Groupes et géométries

Frédéric Paulin

Version préliminaire

Département de Mathématiques d'Orsay

Cours de seconde année de mastère

Fondation mathématique FMJH Jacques Hadamard

Université Paris Sud — Comprendre le monde, construire l'avenir®

Année 2013-2014

Prélude.

Félix Klein,[4] dans son programme d'Erlangen, préparé pour sa nomination en tant que professeur à l'université d'Erlangen en 1872 à l'âge de 23 ans, introduisait ainsi les relations entre groupes et géométries (voir les références [Kle] pour des traductions en français et en anglais) :

> *geometrische Eigenschaften werden durch die Transformationen der Hauptgruppe nicht geändert ; [...] geometrische Eigenschaften sind durch ihre Unveränderlichkeit gegenüber den Transformationen der Hauptgruppe characterisirt.*

Il définissait comme suit l'objet commun de la géométrie et de la théorie des groupes :

> *Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben ; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden ; [...] man entwickele die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie.*

Ces notes n'existeraient pas sans cette vision de Félix Klein.

Table des matières

Prélude . . . 2
Préambule . . . 7

1 Groupes de Lie et espaces homogènes **10**
1.1 Groupes de Lie . . . 10
1.2 Algèbres de Lie . . . 17
1.2.1 Généralités . . . 17
1.2.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie . . . 23
1.2.3 Représentations de $\mathfrak{sl}_2$ . . . 28
1.3 Classification des algèbres de Lie complexes semi-simples . . . 31
1.3.1 Systèmes de racines . . . 31
1.3.2 Base d'un système de racines . . . 35
1.3.3 Classification des systèmes de racines . . . 37
1.3.4 Idéaux d'algèbres de Lie . . . 40
1.3.5 Algèbres de Lie semi-simple . . . 42
1.3.6 Sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple . . . 45
1.3.7 Système de racines d'une algèbre de Lie complexe semi-simple . . . 53
1.4 Correspondance entre algèbres de Lie et groupes de Lie . . . 57
1.4.1 Application exponentielle . . . 57
1.4.2 Correspondance entre sous-algèbres de Lie et sous-groupes de Lie . . . 62
1.4.3 Rappels sur les revêtements . . . 67
1.4.4 Revêtements de groupes de Lie . . . 70
1.4.5 Classification des groupes de Lie par leurs algèbres de Lie . . . 73
1.4.6 Algébricité des groupes de Lie semi-simples . . . 77
1.4.7 Phénoménologie des groupes classiques . . . 80
1.5 Espaces homogènes . . . 82
1.5.1 Actions lisses de groupes de Lie . . . 82
1.5.2 Espaces homogènes quotients . . . 85
1.5.3 Actions transitives de groupes de Lie . . . 87
1.5.4 Variétés quotients . . . 89
1.5.5 Exemples de variétés homogènes . . . 91
1.6 Exercices supplémentaires . . . 95
1.7 Indications pour la résolution des exercices . . . 101

2 Fibrés et connexions **109**
2.1 Fibrations . . . 109
2.2 Fibrés vectoriels . . . 115
2.2.1 Définitions et exemples . . . 115
2.2.2 Sous-fibrés et fibrés quotient . . . 119
2.2.3 Opérations sur les fibrés vectoriels . . . 120
Rappels d'algèbre multilinéaire . . . 120
Rappels d'algèbre symétrique et alternée . . . 122
Somme directe de fibrés vectoriels . . . 127
Fibré vectoriel des applications multilinéaires . . . 129
Produit tensoriel de fibrés vectoriels . . . 131

Puissance symétrique et extérieure d'un fibré vectoriel 133
Fibré vectoriel des formes différentielles sur une variété 134
Formes différentielles à valeurs dans un fibré vectoriel 136
Image réciproque d'un fibré vectoriel 136
Produit cartésien de fibrés vectoriels 138
Conjugué d'un fibré vectoriel complexe 139
Complexification d'un fibré vectoriel réel 139
2.2.4 Métrique euclidienne et hermitienne sur un fibré vectoriel. 140
Métriques riemannienne induite sur le fibré des tenseurs 141
2.2.5 Classification des fibrés vectoriels 141
2.3 Connexions 144
2.3.1 Lemme de tensorialité et applications : produit extérieur, produit intérieur, dérivée de Lie, contraction 145
2.3.2 Dérivations covariantes 154
2.3.3 Connexions images réciproques 159
2.3.4 Interprétation géométrique des connexions 164
2.3.5 Torsion d'une connexion sur une variété 168
2.3.6 Courbure d'une connexion 169
2.3.7 Dérivation covariante de champs de vecteurs le long de courbes . . . 171
Propriétés des connexions images réciproques 171
Transport parallèle d'une connexion 175
Groupes d'holonomie d'une connexion 177
Géodésiques d'une connexion sur une variété 177
Application exponentielle d'une connexion sur une variété 178
Champs de Jacobi d'une connexion sur une variété 180
2.4 Exercices supplémentaires 182
2.5 Indications pour la résolution des exercices 186

3 Variétés riemanniennes **195**
3.1 Variétés pseudo-riemanniennes 195
3.2 Connexion de Levi-Civita 205
Transport parallèle des connexions de Levi-Civita 208
Fonction angle d'une variété riemannienne 209
Calcul en coordonnées locales 211
Métrique pseudo-riemannienne induite sur le fibré tangent 212
Champs de Killing 213
3.3 Géodésiques 213
3.4 Distance riemannienne 219
3.4.1 Calcul des distances et formules trigonométriques sphériques et hyperboliques 228
3.5 Complétude 232
3.6 Courbure 235
3.6.1 Les avatars de la courbure 235
Calcul en coordonnées locales 242
Homogénéité et naturalité 244
3.6.2 Interprétation géométrique des champs de Jacobi 247
3.6.3 Interprétation métrique de la courbure 251

3.6.4 Variétés riemanniennes à courbure sectionnelle constante 252
3.6.5 Variétés riemanniennes à courbure sectionnelle de signe constant . . 255
3.6.6 Seconde forme fondamentale des sous-variétés riemanniennes 261
Hypersurfaces riemanniennes 267
Courbure moyenne, surfaces minimales et totalement géodésiques . . . 269
3.6.7 Espaces CAT(κ) 275
Le théorème de la bande plate et applications 285
3.7 Géométrie à l'infini des variétés de courbure négative ou nulle 286
3.7.1 Bord à l'infini des espaces CAT(0) 286
3.7.2 Fonctions de Busemann et horosphères 295
3.7.3 Feuilletages stable et instable du flot géodésique 298
3.7.4 Structure conforme au bord des espaces CAT(-1) 299
3.7.5 Distance de Tits au bord des espaces CAT(0) 302
3.8 Exercices supplémentaires 304
3.9 Indications pour la résolution des exercices 309

4 Espaces symétriques et rigidité **322**
4.1 Espaces (globalement) symétriques 322
4.1.1 Involutions de Cartan 324
4.1.2 Décomposition de de Rham 328
4.1.3 Courbure des espaces symétriques 330
4.1.4 Espaces symétriques de type non compact 332
L'espace hyperbolique complexe 336
4.1.5 Espaces localement symétriques 338
4.2 Algèbres de Lie semi-simples réelles 339
4.2.1 Sous-espace de Cartan et systèmes de racines restreintes 340
4.2.2 Éléments réguliers et chambres de Weyl 343
4.2.3 Conjugaison des chambres de Weyl 345
4.2.4 Passage des algèbres de Lie complexes aux algèbres de Lie réelles . . 347
4.2.5 Classification des involutions de Cartan 351
4.2.6 Classification des groupes de Lie compacts 353
4.2.7 Classification des algèbres de Lie réelles semi-simples 354
4.2.8 Classification des espaces symétriques de type non compact 357
4.3 Géométrie asymptotique des espaces symétriques de type non compact . . . 359
4.3.1 Plats maximaux et chambres de Weyl des espaces symétriques de type non compact 359
4.3.2 Flot géodésique des espaces symétriques de type non compact 362
4.3.3 Chambres de Weyl à l'infini 363
4.3.4 Immeuble de Tits à l'infini 365
4.4 Théorème de rigidité de Mostow 369
4.5 Exercices supplémentaires 375
4.6 Indications pour la résolution des exercices 380

Index **391**
[1]

1. Je remercie pour leurs corrections les étudiants ayant suivi ce cours en 2010-2011 (en particulier N. de Saxcé), en 2011-2012 (en particulier S. Ghosh), en 2013-2014 (en particulier A. Gilles, O. Mohsen

et I. Smilga) et 2014-2015 (en particulier F. Delgove), ainsi que Stéphane Benoist et Rémi Leclercq. Je remercie Charles Frances et Patrick Massot pour de nombreux exercices et problèmes.

Préambule.

Dans ces notes, nous ne supposerons connues que les notions de variété différentielle M de dimension n et de classe C^r pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$ (voir ci-dessous pour une explication de ces symboles), de sous-variété, de fibré tangent $\pi : TM \to M$, d'application tangente $Tf : TM \to TN$ d'une application $f : M \to N$ de classe C^1, d'espace vectoriel des champs de vecteurs $\Gamma(TM)$, de crochet $[X, Y]$ de champs de vecteurs X, Y, de flot local $(\phi_t)_t$ d'un champ de vecteurs, et les structures usuelles de variétés sur les sphères et les grassmanniennes réelles et complexes (et en particulier les espaces projectifs), voir par exemple [Laf, Pau2].

Nous renvoyons à [Ser3] pour les rappels sur les définitions et les propriétés utiles à notre propos concernant les variétés analytiques réelles et complexes. Si $r = \omega_{\mathbb{R}}$ (respectivement $r = \omega_{\mathbb{C}}$), par variété, application, etc. de classe C^r, nous entendrons variété, application, etc. analytique réelle (respectivement analytique complexe). Nous munirons l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$ de l'ordre $<$ étendant celui de $\mathbb{N}$ tel que $n < \infty < \omega_{\mathbb{R}} < \omega_{\mathbb{C}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous poserons $r + 1 = r$ si $r \in \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$. Mais un lecteur qui n'est pas intéressé par ces raffinements de régularité pourra supposer sans grand dommage que $r = +\infty$ dans tout ce texte.

Toute variété est supposée métrisable et séparable, ou de manière équivalente, séparée et à base dénombrable d'ouverts. Elle est en particulier *paracompacte*, c'est-à-dire que de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement localement fini [2]. Si M est une variété C^r où $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, rappelons qu'une *partition de l'unité* subordonnée à un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de M est une famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ où $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ est une application C^r, à valeurs positives et à support $\mathrm{Supp}(\varphi_i)$ contenu dans U_i, telle que la famille $(\mathrm{Supp}(\varphi_i))_{i \in I}$ soit localement finie et $\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$ pour tout $x \in M$. Tout recouvrement ouvert de M admet une partition de l'unité subordonnée.

Une partie A d'un espace topologique M est dite *localement fermée* si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- tout point de A admet un voisinage U dans M tel que $A \cap U$ soit fermé dans U ;
- A est ouverte dans son adhérence ;
- A est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé.

Rappelons qu'une sous-variété est localement fermée.

Soit $r \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$. Rappelons qu'une application $f : M \to N$ de classe C^r entre deux variétés C^r est

- une *immersion* en un point x de M si $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ est injective, et une *immersion* si f est une immersion en tout point de M ;
- une *submersion* en un point x de M si $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ est surjective, et une *submersion* si f est une submersion en tout point de M ;
- une *application de rang constant* [3] au voisinage d'un point x de M s'il existe un voisinage U de x dans M et $n \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $y \in U$, le rang de l'application linéaire $T_y f : T_y M \to T_{f(y)} N$ soit égal à n, et une *application de rang constant* si f est une application de rang constant au voisinage de tout point de M (attention, contrairement au cas des immersions et des submersions, cette définition est locale, et pas ponctuelle) ;

2. Rappelons qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties d'un espace topologique X est *localement finie* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x dans X tel que l'ensemble $\{i \in I \ : \ U \cap A_i \neq \emptyset\}$ est fini.

3. Une application de rang constant est aussi appelée une *subimmersion*.

- un *plongement* C^r si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

(1) f est une immersion C^r et $f : M \to f(M)$ est un homéomorphisme ;

(2) $f(M)$ est une sous-variété C^r de N et $f : M \to f(M)$ est un C^r-difféomorphisme.

L'équivalence entre ces deux définitions d'un plongement se montre aisément par le théorème suivant de forme normale des immersions. Nous renvoyons par exemple à [Laf, Pau2], ainsi qu'à [Ser3] en analytique complexe, pour les énoncés et les démonstrations des théorèmes de forme normale des immersions, submersions, applications de rang constant.

Théorème 0.1 *Soient $r \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$ et M, N deux variétés de classe C^r de dimensions p, q. Soient x un point de M et $f : M \to N$ une application de classe C^r.*

(Forme normale locale des immersions) *Si f est une immersion en x, alors pour toute carte locale φ en x telle que $\varphi(x) = 0$, il existe une carte locale ψ en $f(x)$ vérifiant $\psi(f(x)) = 0$ telle que, au voisinage de 0, on ait*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\,(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)\ .$$

(Forme normale locale des submersions) *Si f est une submersion en x, alors pour toute carte locale ψ en $f(x)$ telle que $\psi(f(x)) = 0$, il existe une carte locale φ en x vérifiant $\varphi(x) = 0$, telle que, au voisinage de 0, on ait*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\,(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_q)\ .$$

(Forme normale locale des applications de rang constant) *Si f est une application de rang constant $r \leq \min\{p, q\}$ sur un voisinage de x, alors il existe une carte locale ψ en $f(x)$ vérifiant $\psi(f(x)) = 0$ et une carte locale φ en x vérifiant $\varphi(x) = 0$, telles que, au voisinage de 0, on ait*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\,(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)\ . \ \square$$

Soient $r \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$, M et N deux variétés C^r de dimension m et n respectivement, S une sous-variété C^r de N de dimension s et $\phi : M \to N$ une application C^r. Supposons que ϕ soit *transverse* à S, c'est-à-dire que, pour tout x dans M tel que $\phi(x) \in S$, nous ayons

$$T_x\phi(T_xM) + T_{\phi(x)}S = T_{\phi(x)}N$$

(la somme n'étant pas nécessairement directe). Par exemple, si S est un point, alors ϕ est transverse à S si et seulement si ϕ est une submersion en tout point de $\phi^{-1}(S)$. Alors le *théorème de transversalité* dit que $\phi^{-1}(S)$ est une sous-variété C^r de M, de dimension $m + s - n$. Pour montrer ceci, il suffit d'appliquer le théorème de forme normale des submersions à l'application $f = p \circ \phi_{|\phi^{-1}(U)}$ où $x \in M$ vérifie $\phi(x) \in S$, où U est un voisinage ouvert de $\phi(x)$ et $p : U \to \mathbb{R}^{n-s}$ est une submersion telle que $S \cap U = p^{-1}(0)$ (qui existe par l'une des définitions équivalentes de sous-variétés), l'application f étant une submersion par l'hypothèse.

