel{N}}$$

On voit que cela équivaut à

$$\forall k \in [\![0; N]\!], \ \pi(k) = \pi(0)\prod_{i=0}^{k-1}\frac{N-i}{i+1}$$

$$= \pi(0)\frac{N(N-1)\ldots(N-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

$$= \pi(0)\frac{N!}{(N-k)!\,k!}$$

$$= \binom{N}{k}\pi(0)$$

et c'est une mesure de proba ssi

$$1 = \sum_{k=0}^{N}\pi(k) = \pi(0)\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k} = \pi(0)\,2^N$$

donc $\pi(0) = 2^{-N}$. Ainsi, notre candidate est

$$\forall k \in [\![0; N]\!], \ \pi(k) = \binom{N}{k}2^{-N}.$$

Réciproquement il est clair que cette mesure de proba convient. C'est donc l'unique proba invariante de P. On reconnaît la loi binomiale $\mathrm{Bin}(N, \frac{1}{2})$.

c) Pour $x_0 = 0$, on remarque que $\mathbb{P}_0$-ps,

$\forall n \in \mathbb{N} \,/\, n \equiv 0 [2]$, X_n est pair

$\forall n \in \mathbb{N} \,/\, n \equiv 1 [2]$, X_n est impair.

Ainsi, pour $k=0$ par exemple, la suite $\mathbb{P}_0(X_n = k)$ ne peut tendre vers $\pi(0) = 2^{-N}$ puisqu'elle est nulle sur tous les n impairs.. De même,

$$\forall k \in [\![0; N]\!], \ \mathbb{P}_0(X_n = k) \not\to \pi(k).$$

Remarque le théorème de "convergence en loi" ne s'applique pas ici, car il nous manque l'hypothèse "apériodique". On peut voir que pour cette chaîne, la période est 2.

d) Cela revient à considérer la nouvelle matrice de transition :

$\forall i \in [\![0;N]\!]$, $\tilde{P}_{i,i+1} = \frac{N-i}{2N}$

$\tilde{P}_{i,i} = \frac{1}{2}$

$\tilde{P}_{i,i-1} = \frac{i}{2N}$.

Elle est toujours irréductible, donc ($\mathcal{X}$ fini) récurrente et en plus apériodique, puisque sa diagonale est non-nulle. On peut à nouveau chercher sa proba invariante à la main, ou remarquer que

$$\tilde{P} = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} I$$

où I est la matrice identité.

Ainsi, en voyant la proba π calculée précédemment comme un vecteur-ligne,

$$\pi \tilde{P} = \frac{1}{2} \pi P + \frac{1}{2} \pi I = \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi = \pi .$$

Ainsi, π est aussi la proba invariante pour $\tilde{P}$!

De plus, comme $\tilde{P}$ est en plus apériodique, en notant Y_n une chaîne de Markov de matrice de transition $\tilde{P}$, on a cette fois-ci en appliquant le théorème de convergence en loi :

$\forall k \in \mathcal{X}, \quad \mathbb{P}_0(Y_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi(k) = 2^{-k}\binom{N}{k}.$

<u>Remarque</u>: cette astuce consistant à "rajouter des boucles" est couramment utilisée pour transformer une chaîne périodique en chaîne apériodique, tout en gardant la même mesure invariante.

Pour que la nouvelle chaîne "perde moins de temps", on peut aussi faire cela avec une petite proba $q>0$ de rester sur place :

$$\tilde{P}_q = (1-q)P + qI$$

a les mêmes vecteurs-propres (à gauche) que P.