Nous aurons besoin du résultat élémentaire suivant sur les submersions.

Lemme 0.2 *Soit $f : M \to N$ une submersion de classe C^r. Alors*

(i) si M est de dimension m et N est de dimension n, alors la sous-variété $f^{-1}(y)$ est de dimension $m - n$;

(ii) pour tout x dans M, l'application $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ induit un isomorphisme linéaire $(T_x M)/(T_x(f^{-1}(y))) \simeq T_{f(x)} N$;

(iii) si f est surjective, pour toute variété P de classe C^k où $k \leq r$, une application $g : N \to P$ est de classe C^k si et seulement si $g \circ f$ l'est.

Démonstration. Par le théorème de forme normale des submersions, pour tout $x \in M$, en posant $y = f(x)$, il existe un voisinage ouvert U de x dans M tel que $f^{-1}(y) \cap U$ soit une sous-variété de M, un voisinage ouvert V de y dans N, une *section locale* $\sigma : V \to M$ de f (c'est-à-dire un plongement $\sigma : V \to M$ de classe C^r tel que $f \circ \sigma = \mathrm{id}_V$) et un C^r-difféomorphisme $h : U \to \big(V \times (f^{-1}(y) \cap U)\big)$ tel que $f_{|U} : U \to V$ soit la composée de h et de la première projection sur V. Les deux premières assertions en découlent.

Comme la propriété d'être de classe C^k est locale, puisque f est surjective, et comme $g_{|V} = g \circ f \circ \sigma$ avec V, σ comme ci-dessus, la troisième assertion découle du théorème de dérivation des fonctions composées. $\square$

Dans ce texte, nous identifions $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^{2n}$ par

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n) \ ;$$

nous noterons $\mathbb{S}_n$ la sphère unité de l'espace vectoriel euclidien standard $\mathbb{R}^{n+1}$, et en particulier $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$.

1 Groupes de Lie et espaces homogènes

« La nature aime la symétrie. » L'intérêt principal de cet aphorisme est d'être interprété (voire réfuté, en particulier par les notions d'achiralité et de brisure de symétrie). Nous le comprendrons au sens que les plus beaux[4] objets géométriques sont souvent ceux qui admettent de nombreuses symétries. Les espaces de phases en physique sont en général des variétés différentielles, et sont munis de structures géométriques par les équations de la physique qui y prennent place. Le but de ce chapitre est d'introduire les groupes de transformations de ces variétés (préservant ces structures), qui portent le nom de *groupes de Lie*, même si Sophus Lie[5] a surtout considéré leur avatar local. Ils serviront aussi à introduire une classe fondamentale d'objets géométriques, les *variétés homogènes*, archétypes des espaces ayant de nombreuses symétries, qui seront l'objet principal d'étude dans le chapitre 4. Nous revenons ainsi à la conception moderne de la géométrie : Felix Klein[4], dans son programme d'Erlangen (1872) invoqué dans le prélude, définit la géométrie comme l'étude d'espaces munis d'actions de groupes préservant des structures, et des invariants de ces transformations. Groupes et géométries, deux pluriels synonymes ?

1.1 Groupes de Lie

Un *groupe de Lie réel* (respectivement *complexe*) est un ensemble G muni d'une structure de groupe et d'une structure de variété C^∞ (respectivement analytique complexe) telles que l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$$

soit de classe C^∞ (respectivement analytique complexe). Il revient au même de demander que les applications de composition $(x, y) \mapsto xy$ et d'inverse $x \mapsto x^{-1}$ soient de classe C^∞ (respectivement analytique complexes). Par *groupe de Lie*, nous entendrons dans ces notes groupe de Lie réel ou complexe. Nous ne parlerons pas des groupes de Lie sur un corps commutatif muni d'une valeur absolue complète non archimédienne, pour lesquels nous renvoyons par exemple à [Ser3, Bou2]. Nous admettrons sans démonstration le résultat de régularité suivant, qui ne sera que très peu utile.

Théorème 1.1 *(voir [Gode, tome II, p. 6.27]) Tout groupe de Lie réel G admet une unique structure de variété analytique réelle qui rende analytique réelle l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.* □

Notons qu'il découle facilement de la définition que, pour tout élément g d'un groupe de Lie G, les translations à gauche $L_g : G \to G$ et à droite $R_g : G \to G$, définies respectivement par $x \mapsto gx$ et $x \mapsto xg^{-1}$, sont des C^∞-difféomorphismes (analytiques réels pour l'unique

4. Lire par exemple Montesquieu[4] (Charles-Louis de Secondat, baron de La Brède et de Montesquieu), *Essai sur le goût* (1757).

Montesquieu
(1689-1755)

Lie
(1842-1899)

Klein
(1849-1925)

5.

structure précédente si G est réel, et analytiques complexes si G est complexe). Certains ouvrages notent R_g l'application $x \mapsto xg$.

L'application tangente, en l'élément neutre e de G, de l'application de passage à l'inverse $g \mapsto g^{-1}$ est l'application de T_eG dans T_eG définie par $X \mapsto -X$. L'application tangente, au point (e, e) de $G \times G$, de l'application de multiplication $(g, h) \mapsto gh$ est l'application somme de $T_eG \times T_eG$ dans T_eG définie par $(X, Y) \mapsto X + Y$.

Un *morphisme (de groupes de Lie)* entre deux groupes de Lie réels (respectivement complexes) est un morphisme de groupes qui est de classe C^∞ (respectivement analytique complexe). La collection des groupes de Lie et des ensembles de morphismes entre deux groupes de Lie, munie de la composition des applications et des applications identités, est une catégorie. Notons qu'un morphisme de groupes entre deux groupes de Lie réels (respectivement complexes) est C^∞ (respectivement analytique complexe) si et seulement s'il est C^∞ (respectivement analytique complexe) en e, car $f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$ pour tout g dans G. Un *isomorphisme (de groupes de Lie)* est un morphisme bijectif, d'inverse un morphisme. Deux groupes de Lie sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre. Un *automorphisme (de groupes de Lie)* est un isomorphisme d'un groupe de Lie dans lui-même. Une *immersion (de groupes de Lie)* entre deux groupes de Lie (tous deux réels ou tous deux complexes) est un morphisme de groupes de Lie qui est une immersion de variétés (C^∞ ou analytiques complexes). Un *plongement (de groupes de Lie)* entre deux groupes de Lie (tous deux réels ou tous deux complexes) est un morphisme de groupes de Lie qui est un plongement de variétés (C^∞ ou analytiques complexes).

Proposition 1.2 *(a) Un morphisme de groupes de Lie est une application de rang constant.*

(b) Un morphisme de groupes de Lie, qui est bijectif, est un isomorphisme de groupes de Lie.

Démonstration. Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie.

(a) Pour tout x dans G, comme $f \circ L_x = L_{f(x)} \circ f$, le théorème de dérivation des applications composées montre que

$$T_x f \circ T_e L_x = T_e L_{f(x)} \circ T_e f \ .$$

Les translations à gauche sont des C^∞-difféomorphismes, donc T_eL_x et $T_eL_{f(x)}$ sont des isomorphismes linéaires. Par conséquent, les applications linéaires T_xf et T_ef ont même rang.

(b) Supposons f bijectif. Comme $f \circ L_x = L_{f(x)} \circ f$ pour tout x dans G, il suffit de vérifier que f est un C^∞-difféomorphisme local en e (si G et H sont complexes, le théorème d'inversion locale impliquera alors que f est un difféomorphisme analytique complexe). Sinon, par le théorème de forme normale des applications de rang constant et l'injectivité de f, il existerait un voisinage compact V de e dans G tel que $f(V)$ soit un fermé d'intérieur vide dans H. Comme G est séparable, il existe une suite $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dense dans G, et en particulier $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_iV$ (en effet, puisque l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un difféomorphisme de G, l'ensemble $V^{-1} = \{v^{-1} \ : \ v \in V\}$ est un voisinage de e ; donc pour tout $g \in G$, la partie gV^{-1} est un voisinage de g ; par densité, il existe donc $i \in \mathbb{N}$ tel que $g_i \in gV^{-1}$, c'est-à-dire $g \in g_iV$). Donc l'image $f(G) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(g_i)f(V)$ de f serait une union dénombrable de parties fermées de H d'intérieur vide. Comme H est métrisable, le théorème de Baire contredirait alors la surjectivité de f. $\square$

Soit G un groupe de Lie. Un *sous-groupe de Lie plongé* de G (appelé *sous-groupe de Lie* tout court dans [Bou2, Chap. III, §1, n^0 3]) est une partie de G qui est un sous-groupe de G et une sous-variété de G (de classe C^∞ si G est réel, de classe analytique complexe si G est complexe). En utilisant les translations à gauche, il suffit de vérifier que cette partie est un sous-groupe et une sous-variété de la bonne classe au voisinage de l'élément neutre de G. Sauf mention explicite du contraire, une telle partie sera toujours munie de ces deux structures. Comme celles-ci sont compatibles par restriction, tout sous-groupe de Lie plongé est donc un groupe de Lie. Une partie de G est donc un sous-groupe de Lie plongé si et seulement si c'est l'image d'un plongement de groupes de Lie.

Un *sous-groupe de Lie immergé* de G (appelé *sous-groupe intégral* dans [Bou2, Chap. III, §6, n^0 2]) est un sous-groupe H du groupe G, muni d'une structure de groupe de Lie, telle que l'inclusion $i : H \to G$ soit une immersion (de classe C^∞ si G est réel, de classe analytique complexe si G est complexe) injective. Notons que H est muni de deux topologies, sa *topologie intrinsèque* (en tant que groupe de Lie) et sa *topologie induite* (en tant que partie de G), qui peuvent être différentes.

Exemples. (1) Un groupe dénombrable, muni de l'unique atlas de cartes maximal de dimension 0, est un groupe de Lie, dit *discret*.

(2) Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous identifions $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^{2n}$ par l'application $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)$. Ainsi une application à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ est aussi une application à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Si G est un groupe de Lie complexe, alors le groupe G, muni de l'unique atlas maximal de cartes C^∞ contenant son atlas de cartes analytique complexe, est un groupe de Lie réel, appelé *sous-jacent* à G (et souvent noté encore G, parfois $G^{\mathbb{R}}$). Nous dirons qu'un groupe de Lie réel H *admet une structure de groupe de Lie complexe* s'il existe un groupe de Lie complexe G tel que $G^{\mathbb{R}} = H$. Un morphisme de groupes de Lie complexes est un morphisme de groupes de Lie réels entre les groupes de Lie réels sous-jacents.

(3) Les groupes $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{U}, \times)$ où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$, munis de leur structure de variété usuelle, C^∞ pour les trois premiers, analytique complexe pour les deux derniers, sont des groupes de Lie.

(4) Le produit de deux groupes de Lie (tous deux réels ou tous deux complexes), muni des structures de groupe produit et de variété produit, est un groupe de Lie.

(5) Le groupe de Lie produit $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ contient des sous-groupes de Lie plongés et des sous-groupes de Lie immergés non plongés.

Les parties $\{(e^{2i\pi p\theta}, e^{2i\pi q\theta}) \ : \ \theta \in \mathbb{R}\}$ où $p, q \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux, sont des sous-groupes de Lie plongés (isomorphes à $\mathbb{U}$, car image du plongement de groupes de Lie de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ défini par $e^{2i\pi\theta/r} \mapsto (e^{2i\pi p\theta}, e^{2i\pi q\theta})$ où $r = \operatorname{pgcd}(p, q)$).

Mais $H = \{(e^{2i\pi\theta}, e^{2i\pi\alpha\theta}) \ : \ \theta \in \mathbb{R}\}$ où $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est un sous-groupe de Lie immergé (intrinsèquement isomorphe à $\mathbb{R}$ par $\theta \mapsto (e^{2i\pi\theta}, e^{2i\pi\alpha\theta})$), qui n'est pas plongé. La topologie intrinsèque de H et sa topologie induite diffèrent (car $(1, e^{2i\pi\alpha})$ appartient à l'adhérence de $\{(e^{2i\pi\theta}, e^{2i\pi\alpha\theta}) \ : \ \theta \in]-\infty, 0]\}$ dans $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$, mais 1 n'appartient pas à l'adhérence de $]-\infty, 0]$ dans $\mathbb{R}$).

(6) Si G est un groupe de Lie, nous noterons G_0 la composante connexe de son élément neutre, appelée la *composante neutre* de G. Comme toute composante connexe d'un espace topologique, elle est fermée.

Proposition 1.3 *Soit G un groupe de Lie. Sa composante neutre G_0 est un sous-groupe de Lie plongé distingué ouvert de G. Les composantes connexes de G sont les classes à gauche (ainsi que les classes à droite) de G modulo G_0. L'espace topologique quotient G/G_0 est discret. Si G est connexe, alors G est engendré par tout voisinage de son élément neutre.*

Démonstration. L'application de $G_0 \times G_0$ dans G définie par $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est continue, donc son image est contenue dans G_0 par connexité, donc G_0 est un sous-groupe. Pour tout g dans G, l'application de G_0 dans G définie par $x \mapsto gxg^{-1}$ est continue, donc son image est contenue dans G_0 par connexité, donc G_0 est distingué. Puisque toute variété est localement connexe par arcs, G_0 est ouverte, donc une sous-variété.

Le sous-groupe de G engendré par un voisinage donné de son élément neutre est ouvert. Tout sous-groupe ouvert H de G est fermé, car son complémentaire est ouvert, comme union des classes à droite de H distinctes de celle de l'élément neutre, qui sont ouvertes. Donc si G est connexe, alors G est engendré par tout voisinage de son élément neutre.

Le reste est laissé en exercice. □

(7) Si V est un espace vectoriel réel (respectivement complexe) de dimension finie, alors le groupe

$$\mathrm{GL}(V)$$

des automorphismes linéaires de V, muni de sa structure d'ouvert de l'espace vectoriel réel (respectivement complexe) de dimension finie $\mathrm{End}(V)$ des applications linéaires de V dans lui-même, est un groupe de Lie réel (respectivement complexe), appelé le *groupe linéaire* de V.

En effet, montrons que la composition et l'inverse sont C^∞ (respectivement analytiques complexes). La composition $(f, g) \mapsto f \circ g$ est la restriction à l'ouvert $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(V)$ d'une application bilinéaire de $\mathrm{End}(V)$, donc est C^∞ (respectivement analytique complexe). Si g est un élément de $\mathrm{GL}(V)$, alors son inverse est l'unique application f vérifiant l'équation $g \circ f - \mathrm{id} = 0$. Le théorème des fonctions implicites, appliqué à la fonction $F(g, f) = g \circ f - \mathrm{id}$, dont la différentielle partielle par rapport à la seconde variable en un point (g, f) est l'application linéaire inversible $Y \mapsto g \circ Y$ de $\mathrm{End}(V)$ dans lui-même, montre que l'inverse $g \mapsto g^{-1}$ est C^∞ (respectivement analytique complexe).

Soit G un groupe de Lie réel (respectivement complexe). Une *représentation (de groupes de Lie)* de G est un morphisme de groupes de Lie de G dans $\mathrm{GL}(V)$, où V est un espace vectoriel réel (respectivement complexe) de dimension finie. Notons qu'une application $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est C^∞ (respectivement analytique complexe) si et seulement si l'application $G \times V \to V$ définie par $(g, v) \mapsto \rho(g)v$ l'est.

(8) La multiplication de deux matrices carrées réelles (respectivement complexes) est polynomiale en les coefficients, donc C^∞ (respectivement analytique complexe). Par la formule $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\ {}^t\mathrm{Comatrice}(M)$ exprimant l'inverse d'une matrice inversible, l'inverse d'une matrice carrée inversible réelle (respectivement complexe) est rationnelle (de dénominateur ne s'annulant pas) en ses coefficients, donc C^∞ (respectivement analytique complexe). Donc, pour $K = \mathbb{R}$ (respectivement $K = \mathbb{C}$), le groupe

$$\mathrm{GL}_n(K)\ ,$$

muni de sa structure de variété C^∞ (respectivement analytique complexe) en tant qu'ouvert de l'espace vectoriel réel (respectivement complexe) $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ (resp. $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$) est

un groupe de Lie réel (respectivement complexe). Notons que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de Lie plongé du groupe de Lie réel sous-jacent au groupe de Lie complexe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Si V est un espace vectoriel sur K de dimension n, si $\mathscr{B}$ est une base de V, alors l'application qui à un automorphisme linéaire de V associe sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est un isomorphisme de groupes de Lie de $\mathrm{GL}(V)$ dans $\mathrm{GL}_n(K)$.

(9) Les applications exponentielles $x \mapsto e^x$ de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ et de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$, et l'application $x \mapsto e^{ix}$ de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$, sont des morphismes de groupes de Lie, la première étant un isomorphisme sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. Les applications déterminants $x \mapsto \det x$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ et de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des morphismes de groupes de Lie.

(10) Pour tout groupe de Lie G et pour tout g dans G, la *conjugaison* $i_g : G \to G$ définie par

$$i_g : x \mapsto gxg^{-1}$$

est un automorphisme de groupes de Lie. Si $\mathrm{Aut}(G)$ désigne le groupe des automorphismes de groupes de Lie de G, il est immédiat que l'application $i : G \to \mathrm{Aut}(G)$, définie par $g \mapsto i_g$, est un morphisme de groupes : $i_{gg'} = i_g \circ i_{g'}$ (et donc $i_e = \mathrm{id}$).

(11) Les groupes de Lie de l'exercice suivant sont appelés des *groupes classiques* (voir par exemple [Die4, Hel]). Nous étudierons les redondances dans cette liste dans la partie 1.4, et leur nombre de composantes connexes dans l'exercice E.13 de la partie 1.4.5.

Soient n, p, q des éléments de $\mathbb{N}$ non nuls. Notons I_n la matrice identité n-n, et

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

Rappelons que $\mathbb{H}$ désigne *l'algèbre des quaternions de Hamilton* sur $\mathbb{R}$, qui est l'unique algèbre réelle de base vectorielle $(1, i, j, k)$, d'élément neutre 1, telle que $i^2 = j^2 = -1$ et $ij = -ji = k$. La partie réelle d'un quaternion $x = a + bi + cj + dk$ (où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) est

$$\mathrm{Re}\, x = a \ ,$$

son *conjugué* est

$$\overline{x} = a - bi - cj - dk \ ,$$

sa *norme* est

$$N(x) = x\overline{x} = \overline{x}x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ .$$

Pour tout $x = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, nous noterons $\tau_2(x) = a + bi - cj + dk$. Les applications $x \mapsto \overline{x}$ et τ_2 sont des anti-involutions, c'est-à-dire des applications linéaires involutives telles que $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$ et $\tau_2(xy) = \tau_2(y)\tau_2(x)$ pour tous les $x, y \in \mathbb{H}$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, pour tout élément $x = (a_{r,s})_{1 \le r,s \le n}$ de l'algèbre réelle $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, nous noterons ${}^t x = (a_{s,r})_{1 \le r,s \le n}$ sa matrice transposée et $\overline{x} = (\overline{a_{r,s}})_{1 \le r,s \le n}$ sa matrice conjuguée, ainsi que $\tau_2(x) = (\tau_2(a_{r,s}))_{1 \le r,s \le n}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{H}$.

Pour tout $n \ge 1$, l'application Θ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{H})$ dans (l'algèbre réelle sous-jacente à) $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par

$$A + iB + jC + kD \mapsto \begin{pmatrix} A + iB & -C - iD \\ C - iD & A - iB \end{pmatrix} \ ,$$

où $A, B, C, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, est un isomorphisme d'algèbres réelles sur son image, qui vérifie de plus

$$\Theta({}^t\overline{X}) = {}^t\,\overline{\Theta(X)} \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(\Theta(X)) = 2\operatorname{Re}(\operatorname{tr} X)\ .$$

Nous identifierons $\mathscr{M}_n(\mathbb{H})$ avec son image dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ par cette application. Le *déterminant de Dieudonné* (voir par exemple [Die1, Asl]) d'une matrice x dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{H})$, que nous noterons encore $\det(x)$, est la racine carré du déterminant (dont on peut vérifier qu'il est positif ou nul) de la matrice complexe $\Theta(x)$ dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Par exemple, l'application $\det : \mathscr{M}_1(\mathbb{H}) = \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ est $x \mapsto \sqrt{N(x)}$.

Exercice E.1 *a) Montrer que les parties suivantes du groupe de Lie réel (sous-jacent à)* $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ *pour un entier m convenable, en sont des sous-groupes de Lie plongés, et calculer leur dimension :*

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) & = & \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ : \ \det x = 1\} \\
\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) & = & \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \ : \ \det x = 1\} \\
\mathrm{SL}(n,\mathbb{H}) & = & \{x \in \mathscr{M}_n(\mathbb{H}) \ : \ \det x = 1\} \\
\mathrm{SU}^*(2n) & = & \{x \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{C}) \ : \ J_n\, x = \overline{x} J_n\} \\
\mathrm{O}(n) & = & \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ : \ {}^t x\, x = I_n\} \\
\mathrm{SO}(n) & = & \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \\
\mathrm{O}(p,q) & = & \{x \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) \ : \ {}^t x\, I_{p,q}\, x = I_{p,q}\} \\
\mathrm{SO}(p,q) & = & \mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{R}) \\
\mathrm{O}_n(\mathbb{C}) & = & \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \ : \ {}^t x\, x = I_n\} \\
\mathrm{SO}_n(\mathbb{C}) & = & \mathrm{O}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \\
\mathrm{SO}(n,\mathbb{H}) & = & \{x \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{H}) \ : \ \tau_2({}^t x)\, x = I_n\} \\
\mathrm{SO}^*(2n) & = & \{x \in \mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{x}\, J_n\, x = J_n\} \\
\mathrm{U}(n) & = & \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{x}\, x = I_n\} \\
\mathrm{SU}(n) & = & \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \\
\mathrm{U}(p,q) & = & \{x \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{x}\, I_{p,q}\, x = I_{p,q}\} \\
\mathrm{SU}(p,q) & = & \mathrm{U}(p,q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{C}) \\
\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) & = & \{x \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \ : \ {}^t x\, J_n\, x = J_n\} \\
\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C}) & = & \{x \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t x\, J_n\, x = J_n\} \\
\mathrm{Sp}(p,q) & = & \{x \in \mathscr{M}_n(\mathbb{H}) \ : \ {}^t\overline{x}\, I_{p,q}\, x = I_{p,q}\} \\
\mathrm{Sp}(n) & = & \{x \in \mathscr{M}_n(\mathbb{H}) \ : \ {}^t\overline{x}\, x = I_n\} \\
\mathrm{Sp}_*(n) & = & \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(2n)
\end{array}} \ .$$

b) Montrer que, dans cette liste, seuls les groupes de Lie réels $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ *et* $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$ *admettent une structure de groupe de Lie complexe.*

c) Montrer que des isomorphismes de groupes de Lie réels suivants existent :

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{H}) \simeq \mathrm{SU}^*(2n)\ , \quad \mathrm{SO}(n,\mathbb{H}) \simeq \mathrm{SO}^*(2n)\ , \quad \mathrm{Sp}(n) \simeq \mathrm{Sp}_*(n)\ ,$$

$$\mathrm{Sp}(p,q) \simeq \{x \in \mathrm{Sp}_{p+q}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{x}\, K_{p,q}\, x = K_{p,q}\}\ .$$

Les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ sont appelés les *groupes linéaires spéciaux* réel et complexe. Les groupes $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{Sp}(n)$ sont appelés le *groupe orthogonal*, le *groupe unitaire* et le *groupe unitaire quaternionien* de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{H}^n$ respectivement, et les groupes $\mathrm{SO}(n)$

et $\mathrm{SU}(n)$ le *groupe orthogonal spécial* et le *groupe unitaire spécial* de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$. Les groupes $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$ sont appelés les *groupes symplectiques* réel et complexe.

Nous concluons cette partie en énonçant sans démonstration deux résultats qui permettent de construire des groupes de Lie en ne vérifiant que des propriétés topologiques et de théorie des groupes.

Un *groupe topologique* est un groupe G muni d'une topologie telle que l'application de $G \times G$ dans G définie par $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ soit continue. Les deux résultats suivants donnent des conditions purement topologiques sur un groupe topologique pour qu'il admette au moins une structure de groupe de Lie réel compatible avec sa structure de groupe topologique. Nous montrerons qu'une telle structure est unique dans le corollaire 1.45.

Un groupe topologique est dit *sans petit sous-groupe* s'il existe un voisinage de l'identité qui ne contient aucun sous-groupe non trivial. Par exemple, le groupe additif $\mathbb{Q}_p$ muni de sa distance usuelle (voir par exemple [Ser2]) n'est pas sans petit sous-groupe. Rappelons que le corps $\mathbb{Q}_p$ est le corps complété du corps $\mathbb{Q}$ pour la distance

$$d(x, x') = \begin{cases} e^{-\nu_p(x-x')} & \text{si } x \neq x' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\nu_p : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}$ est définie en notant $\nu_p(x)$ l'élément n de $\mathbb{Z}$ tel que $x = p^n \frac{u}{v}$ avec u, v dans $\mathbb{Z}$ premiers entre eux et non divisibles par p. En effet, si $\mathbb{Z}_p$ est l'adhérence de $\mathbb{Z}$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, le sous-groupe $p^N\mathbb{Z}_p$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{Q}_p$, proche de l'élément neutre si N est grand.

Notons que le groupe topologique $(\mathbb{Q}_p, +)$ est totalement discontinu et non discret. En particulier, sa composante neutre, qui est réduite à $\{0\}$, n'est pas ouverte.

Théorème 1.4 *(Gleason, voir [MonZ, pages 169,163], et aussi les problèmes (5) à (9), pages 162 à 166, de [Die3]) Soit G un groupe topologique localement compact, métrisable, séparable et sans petit sous-groupe. Alors G admet une et une seule structure de groupe de Lie réel compatible avec sa structure de groupe topologique.* □

Le théorème 1.4 est l'étape essentielle pour la démonstration du résultat suivant.

Théorème 1.5 *(Cinquième problème de Hilbert, démontré par Montgomery, voir par exemple [MonZ, page 184]) Soit G un groupe topologique. Si G est une variété topologique, alors G admet une et une seule structure de groupe de Lie réel compatible avec sa structure de groupe topologique.* □

Exercice E.2 (Décomposition polaire) *(1) Soit $\mathscr{H}$ (respectivement $\mathscr{H}^+$) le sous-ensemble de l'espace vectoriel réel de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, formé des matrices hermitiennes (respectivement hermitiennes définies positives). Montrer que $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}^+$ sont des sous-variétés C^∞ (et même analytiques réelles) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et que l'application exponentielle des matrices*

$$X \mapsto e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

est un difféomorphisme C^∞ (et même analytique réel) de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}^+$. Montrer qu'il existe un et un seul difféomorphisme C^∞ (et même analytique réel) $x \mapsto \sqrt{x}$ de $\mathscr{H}^+$ dans lui-même tel que $(\sqrt{x}\,)^2 = x$ pour tout x dans $\mathscr{H}^+$.

(2) Montrer que l'application $\mathscr{H}^+ \times \mathrm{U}(n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *définie par* $(x,y) \mapsto xy$ *est un difféomorphisme* C^∞ *(et même analytique réel) (appelé la* décomposition polaire *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *), d'inverse* $x \mapsto (\sqrt{x^*x}, \sqrt{x^*x}^{\,-1}x)$*, où* $x^* = {}^t\overline{x}$ *est la matrice adjointe de* x*. Si* $\mathscr{S}$ *(respectivement* $\mathscr{S}^+$*) est l'ensemble des matrices réelles* $n \times n$ *symétriques (respectivement symétriques définies positives), montrer que l'application* $\mathscr{S}^+ \times \mathrm{O}(n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *définie par* $(x,y) \mapsto xy$ *est un difféomorphisme* C^∞ *(et même analytique réel) (appelé la* décomposition polaire *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *).*

(3) Soit G *un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*, qui est* auto-adjoint *(c'est-à-dire tel que si* $x \in G$ *alors* $x^* \in G$*), et qui est un* sous-ensemble algébrique réel *de* $\mathbb{R}^{2n^2}$ *(c'est-à-dire l'ensemble des zéros communs d'une famille de polynômes à coefficients réels en les parties réelles et complexes des coefficients de matrices). Soient* $\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* G *(voir la partie 1.2.2, en utilisant le théorème de Cartan 1.43 qui implique que* G*, puisque fermé, est un sous-groupe de Lie réel plongé de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*),* $K = G \cap \mathrm{U}(n)$ *et* $\mathfrak{p} = \mathscr{H} \cap \mathfrak{g}$*. Montrer que* K *est un sous-groupe compact maximal de* G*. Montrer que l'application de* $K \times \mathfrak{p}$ *dans* G *définie par* $(k,X) \mapsto k\,e^X$ *est un difféomorphisme* C^∞*.*[6] *En déduire que si* G *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*, qui est auto-adjoint, et qui est un sous-ensemble algébrique réel de* $\mathbb{R}^{n^2}$*, alors* $G \cap \mathrm{O}(n)$ *est un sous-groupe compact maximal de* G*, et l'application de* $(G \cap \mathrm{O}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathscr{S})$ *dans* G *définie par* $(k,X) \mapsto k\,e^X$ *est un difféomorphisme* C^∞*.*

(4) En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est difféomorphe à* $\mathrm{U}(n) \times \mathbb{R}^{\,n^2}$*, que* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ *est difféomorphe à* $\mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}^{\,n^2-1}$*, que* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est difféomorphe à* $\mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$*, et que* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *est difféomorphe à* $\mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$*.*

(5) Déterminer le groupe fondamental de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$*,* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$*,* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$*,* $\mathrm{U}(2,2)$*,* $\mathrm{SU}(2,2)$ *et* $\mathrm{SO}(2,2)$

1.2 Algèbres de Lie

Nous renvoyons par exemple à [Bou1, Bou2] pour des compléments sur cette partie.

1.2.1 Généralités

Soit K un corps commutatif.[7] Une *algèbre de Lie* sur K est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ sur K muni d'une application bilinéaire de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, notée $(x,y) \mapsto [x,y]$, telle que

- $\forall\, x,y \in \mathfrak{g}, \quad [y,x] = -[x,y]$,
- $\forall\, x,y,z \in \mathfrak{g}, \quad [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$.

L'application $(x,y) \mapsto [x,y]$ s'appelle le *crochet de Lie* de $\mathfrak{g}$. La première propriété s'appelle l'*anticommutativité* et la seconde l'*identité de Jacobi* du crochet de Lie.

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ deux algèbres de Lie sur K. Un *morphisme (d'algèbres de Lie)* de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ est une application linéaire $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ qui préserve les crochets de Lie, c'est-à-dire telle que

$$\forall\, x,y \in \mathfrak{g}, \quad \varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]\ .$$

Remarquons que cette relation n'est pas linéaire en φ. La collection des algèbres de Lie et des ensembles de morphismes entre deux algèbres de Lie, munie de la composition des

6. On pourra utiliser l'exercice disant que si $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application polynomiale, si $(\lambda_1 \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie que $P(e^{k\lambda_1}, \ldots, e^{k\lambda_n}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $P(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

7. En anglais, un corps commutatif est appelé « a field », et un corps est appelé « a division algebra ».

applications et des applications identités, est une catégorie. Un *isomorphisme (d'algèbres de Lie)* est un morphisme bijectif, d'inverse un morphisme. Remarquons qu'un morphisme d'algèbres de Lie bijectif est un isomorphisme d'algèbres de Lie. Deux algèbres de Lie sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'une sur l'autre. Un *automorphisme (d'algèbres de Lie)* est un isomorphisme d'une algèbre de Lie dans elle-même. Nous noterons $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Une *sous-algèbre de Lie* de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ qui est stable par le crochet de $\mathfrak{g}$ (c'est-à-dire tel que si $X, Y \in \mathfrak{h}$, alors $[X, Y] \in \mathfrak{h}$). Muni de la restriction de ce crochet, c'est une algèbre de Lie. Sauf mention explicite du contraire, toute sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ sera munie de cette structure d'algèbre de Lie.

Exemples. (1) Tout espace vectoriel V sur K, muni du crochet de Lie nul, est une algèbre de Lie sur K, dite *abélienne* (ou commutative).

(2) Si A est une algèbre (associative) sur K, alors l'espace vectoriel A, muni du crochet

$$[x, y] = xy - yx \ ,$$

est une algèbre de Lie sur K. C'est par exemple le cas, pour tout espace vectoriel V sur K, de l'algèbre $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V, et nous noterons

$$\mathfrak{gl}(V)$$

l'algèbre de Lie obtenue. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, c'est aussi le cas de l'algèbre $\mathscr{M}_n(K)$ des matrices carrées n-n à coefficients dans K, et nous noterons

$$\mathfrak{gl}_n(K)$$

l'algèbre de Lie obtenue. Si V est un espace vectoriel de dimension finie n sur K, et $\mathscr{B}$ une base de V, alors l'application, qui à un endomorphisme de V associe sa matrice dans la base $\mathscr{B}$, est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ dans $\mathfrak{gl}_n(K)$. Une *représentation* (respectivement *représentation de dimension finie*) d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur K est un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, où V est un espace vectoriel (respectivement espace vectoriel de dimension finie) sur K.

(3) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur K. Pour tout sous-corps K' de K, l'ensemble $\mathfrak{g}$, muni de son crochet et de sa structure d'espace vectoriel naturelle sur K', est aussi une algèbre de Lie sur K', dite *obtenue par restriction des scalaires* de K à K'. En particulier, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe, nous noterons $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ l'algèbre de Lie réelle obtenue de $\mathfrak{g}$ par restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$.

Si K' est un sur-corps de K, alors le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ s'étend par bilinéarité de manière unique à l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \otimes_K K'$ sur K' : pour tous les $x, y \in \mathfrak{g}$ et $\lambda, \mu \in K'$, nous avons

$$[x \otimes \lambda, y \otimes \mu] = [x, y] \otimes (\lambda\mu) \ .$$

L'espace vectoriel $\mathfrak{g} \otimes_K K'$, muni du crochet étendu, est une algèbre de Lie sur K', dite *obtenue par extension des scalaires* de K à K'. Par exemple, les algèbres de Lie complexes $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ sont canoniquement isomorphes.

Exercice E.3 *En notant $\mathfrak{su}(2)$ la sous-algèbre de Lie réelle de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ des matrices antihermitiennes de trace nulle, montrer que l'inclusion de $\mathfrak{su}(2)$ dans $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ induit un isomorphisme d'algèbres de Lie complexes entre $\mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.*

(4) Si $(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$ est une famille d'algèbres de Lie sur K, alors l'espace vectoriel produit $\prod_{i\in I}\mathfrak{g}_i$, muni du crochet

$$[(x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}]=([x_i,y_i])_{i\in I}$$

est une algèbre de Lie sur K, appelée *algèbre de Lie produit.*

(5) Le noyau et l'image d'un morphisme d'algèbres de Lie sont des sous-algèbres de Lie. Toute intersection de sous-algèbres de Lie est une sous-algèbre de Lie.

(6) **Dérivations.** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur K. Une *dérivation (d'algèbres de Lie)* de $\mathfrak{g}$ est une application linéaire $\delta:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ telle que

$$\forall\, x,y\in\mathfrak{g},\quad \delta([x,y])=[\delta(x),y]+[x,\delta(y)]\ .$$

Remarquons que l'ensemble des dérivations de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ des endomorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$, que l'on note $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. En effet, si δ et δ' sont des dérivations, alors

$$\delta\circ\delta'([x,y])=[\delta\circ\delta'(x),y]+[\delta(x),\delta'(y)]+[\delta'(x),\delta(y)]+[x,\delta\circ\delta'(y)]\ ,$$

donc $[\delta,\delta']=\delta\circ\delta'-\delta'\circ\delta$ est encore une dérivation.

(7) **Représentation adjointe et forme de Killing.** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur K. Pour tout X dans $\mathfrak{g}$, l'application $\mathrm{ad}\,X:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ définie par

$$\mathrm{ad}\,X\,(Y)=[X,Y]$$

est une dérivation d'algèbres de Lie (parfois appelée *dérivation intérieure*), car pour tous les Y et Z dans $\mathfrak{g}$, nous avons

$$\mathrm{ad}\,X\,([Y,Z])=[\mathrm{ad}\,X\,(Y),Z]+[Y,\mathrm{ad}\,X\,(Z)]\ ,$$

ce qui est une simple réécriture de l'identité de Jacobi. L'application $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ définie par $X\mapsto\mathrm{ad}\,X$ est un morphisme d'algèbres de Lie, car pour tous les X et Y dans $\mathfrak{g}$, nous avons

$$\mathrm{ad}\,[X,Y]\,(Z)=\mathrm{ad}\,X\circ\mathrm{ad}\,Y\ (Z)-\mathrm{ad}\,Y\circ\mathrm{ad}\,X\ (Z)=[\mathrm{ad}\,X,\mathrm{ad}\,Y](Z)\ ,$$

ce qui est aussi une simple réécriture de l'identité de Jacobi (le crochet de Lie à droite est celui de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$). La représentation d'algèbres de Lie

$$\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

s'appelle la *représentation adjointe* de $\mathfrak{g}$. Elle est à valeur dans $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Le noyau de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est appelé le *centre* de $\mathfrak{g}$, et noté

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=\{X\in\mathfrak{g}\ :\ \forall\,Y\in\mathfrak{g},\ \ [X,Y]=0\}\ .$$

En particulier, toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sans centre se plonge dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Par exemple, puisque toute matrice n-n qui commute avec toute matrice diagonale est un multiple de la matrice identité I_n, nous avons

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(K))=K\ I_n\ .$$

Si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, la *forme de Killing* de $\mathfrak{g}$ est l'application $B = B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to K$ définie par

$$B(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y) \ .$$

Par les propriétés de la trace des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie, et par linéarité de la représentation adjointe, la forme de Killing est bilinéaire et symétrique.

Elle est invariante par tout automorphisme d'algèbres de Lie : si $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie, alors, pour tous les x et y dans $\mathfrak{g}$, nous avons

$$B_{\mathfrak{g}'}(f(x), f(y)) = B_{\mathfrak{g}}(x, y) \ ,$$

car l'égalité $[f(x), f(y)] = f([x, y])$ implique que $\operatorname{ad}\big(f(x)\big) = f \circ (\operatorname{ad} x) \circ f^{-1}$, et le résultat découle des propriétés de la trace.

Elle est de plus ad-*alternée* (une terminologie fréquente mais peu mnémotechnique est « invariante ») c'est-à-dire alternée pour les endomorphismes $\operatorname{ad} x$: pour tous les $x, y, z \in \mathfrak{g}$,

$$B(\operatorname{ad} x\,(y), z) = -B(y, \operatorname{ad} x\,(z)) \ .$$

En effet, en appliquant deux fois l'identité de Jacobi,

$$\begin{aligned} B([x, y], z) &= \operatorname{tr}\big((\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y - \operatorname{ad} y \circ \operatorname{ad} x) \circ \operatorname{ad} z\big) \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad} y \circ \operatorname{ad} z \circ \operatorname{ad} x) - \operatorname{tr}(\operatorname{ad} y \circ \operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} z) = B(y, [z, x]) = -B(y, [x, z]) \ . \end{aligned}$$

Par exemple, la forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(K)$ est

$$\forall\, X, Y \in \mathfrak{gl}_n(K), \quad B(X, Y) = 2n \operatorname{tr}(XY) - 2 \operatorname{tr} X \operatorname{tr} Y \ . \qquad (\cdot\, 1 \,\cdot)$$

En effet, soit $(E_{i,\,j})_{1 \le i,\, j \le n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(K)$ (où les coefficients de $E_{i,\,j}$ sont nuls sauf le coefficient i-j qui vaut 1). Pour tout $X = (x_{i,\,j})_{1 \le i,\, j \le n} \in \mathfrak{gl}_n(K)$, nous avons

$$\operatorname{ad} X(E_{i,\,j}) = \sum_{1 \le k \le n} x_{k,\,i} E_{k,\,j} - \sum_{1 \le k \le n} x_{j,\,k} E_{i,\,k} \ .$$

Un petit calcul montre alors le résultat.

(8) **Algèbres de Lie classiques.** L'exercice suivant donne une liste d'algèbres de Lie, dites *classiques*. Notons $\operatorname{tr} X$ la trace d'une matrice carrée X, et reprenons les notations de l'exercice E.1.

Exercice E.4 *a) Montrer que les exemples suivants sont des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie réelle* $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$*, pour un* m *convenable, et que* $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$

sont des sous-algèbres de Lie complexes de $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$, pour un m convenable :

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ : \ \mathrm{tr}\ X = 0\} \\
\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \ : \ \mathrm{tr}\ X = 0\} \\
\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}) & = & \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{H}) \ : \ \mathrm{Re\ tr}\ X = 0\} \\
\mathfrak{o}(n) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \ : \ {}^tX = -X\} \\
\mathfrak{so}(n) & = & \mathfrak{o}(n) \\
\mathfrak{o}(p,q) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tX\, I_{p,\,q} + I_{p,\,q}\, X = 0\} \\
\mathfrak{so}(p,q) & = & \mathfrak{o}(p,q) \\
\mathfrak{u}(n) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{X} = -X\} \\
\mathfrak{su}(n) & = & \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \\
\mathfrak{u}(p,q) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{X}\, I_{p,\,q} + I_{p,\,q}\, X = 0\} \\
\mathfrak{su}(p,q) & = & \mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{sl}_{p+q}(\mathbb{C}) \\
\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R}) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tX\, J_n + J_n\, X = 0\} \\
\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ : \ {}^tX = -X\} \\
\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) & = & \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) \\
\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C}) \ : \ {}^tX\, J_n + J_n\, X = 0\} \\
\mathfrak{sp}(p,q) & = & \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{H}) \ : \ {}^t\overline{X}\, I_{p,\,q} + I_{p,\,q}\, X = 0\} \\
\mathfrak{sp}(n) & = & \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{H}) \ : \ {}^t\overline{X} = -X\} \\
\mathfrak{sp}_*(n) & = & \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{su}(2n) \\
\mathfrak{su}^*(2n) & = & \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C}) \ : \ J_n\, X = \overline{X} J_n\} \\
\mathfrak{so}^*(2n) & = & \{X \in \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{X}\, J_n + J_n\, X = 0\}
\end{array}} \ .$$

b) Montrer que des isomorphismes d'algèbres de Lie réelles suivants existent :

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}) \simeq \mathfrak{su}^*(2n)\ , \quad \mathfrak{sp}(n) \simeq \mathfrak{sp}_*(n)\ ,$$

$$\mathfrak{sp}(p,q) \simeq \{X \in \mathfrak{sp}_{p+q}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{X}\, K_{p,\,q} + K_{p,\,q}\, X = 0\}\ .$$

c) Montrer que les inclusions de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, de $\mathfrak{o}(n)$ dans $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$ et de $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ induisent des isomorphismes d'algèbres de Lie complexes

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})\ , \quad \mathfrak{o}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathfrak{o}_n(\mathbb{C})\ , \quad \mathfrak{sp}_n(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})\ .$$

Ainsi $\mathfrak{o}(n)$ est l'algèbre de Lie des matrices réelles n-n antisymétriques, et $\mathfrak{u}(n)$ est l'algèbre de Lie (réelle) des matrices complexes n-n antihermitiennes.

(9) **Algèbres de Lie libre.** Soit S un ensemble. Soit $M(S)$ le *magma libre sur S*, c'est-à-dire l'ensemble des mots parenthésés non vides sur S, construit comme la réunion disjointe

$$M(S) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} S_n$$

des ensembles S_n pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, où par récurrence, $S_1 = S$ et S_n est la réunion disjointe des $S_p \times S_{n-p}$ pour $1 \leq p \leq n-1$, muni de la loi de composition $a \cdot b = (a,b)$ où $a \in S_m$, $b \in S_n$ et $(a,b) \in S_{m+n}$. Soit $A_K(S)$ l'espace vectoriel sur K des combinaisons linéaires finies formelles d'éléments de $M(S)$ à coefficients dans K, muni de l'unique application bilinéaire $(a,b) \mapsto a \cdot b$ étendant la loi de $M(S)$. Nous appellerons *algèbre de Lie libre sur*

S, et noterons $\mathfrak{L}(S)$, ou $\mathfrak{L}_K(S)$ lorsqu'il est utile de préciser K, l'espace vectoriel quotient de $A_K(S)$ par son plus petit sous-espace vectoriel stable par les multiplications à droite et à gauche et contenant les éléments $a \cdot a$ pour $a \in A_K(S)$ et $a \cdot (b \cdot c) + b \cdot (c \cdot a) + c \cdot (a \cdot b)$ pour $a, b, c \in A_K(S)$, muni de l'application $(x, y) \mapsto [x, y]$ induite par la multiplication de $A_K(S)$. C'est clairement une algèbre de Lie, munie d'une application $i : S \to \mathfrak{L}(S)$ en passant au quotient l'inclusion de S dans $A_K(S)$.

Elle vérifie la propriété universelle suivante (voir [Bou2, Chap. II, §2, n^0 2]) : pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ munie d'une application $j : S \to \mathfrak{h}$, il existe un unique morphisme (dit *canonique*) d'algèbres de Lie ϕ de $\mathfrak{L}(S)$ dans $\mathfrak{h}$ tel que $\phi \circ i = j$.

(10) **L'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété.** Soient M une variété C^∞ (respectivement analytique complexe), et $\Gamma(TM)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs C^∞ (respectivement analytiques complexes) sur M, qui est un module sur l'anneau $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ (respectivement des applications holomorphes de M dans $\mathbb{C}$) pour la multiplication point par point $fX : x \mapsto f(x)X(x)$ d'un champ de vecteurs lisse (respectivement analytique complexe) X sur M par une fonction lisse (respectivement analytique complexe) f de M dans $\mathbb{R}$.

Rappelons que si $f : M \to N$ est un difféomorphisme local, alors l'application *image réciproque* des champs de vecteurs par f est l'application $f^* : \Gamma(TN) \to \Gamma(TM)$ définie par

$$\forall\, Y \in \Gamma(TN),\ \ \forall\, x \in M, \quad f^*Y(x) = (T_x f)^{-1}\big(Y(f(x))\big)\ .$$

Si $f : M \to N$ est un difféomorphisme, alors l'application *image directe* des champs de vecteurs par f est l'application $(f^{-1})^* : \Gamma(TM) \to \Gamma(TN)$ (que nous ne noterons pas f_* pour ne pas la confondre avec une autre opération sur les champs de vecteurs qui sera introduite dans la partie 2.3.7). Elle vérifie donc

$$\forall\, X \in \Gamma(TM),\ \ \forall\, y \in N, \quad (f^{-1})^*X(y) = T_{f^{-1}(y)}f\big(X(f^{-1}(y))\big)\ .$$

Nous avons $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. Rappelons que pour tous les X et Y dans $\Gamma(TM)$, le *crochet de Lie* de X et de Y est l'unique champ de vecteurs $[X, Y]$ de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) sur M tel que pour toute carte locale (U, φ) de M, en notant $\psi = \varphi^{-1}$,

$$\forall\, x \in \varphi(U), \quad \psi^*[X, Y](x) = d_x(\psi^*Y)\big(\psi^*X(x)\big) - d_x(\psi^*X)\big(\psi^*Y(x)\big)\ ,$$

en considérant les champs de vecteurs sur un ouvert V de $\mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ comme des applications de V dans $\mathbb{K}^n$ (attention à l'ordre de Y et de X dans cette formule !). Autrement dit, si dans une carte locale X s'écrit $\sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et Y s'écrit $\sum_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, alors $[X, Y]$ s'écrit

$$\sum_j \Big(\sum_i X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\Big) \frac{\partial}{\partial x_j}\ .$$

L'espace vectoriel réel (respectivement complexe) $\Gamma(TM)$ des champs de vecteurs C^∞ (respectivement analytiques complexes) sur M, muni du crochet de Lie des champs de vecteurs, est une algèbre de Lie réelle (respectivement complexe), par la même démonstration que pour les algèbres associatives. Si $f : M \to N$ est un difféomorphisme local, alors $f^* : \Gamma(TN) \to \Gamma(TM)$ est un morphisme d'algèbres de Lie, car si U et V sont des ouverts de M et N respectivement tels que $f_{|U} : U \to V$ soit un difféomorphisme et tels qu'il existe une carte locale (V, φ) de N, alors $(U, \varphi \circ f)$ est une carte locale de M et

$((\varphi \circ f)^{-1})^* = (\varphi^{-1})^* \circ (f^*)^{-1}$. En particulier, si $f : M \to N$ est un difféomorphisme, alors $f^* : \Gamma(TN) \to \Gamma(TM)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie, et donc

$$\forall\, X, Y \in \Gamma(TN), \quad f^*[X, Y] = [f^*X, f^*Y]\ .$$

Exercice E.5 *Soient $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $(\phi_t)_t, (\psi_t)_t$ les flots locaux de X et de Y respectivement.*

(1) Montrer que $[X, Y] = \frac{d}{dt}_{|t=0} (\phi_t)^*Y$.

(2) Montrer que $\frac{d}{dt}_{|t=0} \phi_t \circ \psi_t \circ \phi_{-t} \circ \psi_{-t}(x) = 0$ pour tout $x \in M$.

(3) Montrer que $[X, Y](x) = \frac{d}{dt}_{|t=0^+} \phi_{\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \phi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{-\sqrt{t}}(x)$ pour tout $x \in M$.

(11) **L'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants d'un groupe de Lie.** Soit G un groupe de Lie réel (respectivement complexe). Un champ de vecteurs X sur G est dit *invariant à gauche* si pour tout g dans G, nous avons

$$(L_g)^*X = X\ ,$$

et *invariant à droite* si pour tout g dans G, nous avons $(R_g)^*X = X$. Notons ${}^G\Gamma(TG)$ l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ (respectivement analytiques complexes) et invariants à gauche sur G, et $\Gamma(TG)^G$ l'ensemble de ceux invariants à droite. Puisque ${}^G\Gamma(TG)$ est l'intersection des noyaux des applications linéaires $(L_g)^* - \mathrm{id}$ pour $g \in G$, et puisque ${}^G\Gamma(TG)$ est stable par crochets de Lie car les $(L_g)^*$ sont des automorphismes d'algèbres de Lie, l'ensemble ${}^G\Gamma(TG)$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\Gamma(TG)$, et $\Gamma(TG)^G$ aussi.

L'exemple suivant d'algèbre de Lie mérite une partie à elle toute seule.

1.2.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Soient G un groupe de Lie et T_eG l'espace tangent à G en son élément neutre e. Notons $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(T_eG)$ l'application

$$g \mapsto \mathrm{Ad}\, g = T_e\, i_g : T_eG \to T_eG$$

qui à $g \in G$ associe l'application tangente en e de la conjugaison $i_g : h \mapsto ghg^{-1}$. C'est une représentation de groupes de Lie, appelé la *représentation adjointe* de G.

Notons

$$\mathrm{ad} = T_e\, \mathrm{Ad} : T_eG \to \mathrm{End}(T_eG)$$

l'application tangente en e de Ad. Pour tous les X et Y dans T_eG, posons

$$[X, Y] = \mathrm{ad}\, X\, (Y)\ . \qquad (\cdot\, 2\, \cdot)$$

Notons que $[\cdot, \cdot] : T_eG \times T_eG \to T_eG$ est bilinéaire, par la linéarité des applications tangentes en un point.

Exemples. (i) Si G est abélien, alors i_g vaut l'identité de G pour tout g dans G, donc $\mathrm{Ad}\, g : T_eG \to T_eG$ vaut l'identité de T_eG pour tout g dans G, et $\mathrm{ad} : T_eG \to \mathrm{End}(T_eG)$ est l'application nulle.

(ii) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; explicitons les applications Ad et ad lorsque $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Comme G est un ouvert de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$, l'espace tangent à G en son élément neutre $e = I_n$ est $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $g \in G$, comme $i_g : G \to G$ est la restriction à l'ouvert G de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de l'application linéaire $X \mapsto gXg^{-1}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même, nous avons, pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{Ad}\, g\,(X) = gXg^{-1}\ .$$

Donc la représentation adjointe Ad de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

L'application Ad est la composée de l'application de G dans $G \times G$ définie par $g \mapsto (g, g^{-1})$, dont l'application tangente en e est $X \mapsto (X, -X)$, et de la restriction à l'ouvert $G \times G$ de l'application bilinéaire $(g, h) \mapsto \{W \mapsto gWh\}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{End}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$, dont l'application tangente en (e, e) est $(Y, Z) \mapsto \{W \mapsto YW + WZ\}$. Donc pour tous les X et Y dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons

$$\mathrm{ad}\, X\,(Y) = ((T_e\,\mathrm{Ad})(X))(Y) = XY - YX\ .$$

Donc $\mathrm{ad}\, X\,(Y)$ est le crochet de Lie $[X, Y]$ des matrices X et Y dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, et les notations sont cohérentes.

Une autre manière de calculer ad est de considérer l'application exponentielle des matrices

$$Y \mapsto e^Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Y^n\ .$$

Soit X un élément dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le chemin $c : t \mapsto e^{tX}$ est un chemin C^1 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, tel que $c(0) = I_n$ et $\dot{c}(0) = X$. Donc, pour tous les X et Y dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{ad}\, X\,(Y) = ((T_e\,\mathrm{Ad})(X))(Y) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(e^{tX} Y e^{-tX}) = XY - YX\ .$$

(iii) De même, si V est un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, et si G est le groupe de Lie $\mathrm{GL}(V)$, dont l'espace tangent en l'élément neutre id est $\mathrm{End}(V)$, alors la représentation adjointe de G est l'action de G par conjugaison sur $\mathrm{End}(V)$: pour tous les g dans $\mathrm{GL}(V)$ et h dans $\mathrm{End}(V)$,

$$\mathrm{Ad}\, g\,(h) = g \circ h \circ g^{-1}\ .$$

De même, l'application ad est le crochet de Lie des applications linéaires dans $\mathfrak{gl}(V)$: pour tous les g et h dans $\mathrm{End}(V)$,

$$\mathrm{ad}\, g\,(h) = [g, h] = g \circ h - h \circ g\ .$$

Le but du résultat suivant est de montrer que l'espace tangent à G en son élément neutre, muni du crochet défini par la formule ($\cdot 2 \cdot$), est une algèbre de Lie, qui s'identifie avec la sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur G (voir l'exemple (11) de la partie 1.2.1).

Proposition 1.6 *(a) L'espace vectoriel T_eG, muni de l'application $(X,Y) \to [X,Y]$, est une algèbre de Lie.*

(b) L'application de T_eG dans $\Gamma(TG)$ définie par

$$X \mapsto \{\overline{X} : x \mapsto \overline{X}(x) = T_eL_x(X)\}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $(T_eG, [\cdot,\cdot])$ sur ${}^G\Gamma(TG)$.

L'algèbre de Lie définie en (a) est appelée l'*algèbre de Lie du groupe de Lie G*, et est notée $\mathfrak{g}$ ou $Lie(G)$. Par la définition de son crochet de Lie, sa représentation adjointe $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est obtenue comme différentielle en e de la représentation adjointe Ad de G. Si G est un groupe de Lie réel (respectivement complexe), alors $\mathfrak{g} = Lie(G)$ est une algèbre de Lie réelle (respectivement complexe). Attention, la démonstration de l'assertion (b) dans le cas réel qui passe par les dérivations de $\mathscr{C}^\infty(G;\mathbb{R})$ ne s'étend pas au cas complexe.

Démonstration. Considérons une carte locale (U,φ) de G en l'élément neutre e, de sorte que $\varphi(e) = 0$. Cette carte fournit aussi une carte locale $(\pi^{-1}(U), T\varphi)$ pour le fibré tangent $\pi : TG \to G$. Notons $\widetilde{x}$ l'image d'un point x de U par φ, ainsi que l'image d'un point x de $\pi^{-1}(U)$ par $T_{\pi(x)}\varphi$.

Puisque $ex = xe = x$ et puisque le produit dans G est C^∞ (respectivement analytique complexe), nous avons, pour tous les x et y dans G proches de e,

$$\widetilde{xy} = \widetilde{x} + \widetilde{y} + B(\widetilde{x},\widetilde{y}) + \epsilon(\widetilde{x},\widetilde{y}) \qquad (\cdot 3 \cdot)$$

où B est une application bilinéaire, et l'application ϵ, ainsi que celles qui suivent, est une application C^∞ (respectivement analytique complexe) de plusieurs variables réelles (respectivement complexes), définie sur un voisinage de 0, dont chaque terme du développement limité en 0 contient une puissance d'ordre au moins 2 dans au moins l'une des variables.

(a) En appliquant la formule $(\cdot 3 \cdot)$ avec $y = x^{-1}$, nous obtenons $0 = \widetilde{x} + \widetilde{x^{-1}} + B(\widetilde{x},\widetilde{x^{-1}}) + \epsilon(\widetilde{x},\widetilde{x^{-1}})$. Donc

$$\widetilde{x^{-1}} = -\widetilde{x} + \epsilon(\widetilde{x}) \ .$$

Donc, pour tous les g, x dans G proches de e,

$$\widetilde{gxg^{-1}} = \widetilde{(gx)g^{-1}} = \widetilde{x} + B(\widetilde{g},\widetilde{x}) - B(\widetilde{x},\widetilde{g}) + \epsilon(\widetilde{x},\widetilde{g}) \ .$$

D'où, en dérivant par rapport à $\widetilde{x}$, pour tout g dans G proche de e et tout X dans T_eG,

$$\widetilde{\mathrm{Ad}\, g\,(X)} = \widetilde{X} + B(\widetilde{g},\widetilde{X}) - B(\widetilde{X},\widetilde{g}) + \epsilon(\widetilde{g}) \ .$$

Par conséquent, en dérivant par rapport à $\widetilde{g}$, pour tous les X et Y dans T_eG, nous avons

$$\widetilde{\mathrm{ad}\, X\,(Y)} = B(\widetilde{X},\widetilde{Y}) - B(\widetilde{Y},\widetilde{X}) \ .$$

L'anticommutativité et l'identité de Jacobi de l'application $(X,Y) \mapsto \mathrm{ad}\, X\,(Y)$ se déduisent alors du cas des algèbres associatives.

(b) L'application $X \mapsto \overline{X}$ est clairement linéaire, injective car $X = \overline{X}(e)$, et surjective car si $\overline{X}$ est invariant à gauche, alors $\overline{X}(x) = T_eL_x\big(\overline{X}(e)\big)$.

Il reste donc à montrer qu'elle préserve les crochets de Lie. Pour x proche de e, puisque $\overline{X}(x) = T_e L_x(X)$ et par la formule ($\cdot 3 \cdot$), nous avons

$$\widetilde{\overline{X}(x)} = \widetilde{X} + B(\widetilde{x}, \widetilde{X}) + \epsilon(\widetilde{x}) \ .$$

et de même $\widetilde{\overline{Y}(x)} = \widetilde{Y} + B(\widetilde{x}, \widetilde{Y}) + \epsilon(\widetilde{x})$. Donc, en dérivant par rapport à $\widetilde{x}$ ces égalités,

$$[\widetilde{\overline{X}, \overline{Y}}](e) = d_0\widetilde{Y}(\widetilde{X}) - d_0\widetilde{X}(\widetilde{Y}) = B(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) - B(\widetilde{Y}, \widetilde{X}) = \widetilde{[X, Y]} \ ,$$

la dernière égalité ayant été montrée en fin de (a). Ceci fournit le résultat cherché. □

Exemples. • Si G est un groupe de Lie abélien, alors son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est commutative.

• D'après ce qui précède, l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, et pour tout espace vectoriel réel ou complexe V de dimension finie, l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}(V)$ est $\mathfrak{gl}(V)$.

• Notons que l'algèbre de Lie d'un produit de groupes de Lie s'identifie avec l'algèbre de Lie produit des algèbres de Lie de ces groupes de Lie.

• L'exercice suivant dit en particulier que l'algèbre de Lie du groupe spécial linéaire est l'algèbre de Lie des matrices de trace nulle, l'algèbre de Lie du groupe spécial orthogonal est l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques, et l'algèbre de Lie du groupe spécial unitaire est l'algèbre de Lie des matrices antihermitiennes de trace nulle.

Exercice E.6 *Montrer que dans le tableau suivant, le terme de droite d'une ligne est l'algèbre de Lie du terme de gauche (voir les exercices E.1 et E.4).*

$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$
$\mathrm{O}(n)$	$\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$
$\mathrm{SO}(n)$	$\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$
$\mathrm{O}(p,q)$	$\mathfrak{o}(p,q) = \mathfrak{so}(p,q)$
$\mathrm{SO}(p,q)$	$\mathfrak{so}(p,q) = \mathfrak{o}(p,q)$
$\mathrm{U}(n)$	$\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{su}(n) \oplus i\mathbb{R}I_n$
$\mathrm{SU}(n)$	$\mathfrak{su}(n)$
$\mathrm{U}(p,q)$	$\mathfrak{u}(p,q)$
$\mathrm{SU}(p,q)$	$\mathfrak{su}(p,q)$
$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R})$
$\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$
$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$
$\mathrm{Sp}(p,q)$	$\mathfrak{sp}(p,q)$
$\mathrm{Sp}_*(n)$	$\mathfrak{sp}_*(n)$
$\mathrm{SU}^*(2n)$	$\mathfrak{su}^*(2n)$
$\mathrm{SO}^*(2n)$	$\mathfrak{so}^*(2n)$

Proposition 1.7 *Si G et G' sont des groupes de Lie, d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$, si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes de Lie, alors $T_e f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un morphisme d'algèbres de Lie.*

En prenant $G = G'$, $g \in G$ et $f = i_g$, il en découle que l'application $\mathrm{Ad}\ g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est un automorphisme d'algèbres de Lie :

$$\forall\, X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \mathrm{Ad}\, g\,([X,Y]) = [\mathrm{Ad}\, g\,(X), \mathrm{Ad}\, g\,(Y)]\ .$$

Puisque la forme de Killing $B = B_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ est invariante par tout automorphisme de $\mathfrak{g}$, et puisque $\mathrm{Ad}\ g$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$ pour tout $g \in G$, nous avons donc, pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$B(\mathrm{Ad}\ g\,(X), \mathrm{Ad}\ g\,(Y)) = B(X,Y)\ .$$

Si $\mathfrak{f} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un morphisme d'algèbres de Lie, nous dirons qu'un morphisme de groupes de Lie $f : G \to G'$ *intègre* $\mathfrak{f}$ si $T_e f = \mathfrak{f}$. Nous donnerons dans la partie 1.4.5 des conditions suffisantes pour l'existence d'un morphisme de groupes de Lie intégrant un morphisme donné entre leurs algèbres de Lie.

Démonstration. Pour tout g dans G, puisque f est un morphisme de groupes, nous avons $f \circ i_g = i_{f(g)} \circ f$. Donc pour tout g dans G et tout X dans $\mathfrak{g}$, en appliquant deux fois le théorème de dérivation des applications composées,

$$T_e f \circ (\mathrm{Ad}\, g) = (\mathrm{Ad}\, f(g)) \circ T_e f\ ,$$

et

$$T_e f \circ (\mathrm{ad}\, X) = (\mathrm{ad}\, T_e f(X)) \circ T_e f\ .$$

D'où, pour tous les X et Y dans $\mathfrak{g}$, nous avons $T_e f([X,Y]) = [T_e f(X), T_e f(Y)]$. □

En particulier, si H est un sous-groupe de Lie immergé de G, alors l'algèbre de Lie de H s'identifie (par l'application tangente en l'élément neutre de l'immersion i de H dans G) à une sous-algèbre de Lie de G.

Il découle aussi de la proposition 1.7 que si $f : G \to G'$ est un isomorphisme de groupes de Lie, alors $T_e f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Exercice E.7 *Soient G un groupe de Lie réel ou complexe et $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de groupes de Lie de G. Pour tout $v \in V$, notons $G_v = \{g \in G\ :\ \rho(g)v = v\}$ le stabilisateur de v dans G.*

(1) Soit $v \in V$. Montrer que l'application de G dans V définie par $g \mapsto \rho(g)v$ est de rang constant. En déduire que G_v est un sous-groupe de Lie plongé de G, et décrire son algèbre de Lie.

(2) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et pour tous les $k, n \in \mathbb{N}$, notons $\Lambda^k(\mathbb{K}^n)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des formes k-linéaires alternées sur $\mathbb{K}^n$, $\mathrm{Sym}(\mathbb{K}^n)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{Herm}(\mathbb{C}^n)$ l'espace vectoriel complexe des formes sesquilinéaires hermitiennes sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que les applications suivantes sont des représentations de groupes de Lie sur $\mathbb{K}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\Lambda^k(\mathbb{K}^n)) \\ g & \mapsto & \big\{\omega \mapsto \{(x_1,\dots,x_k) \mapsto \omega(g^{-1}x_1,\dots,g^{-1}x_k)\}\big\}\ , \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathrm{Sym}(\mathbb{K}^n)) \\ g & \mapsto & \big\{\omega \mapsto \{(x,y) \mapsto \omega(g^{-1}x, g^{-1}y)\}\big\}\ . \end{array}$$

En considérant le groupe de Lie réel sous-jacent à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *et les espaces vectoriels réels sous-jacents à* $\mathrm{Herm}(\mathbb{C}^n)$ *et* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$*, montrer que les applications suivantes sont des représentations de groupes de Lie réels*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathrm{Herm}(\mathbb{C}^n)) \\ g & \mapsto & \left\{\omega \mapsto \{(x,y) \mapsto \omega(g^{-1}x, g^{-1}y)\}\right\} , \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) \\ g & \mapsto & \{X \mapsto \overline{g}\, X g^{-1}\} . \end{array}$$

(3) En déduire que tous les groupes classiques définis dans l'exercice E.1 sont des groupes de Lie, et montrer que leurs algèbres de Lie sont données par l'exercice E.6. En déduire que les espaces vectoriels donnés dans l'exercice E.4, munis du crochet de Lie des matrices, sont bien des algèbres de Lie.

(4) Soit $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie réelle (respectivement complexe) de dimension finie.*

a) Montrer que son groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *est un sous-groupe de Lie plongé réel (respectivement complexe) de* $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$*.*

b) Montrer que si $\delta \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *est une dérivation, alors l'exponentielle* e^{δ} *de l'endomorphisme* δ *de* $\mathfrak{g}$ *est un automorphisme d'algèbres de Lie de* $\mathfrak{g}$*. Montrer que l'algèbre de Lie du groupe de Lie* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *est* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$*.*

1.2.3 Représentations de $\mathfrak{sl}_2$

Soient K un corps commutatif de caractéristique nulle et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur K.

Un $\mathfrak{g}$-*module* est un espace vectoriel V sur K muni d'une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans V, c'est-à-dire d'un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(V)$. Un *sous-module* d'un $\mathfrak{g}$-module V est un sous-espace vectoriel W de V qui est invariant (par l'image de la représentation de $\mathfrak{g}$). Muni de la restriction de la représentation, c'est aussi un $\mathfrak{g}$-module. Un $\mathfrak{g}$-module est dit *simple* ou *irréductible* si ses seuls sous-modules sont $\{0\}$ et V.

Par exemple, muni de la représentation adjointe ad, l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{g}$-module.

Un *morphisme de* $\mathfrak{g}$-*modules* d'un $\mathfrak{g}$-module V dans un $\mathfrak{g}$-module V' est une application linéaire $\phi : V \to V'$ telle que, si $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ est la représentation de $\mathfrak{g}$ dans V et $\alpha' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V')$ celle de $\mathfrak{g}$ dans V', alors, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha(X)} & V \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ V' & \xrightarrow{\alpha'(X)} & V' \end{array}$$

(c'est-à-dire $\phi \circ (\alpha(X)) = (\alpha'(X)) \circ \phi$). Nous noterons $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V')$ l'espace vectoriel sur K des morphismes de $\mathfrak{g}$-modules de V dans V'. Un *isomorphisme de* $\mathfrak{g}$-*modules* est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules bijectif. Son inverse est alors aussi un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules. La collection des $\mathfrak{g}$-modules et des ensembles de morphismes entre deux $\mathfrak{g}$-modules, munie de la composition des applications et des applications identités, est une catégorie.

Trouver, lorsqu'elle existe, une décomposition en sous-espaces invariants irréductibles d'un $\mathfrak{g}$-module donné est l'un des buts principaux de la théorie des représentations des algèbres de Lie.

Nous allons maintenant décrire dans cette partie 1.2.3 toutes les représentations en dimension finie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(K)$. Considérons les éléments suivants de $\mathfrak{sl}_2(K)$:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Ils forment une base vectorielle de $\mathfrak{sl}_2(K)$ et vérifient les relations de crochet

$$[E, F] = H, \ \ [H, E] = 2E, \ \ [H, F] = -2F \ .$$

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur K, nous appellerons $\mathfrak{sl}_2$-*triplet* de $\mathfrak{g}$ un triplet (e, f, h) d'éléments de $\mathfrak{g}$ vérifiant les mêmes relations de crochet $[e, f] = h, \ \ [h, e] = 2e, \ \ [h, f] = -2f$ que ci-dessus.

L'image du triplet (E, F, H) par un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{sl}_2(K)$ dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet. La réciproque est vraie : par l'exercice E.9 ultérieur, pour construire un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{sl}_2(K)$ dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il suffit de se donner un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (e, f, h) de $\mathfrak{g}$, car alors l'unique application linéaire de $\mathfrak{sl}_2(K)$ dans $\mathfrak{g}$ envoyant E sur e, F sur f et H sur h est un morphisme d'algèbres de Lie.

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, notons $K_d[x, y]$ l'espace vectoriel sur K des polynômes homogènes de degré d en deux variables x et y. Rappelons que les dérivations $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ sont des opérateurs linéaires de $K_d[x, y]$ dans $K_{d-1}[x, y]$ (avec $K_{-1}[x, y] = \{0\}$ par convention). Il est facile (même sans utiliser l'exercice E.9 comme mentionné ci-dessus) de vérifier qu'il existe un et un seul morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{sl}_2(K)$ dans $\mathfrak{gl}(K_d[x, y])$ tel que

$$E \mapsto x\frac{\partial}{\partial y}, \ \ F \mapsto y\frac{\partial}{\partial x}, \ \ H \mapsto x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} \ .$$

Muni de cette représentation, l'espace vectoriel $K_d[x, y]$ est un $\mathfrak{sl}_2(K)$-module, que nous notons $\mathbb{V}_d$. Remarquons que les valeurs propres de $x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ sont

$$-d, \ -d+2, \ -d+4, \ \ldots, \ d-2, \ d \ ,$$

de vecteurs propres (non nuls) associés $y^d, xy^{d-1}, x^2y^{d-2}, \ldots, x^{d-1}y, x^d$.

Théorème 1.8 *(1) Les $\mathfrak{sl}_2(K)$-modules simples de dimension finie sont, à isomorphisme près, les $\mathbb{V}_d$ pour $d \in \mathbb{N}$.*

(2) Tout $\mathfrak{sl}_2(K)$-module de dimension finie est somme directe de sous-modules simples.

Démonstration. Nous ne ferons la démonstration que lorsque $K = \mathbb{C}$, qui est le seul dont nous nous servirons. Notons $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

(1) Soit V un $\mathfrak{s}$-module simple de dimension finie. Notons $\overline{E}, \overline{F}, \overline{H}$ les endomorphismes linéaires de V définis par E, F, H respectivement, qui vérifient les relations de crochet

$$\overline{E}\,\overline{F} - \overline{F}\,\overline{E} = \overline{H}, \ \ \overline{H}\,\overline{E} - \overline{E}\,\overline{H} = 2\overline{E}, \ \ \overline{H}\,\overline{F} - \overline{F}\,\overline{H} = -2\overline{F} \ .$$

Notons $V = \oplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda$ la décomposition en somme directe de V par les espaces caractéristiques V_λ de l'endomorphisme $\overline{H}$ (où $V_\lambda = \ker(\overline{H} - \lambda\,\mathrm{id})^{m_\lambda}$ si λ est une valeur propre complexe de multiplicité m_λ de $\overline{H}$, avec la convention que $V_\lambda = \{0\}$ si λ n'est pas une

valeur propre de $\overline{H}$). Pour tous les $\lambda \in \mathbb{C}$ et $j \in \mathbb{N} - \{0\}$, par les relations de crochet précédentes, nous avons

$$\overline{E}(\overline{H} - \lambda\,\mathrm{id})^j = (\overline{H} - (\lambda+2)\,\mathrm{id})^j\,\overline{E} \quad \text{et} \quad \overline{F}(\overline{H} - \lambda\,\mathrm{id})^j = (\overline{H} - (\lambda-2)\,\mathrm{id})^j\,\overline{F}\ .$$

Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\overline{E}(V_\lambda) \subset V_{\lambda+2} \quad \text{et} \quad \overline{F}(V_\lambda) \subset V_{\lambda-2}\ .$$

Soit v_0 un vecteur propre (non nul) de $\overline{H}$ pour une valeur propre λ_0 de partie réelle maximale. Alors $\overline{H}(v_0) = \lambda_0 v_0$ et $\overline{E}(v_0) = 0$ car $V_{\lambda_0+2} = \{0\}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ le plus grand entier tel que $\overline{F}^{\,n_0}(v_0) \neq 0$ (qui existe car $V_{\lambda_0-2N} = \{0\}$ si N est assez grand). Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, notons $v_i = \overline{F}^{\,i}(v_0)$ si $0 \leq i \leq n_0$ et $v_i = 0$ sinon.

Par récurrence, nous avons, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$[\,\overline{E}, \overline{F}^{\,j+1}] = (j+1)\overline{F}^{\,j}(\overline{H} - j\,\mathrm{id})\ . \tag{$\cdot\,4\,\cdot$}$$

Donc

$$0 = \overline{E}\,\overline{F}^{\,n_0+1}(v_0) - \overline{F}^{\,n_0+1}\,\overline{E}(v_0) = (n_0+1)(\lambda_0 - n_0)v_{n_0}\ .$$

D'où $\lambda_0 = n_0$. Respectivement par la définition de v_i, puisque $v_i \in V_{\lambda_0-2i}$ et de nouveau par la formule ($\cdot\,4\,\cdot$), nous avons, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\overline{F}(v_i) = v_{i+1}, \quad \overline{H}(v_i) = (n_0 - 2i)v_i, \quad \overline{E}(v_i) = i(n_0 - i + 1)v_{i-1}\ .$$

Comme le $\mathfrak{s}$-module V est simple, le sous-espace vectoriel engendré par $v_0, \ldots, v_{n_0}$, qui est invariant par $\mathfrak{s}$, est égal à V. Comme $v_i \in V_{n_0-2i}$, les vecteurs $v_0, \ldots, v_{n_0}$ sont linéairement indépendants. Donc $(v_0, \ldots, v_{n_0})$ est une base de V.

Il est alors facile de vérifier que l'unique application linéaire de V dans $\mathbb{C}_{n_0}[x,y]$ telle que $v_i \mapsto n_0(n_0-1)\ldots(n_0-i+1)x^{n_0-i}y^i$ pour $0 \leq i \leq n_0$ est un isomorphisme de $\mathfrak{s}$-modules entre V et $\mathbb{V}_{n_0}$.

(2) Soit V un $\mathfrak{s}$-module de dimension finie. Soit V' un sous-module de V. Montrons que V' admet un sous-espace vectoriel V'' supplémentaire invariant par (l'image de la représentation dans V de) $\mathfrak{s}$. Nous utilisons la méthode de *l'astuce unitaire de Weyl*, en renvoyant par exemple à [Kna, Chap. I, §9] pour une preuve plus directe mais plus longue.

Rappelons que l'algèbre de Lie du groupe de Lie réel

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \ :\ a, b \in \mathbb{C} \ \text{ et } \ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

est la sous-algèbre de Lie réelle $\mathfrak{su}(2)$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ des matrices anti-hermitiennes de trace nulle.

Notons $\mathfrak{f} : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{gl}(V)^{\mathbb{R}}$ le morphisme d'algèbres de Lie réelles restriction à $\mathfrak{su}(2)$ de la représentation de $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans V. Par le théorème 1.51 ultérieur, comme $\mathrm{SU}(2)$ est homéomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}_3$ de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, donc est simplement connexe, il existe un unique morphisme de groupes de Lie réels $f : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(V)^{\mathbb{R}}$ d'application tangente $\mathfrak{f}$ en l'identité. Le sous-module V' est invariant par $f(\mathrm{SU}(2))$. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire hermitien sur V invariant par $f(\mathrm{SU}(2))$. (Si μ est une mesure de Haar de $\mathrm{SU}(2)$ (invariante

à droite, finie, voir la partie 3 pour une construction), et si $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ est un produit scalaire hermitien sur V, alors

$$\langle u, v \rangle = \int_{g \in \mathrm{SU}(2)} \langle f(g)u, f(g)v \rangle_0 \, d\mu(g)$$

convient.) Alors l'orthogonal V'' de V' pour ce produit scalaire est aussi invariant par $f(\mathrm{SU}(2))$. Donc en dérivant, il est invariant par la représentation de $\mathfrak{su}(2)$. Mais comme la représentation de $\mathfrak{s}$ dans V est linéaire sur $\mathbb{C}$ et puisque le sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ engendré par $\mathfrak{su}(2)$ est égal à tout $\mathfrak{s}$ (voir l'exercice E.3), le sous-espace vectoriel complexe V'' est invariant par $\mathfrak{s}$. □

Corollaire 1.9 *Pour toute représentation d'algèbres de Lie α d'une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel complexe V, si (e, f, h) est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet de $\mathfrak{g}$, alors les valeurs propres de l'endomorphisme $\alpha(h)$ de V sont entières et symétriques par rapport à l'origine.*

Démonstration. Notons $\alpha' : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ la précomposition de α par l'unique morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{g}$ envoyant (E, F, H) sur (e, f, h). Alors V muni de la représentation α' est un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-module. En le décomposant en sous-espaces vectoriels irréductibles, et par isomorphisme de chacun de ces sous-espaces avec un $\mathbb{V}_d$ pour un $d \in \mathbb{N}$, les valeurs propres de l'endomorphisme $\alpha'(H)$ de V sont entières et symétriques par rapport à l'origine. Comme $\alpha'(H) = \alpha(h)$, le résultat en découle. □

1.3 Classification des algèbres de Lie complexes semi-simples

Le but de ce chapitre est d'énoncer un théorème de classification d'une classe d'algèbres de Lie importante, qui interviendra dans le chapitre 4. Nous renvoyons à [Bou3] pour les parties 1.3.1 à 1.3.3 et à [Bou2] en ce qui concerne les parties suivantes, pour une excellente exposition et des détails et compléments.

1.3.1 Systèmes de racines

Soit V un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie ; notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire. Pour tout $x \in V$ non nul, notons

$$x^\vee = \frac{2x}{\langle x, x \rangle}$$

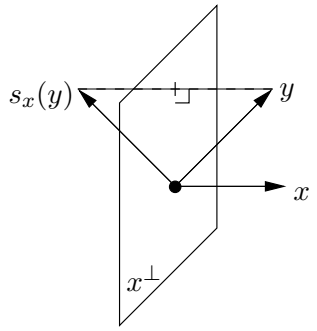
et

$$s_x : y \mapsto y - \langle y, x^\vee \rangle \, x$$

la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à x. Elle appartient au groupe orthogonal de V, et vérifie

$$f \circ s_x \circ f^{-1} = s_{f(x)}$$

pour tout $x \in V$ et toute isométrie $f : V \to V'$ de V sur un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie V'.



Remarquons que, pour tous les $x, y \in V$ non nuls,

$$(x^\vee)^\vee = x, \quad s_{x^\vee} = s_x \quad \text{et} \quad s_x(y^\vee) = \big(s_x(y)\big)^\vee . \tag{$\cdot 5 \cdot$}$$

Un *système de racines* de V est une partie Φ de V telle que

(R1) Φ est finie, ne contient pas 0 et engendre l'espace vectoriel V ;

(R2) Φ est invariant par s_α pour tout $\alpha \in \Phi$;

(R3) $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tous les α, β dans Φ.

Un système de racines est dit *réduit* s'il vérifie de plus

(R4) pour tous les $\alpha \in \Phi$ et $t \in \mathbb{R}$, si $t\alpha \in \Phi$, alors $t = \pm 1$.

Un système de racines est dit *réductible* s'il existe deux parties non vides Φ_1, Φ_2 de réunion Φ telles que tout élément de Φ_1 soit orthogonal à tout élément de Φ_2. Dans ce cas, Φ_1 et Φ_2 sont disjointes, et Φ_i est un système de racines de l'espace vectoriel euclidien qu'il engendre, pour $i = 1, 2$. Un système de racines est dit *irréductible* s'il n'est pas réductible.

La définition d'un système de racines admets quelques variantes, voir par exemple [Ser1, p. V-3] ou [Bou3, p. 143]. Notre but étant de considérer les groupes de Lie réels, la définition ci-dessus est suffisante.

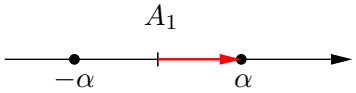
Nous appellerons *rang* de Φ la dimension de V, et *groupe de Weyl* de Φ le sous-groupe, noté $W = W_\Phi$, du groupe orthogonal de V engendré par les s_α pour $\alpha \in \Phi$. Nous dirons que $\alpha^\vee$ est la *coracine* de $\alpha \in \Phi$. Si Φ' est un système de racines d'un espace euclidien de dimension finie V', alors un *isomorphisme* de Φ dans Φ' est un isomorphisme linéaire de V dans V' envoyant Φ sur Φ'. Un *automorphisme* de Φ est un isomorphisme de Φ dans Φ. Notons $\mathrm{Aut}(\Phi)$ le groupe des automorphismes de Φ. Deux systèmes de racines sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.

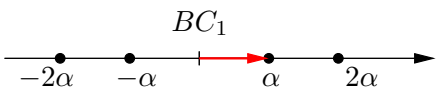
Remarquons que W est fini, car par (R1) et (R2), il s'injecte dans le groupe (fini) des permutations de Φ.

Par les formules ($\cdot 5 \cdot$), l'ensemble des coracines de Φ est un système de racines $\Phi^\vee$, dit *opposé* à Φ. Il vérifie $(\Phi^\vee)^\vee = \Phi$ et a le même groupe de Weyl que Φ :

$$W_{\Phi^\vee} = W_\Phi .$$

Puisque $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, un système de racines est stable par l'antipodie $x \mapsto -x$, d'après la condition (R2). Si $\alpha \in \Phi$, $t \in \mathbb{R}$ et $t\alpha \in \Phi$, alors $2t$ et $2/t \in \mathbb{Z}$ par (R3), donc $t \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2\}$, et au plus quatres racines sont proportionnelles à une racine donnée. Une racine est dite *indivisible* si elle n'est pas le double d'une racine. Un système de racines est donc réduit si et seulement si toutes ses racines sont indivisibles. Il existe, à isomorphisme près, un unique système de racines réduit de rang 1, par exemple $\{\pm 1\}$ dans $\mathbb{R}$, dit de type A_1, et un unique système de racines non réduit de rang 1, par exemple $\{\pm 1, \pm 2\}$ dans $\mathbb{R}$, dit de type BC_1.





Soient α et β deux racines non proportionnelles et ϕ l'angle non orienté entre α et β. Étudions les valeurs possibles du nombre

$$n(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 2\,\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\cos\phi , \tag{$\cdot 6 \cdot$}$$

qui est entier par (R3). Le produit de deux entiers $n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha) = 4\cos^2\phi$ ne peut prendre que les valeurs $0, 1, 2, 3, 4$, ce dernier cas étant exclu car α et β ne sont pas proportionnelles. En particulier, $n(\alpha,\beta)$ ne peut prendre que les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Quitte à échanger α et $-\alpha$, nous pouvons supposer que $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ (ou de manière équivalente que $n(\alpha,\beta) \leq 0$), c'est-à-dire que l'angle entre α et β est droit ou (strictement) obtus. Quitte à échanger α et β, nous pouvons supposer que $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$: nous dirons que la racine α est *plus courte* que la racine β. Alors $n(\alpha,\beta)$ vaut 0 ou -1 par la formule ($\cdot 6 \cdot$), et au plus quatre cas sont possibles :

$$\begin{array}{lll} n(\alpha,\beta) = 0, & n(\beta,\alpha) = 0, & \phi = \frac{\pi}{2} \\ n(\alpha,\beta) = -1, & n(\beta,\alpha) = -1, & \phi = \frac{2\pi}{3}, \quad \|\beta\| = \|\alpha\| \\ n(\alpha,\beta) = -1, & n(\beta,\alpha) = -2, & \phi = \frac{3\pi}{4}, \quad \|\beta\| = \sqrt{2}\,\|\alpha\| \\ n(\alpha,\beta) = -1, & n(\beta,\alpha) = -3, & \phi = \frac{5\pi}{6}, \quad \|\beta\| = \sqrt{3}\,\|\alpha\| \,. \end{array} \tag{$\cdot 7 \cdot$}$$

L'exercice suivant montre que ces quatre cas sont effectivement réalisés.

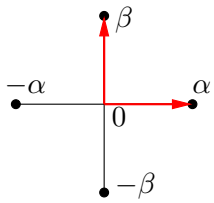
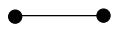
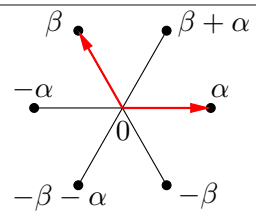
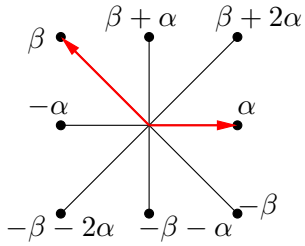
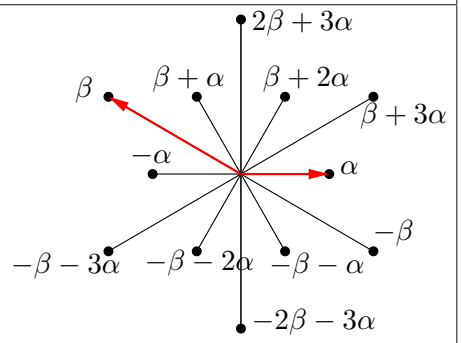
Corollaire 1.10 *Soient α et β deux racines non proportionnelles formant un angle obtus. Alors $\alpha + \beta$ est une racine.*

Puisque $-\beta$ est une racine, nous en déduisons que si l'angle entre α et β est aigu, alors $\alpha - \beta$ est une racine.

Démonstration. Quitte à permuter α et β, nous pouvons supposer que α est plus courte que β. Le tableau des possibilités ci-dessus montre que $n(\alpha,\beta) = -1$, donc que $\beta + \alpha = \beta - n(\alpha,\beta)\alpha = s_\alpha(\beta)$, qui appartient à Φ. □

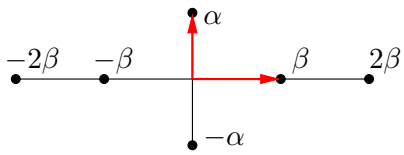
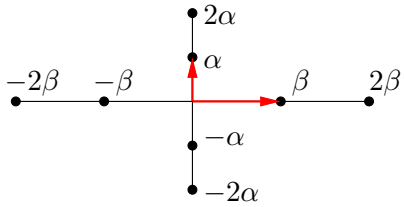
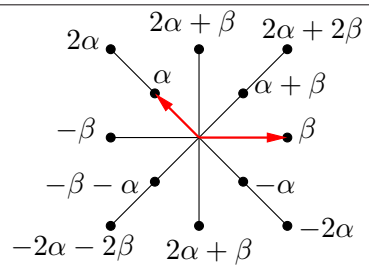
Exercice E.8 *Montrer que les systèmes de racines réduits de rang 2 sont, à isomorphisme*

près, les suivants :

type	diagramme de Dynkin	matrice de Cartan	système de racines
$A_1 \times A_1$		$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	
A_2		$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	
B_2		$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	
G_2		$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	

Montrer que les systèmes de racines non réduits de rang 2 sont, à isomorphisme près,

les suivants :

$A_1 \times BC_1$	
$BC_1 \times BC_1$	
BC_2	

1.3.2 Base d'un système de racines

Soient Φ un système de racines dans un espace euclidien de dimension finie V et $W = W_\Phi$ son groupe de Weyl.

Une partie Π de Φ est une *base* de Φ si Π est une base vectorielle de V et si tout élément de Φ s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients entiers de même signe des éléments de Π. Les éléments de Π sont appelées les *racines simples* de Φ (relativement à la base Π).

Par exemple, dans les figures de l'exercice E.8, la paire $\{\alpha, \beta\}$ est une base du système de racines de rang deux considéré. Si Π est une base de Φ, alors $\Pi^\vee = \{\alpha^\vee \ : \ \alpha \in \Pi\}$ est une base du système de racines $\Phi^\vee$ opposé à Φ.

Ainsi, pour tout $\beta \in \Phi$, il existe une suite $(m_\alpha)_{\alpha\in\Pi} \in \mathbb{Z}^\Pi$ d'entiers tous positifs ou nuls, ou tous négatifs ou nuls tels que

$$\beta = \sum_{\alpha\in\Pi} m_\alpha \alpha \ .$$

Une racine est dite *positive (relativement à la base* Π*)* si ses coordonnées dans la base Π sont positives ou nulles, *négative* sinon. En notant Φ^+ (respectivement Φ^-) l'ensemble des racines positives (respectivement négatives), nous avons donc $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$, où l'union est disjointe.

L'existence d'une base découle du résultat suivant (voir par exemple [Ser1, Bou3]), qui décrit aussi les propriétés du groupe de Weyl de Φ. Une *chambre de Weyl* C de Φ est une composante connexe de V privé des hyperplans fixes des réflexions s_α pour $\alpha \in \Phi$. Une racine α est dite *positive (relativement à la chambre* C*)* si pour tout (ou, de manière équivalente, pour au moins un) élément v de C, nous avons $\langle \alpha, v\rangle > 0$. Une racine positive (relativement à la chambre C) est dite *indécomposable* si elle n'est pas somme de deux racines positives (relativement à la chambre C).

Proposition 1.11 *(i) Le groupe de Weyl W agit simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl de Φ. L'adhérence de toute chambre de Weyl est un domaine fondamental*[8] *(strict) de W.*

(ii) L'ensemble Π_C des racines positives indécomposables relativement à une chambre de Weyl C de Φ est une base de Φ ; une racine dans Φ est positive relativement à la chambre C si et seulement si elle est positive relativement à la base Π_C ; pour toute base Π de Φ, il existe une et une seule chambre de Weyl C de Φ telle que $\Pi = \Pi_C$.

(iii) Toute racine indivisible est image d'une racine simple par un élément du groupe de Weyl. En particulier, si Φ est réduit de base Π, alors $\Phi = W\Pi$.

(iv) Si Π est une base de Φ, alors le groupe de Weyl W est engendré par $S = S_\Phi = \{s_\alpha \ : \ \alpha \in \Pi\}$. Le couple (W, S) est un système de Coxeter*, c'est-à-dire que le morphisme canonique du groupe libre sur S à valeurs dans W est normalement engendré par les $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\,\beta)}$ pour $\alpha, \beta \in \Pi$, où*

$$m(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 2 & \text{si } n(\alpha,\beta) = 0 \\ 3,4,6 & \text{si } n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha) = 1,2,3 \text{ respectivement .} \end{cases} \quad \square$$

En particulier, le groupe de Weyl W agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases de Φ. Donc si Π est une base de Φ, si $A(\Pi)$ est le sous-groupe du groupe $\mathrm{Aut}(\Phi)$ des automorphismes de Φ préservant Π, alors $\mathrm{Aut}(\Phi)$ est le produit semi-direct de $A(\Pi)$ et de W.

La *matrice de Cartan* d'un système de racines Φ (relativement à une base Π) est la matrice $\big(n(\alpha,\beta)\big)_{\alpha,\beta\in\Pi}$. Puisque W agit transitivement sur l'ensemble des bases de Φ, cette matrice de Cartan ne dépend pas (modulo permutation des coordonnées) du choix d'une base : pour tout $w \in W$, nous avons $n(w\alpha, w\beta) = n(\alpha,\beta)$ par les formules $(\cdot\,5\,\cdot)$, puisque W est engendré par les s_α pour $\alpha \in \Phi$.

Remarquons que les termes diagonaux de la matrice de Cartan de Φ valent 2, et que les termes non diagonaux sont négatifs ou nuls (car si α et β sont des racines non proportionnelles formant un angle aigu, alors $\beta - \alpha$ est une racine par le corollaire 1.10, que l'on peut supposer positive quitte à échanger α et β, et $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$, donc β est une racine positive non indécomposable, donc non simple). Par l'étude des valeurs de $n(\alpha,\beta)$, les coefficients non diagonaux de la matrice de Cartan de Φ appartiennent donc à $\{0, -1, -2, -3\}$. Le système de racines Φ est irréductible si et seulement si sa matrice de Cartan n'est pas, à permutation des coordonnées près, diagonale par blocs avec au moins deux blocs diagonaux non triviaux. Voir l'exercice E.8 pour le calcul des matrices de Cartan des systèmes de racines de rang 2.

Le résultat suivant dit qu'un système de racines réduit est déterminé à isomorphisme près par sa matrice de Cartan.

Proposition 1.12 *Soit Φ' un système de racines dans un espace euclidien V' de dimension finie, Π' une base de Φ', $f : \Pi \to \Pi'$ une bijection telle que $n(f(\alpha), f(\beta)) = n(\alpha,\beta)$ pour tous les α, β dans Π. Si Φ et Φ' sont réduits, alors il existe un unique isomorphisme de Φ dans Φ' prolongeant f.*

8. Un *domaine fondamental (strict)* pour l'action d'un groupe G sur un ensemble E est une partie P de E telle que $E = \bigcup_{g\in G} gP$ et $P \cap gP = \emptyset$ pour tout $g \in G - \{e\}$.

Démonstration. Nous pouvons supposer que Φ et Φ' sont irréductibles. Les formules ($\cdot 7 \cdot$) montrent que les longueurs des racines simples de Φ sont alors déterminées à homothétie près de V par la matrice de Cartan. Nous pouvons donc supposer que $\|f(\alpha)\| = \|\alpha\|$ pour toute racine simple α de Φ. Pour toutes les racines simples α, β de Φ, l'égalité $n(f(\alpha), f(\beta)) = n(\alpha, \beta)$ implique alors que $\langle f(\alpha), f(\beta)\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle$. Donc l'unique application linéaire, encore notée f, de V dans V' envoyant α sur $f(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Pi$ est une isométrie euclidienne de V dans V'. Puisque $f \circ s_\alpha \circ f^{-1} = s_{f(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \Pi$, puisque W_Φ est engendré par les s_α pour $\alpha \in \Pi$ (par l'assertion (iv) de la proposition1.11), puisque $\Phi = W_\Phi \Pi$ et $\Phi' = W_{\Phi'}\Pi'$ (par l'assertion (iii) de la proposition 1.11), le résultat en découle. $\square$

Remarque. Cette démonstration montre aussi que si Φ est un système de racines réduit irréductible dans un espace vectoriel V euclidien de dimension finie et si Π est une base de Φ, alors le produit scalaire de V est uniquement déterminé, à homothétie près, par la matrice de Cartan de Φ relativement à Π.

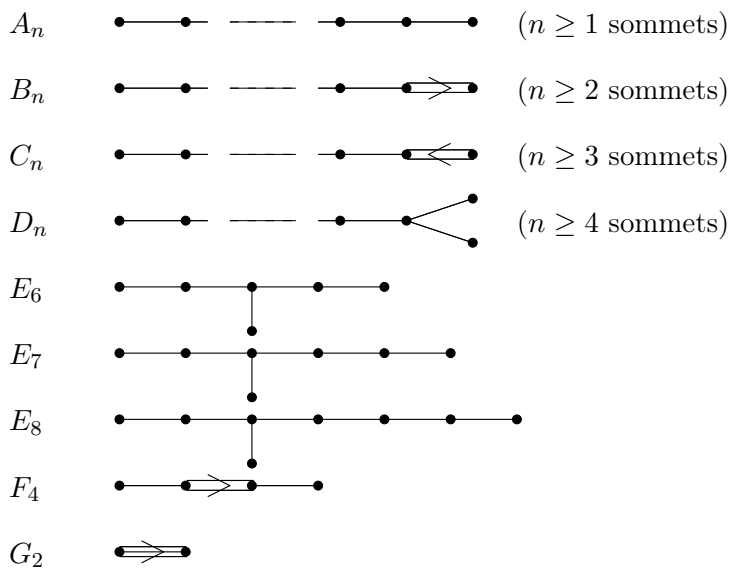
1.3.3 Classification des systèmes de racines

Soient Φ un système de racines dans un espace euclidien de dimension finie V, et $(n(\alpha, \beta))_{\alpha,\beta\in\Pi}$ sa matrice de Cartan (relativement à une base Π).

Le *diagramme de Dynkin* de Φ (relativement à Π) est le graphe d'ensemble de sommets Π, deux sommets s et t étant reliés par une arête si $n(s,t) = n(t,s) = -1$, par une arête double si $n(s,t) = -1$ et $n(t,s) = -2$, une arête triple si $n(s,t) = -1$ et $n(t,s) = -3$, ces arêtes étant orientées de s vers t si la racine s est strictement plus longue que la racine t (c'est-à-dire si $|n(s,t)| > |n(t,s)|$). Il est immédiat de voir que Φ est irréductible si et seulement si son diagramme de Dynkin est connexe, et que le diagramme de Dynkin de Φ détermine de manière unique la matrice de Cartan de Φ, donc le système de racines Φ à isomorphisme près lorsque celui-ci est réduit, par la proposition 1.12. Le diagramme de Dynkin du système de racines $\Phi^\vee$ opposé à Φ (relativement à la base $\Pi^\vee$) est obtenu à partir de celui de Φ en changeant le sens des flèches.

Pour une démonstration du résultat suivant, nous renvoyons par exemple à [Bou3].

Théorème 1.13 *Tout diagramme de Dynkin connexe non vide est isomorphe à un et à un seul des diagrammes suivants.*



De plus, il existe un (et un seul à isomorphisme près) système de racines réduit irréductible dont le diagramme de Dynkin est un tel diagramme.

Pour tout $n \geq 1$, il existe un et un seul système de racines irréductible non réduit de rang n, noté BC_n. □

Remarques. (1) Une *matrice de Cartan (abstraite)* est une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ telle que

- $a_{i,i} = 2$ pour tout $1 \leq i \leq N$,
- $a_{i,j} \leq 0$ pour tout $1 \leq i \leq N$,
- pour tout $1 \leq i \leq N$, nous avons $a_{i,j} = 0$ si et seulement si $a_{j,i} = 0$,
- il existe une matrice diagonale $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ à coefficients diagonaux strictement positifs telle que DAD^{-1} soit symétrique définie positive.

Si Π est une base d'un système de racines Φ et $A = \left(\langle \alpha, \frac{2\beta}{\langle \beta, \beta \rangle} \rangle\right)_{\alpha, \beta \in \Pi}$ est la matrice de Cartan de Φ relativement à une base Π de Φ, en prenant pour D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\frac{1}{\|\alpha\|}$ pour tout $\alpha \in \Pi$, nous avons

$$DAD^{-1} = \left(2\langle \frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \frac{\beta}{\|\beta\|} \rangle\right)_{\alpha, \beta \in \Pi} .$$

Cette matrice est définie positive, car si X est une matrice colonne $(x_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$, alors

$${}^tXDAD^{-1}X = \left\| \sum_{\alpha \in \Pi} x_\alpha \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \right\|^2 .$$

Donc la matrice de Cartan de Φ est une matrice de Cartan.

Il est facile de vérifier que si $d_{ii} \leq d_{jj}$, alors $a_{i,j}$ et $a_{j,i}$ vérifie l'une des possibilités $(\cdot 7 \cdot)$, et donc que l'on peut associer un *diagramme de Dynkin (abstrait)* à une matrice de Cartan, de la même manière.

Il est facile de vérifier qu'en enlevant la i-ème colonne et la i-ème ligne à une matrice de Cartan, on obtient encore une matrice de Cartan, et que l'opération correspondante sur les diagrammes de Dynkin est d'enlever le sommet i et les arêtes adjacentes.

Les étapes de la démonstration que tout diagramme de Dynkin (et donc tout diagramme de Dynkin de système de racines) est l'un des diagrammes de la liste donnée dans le théorème 1.13 (voir aussi [Kna, Chap. 2, §7]) sont alors les suivantes.

- En écrasant en un sommet une arête simple d'un diagramme de Dynkin, on obtient encore un diagramme de Dynkin.
- Un diagramme de Dynkin contient au plus N paires de sommets $\{i, j\}$ avec $i \neq j$ joints par au moins une arête.
- Un diagramme de Dynkin ne contient pas de cycle.
- De chaque sommet d'un diagramme de Dynkin partent au plus trois arêtes.

(2) Voici une construction des systèmes de racines de type A_n, B_n, C_n, D_n, BC_n. Soit $n \geq 2$, notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel euclidien standard $V = \mathbb{R}^n$.

- Un système de racines de type A_{n-1} dans l'espace vectoriel euclidien $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$ est l'ensemble des vecteurs $e_i - e_j$ où $1 \leq i \neq j \leq n$. Il est isomorphe à son système de coracines. Une base de ce système de racines est $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$. Son groupe de Weyl est le groupe linéaire des permutations de $e_1, \ldots, e_n$, isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, d'ordre $n!$:

$$W_{A_{n-1}} \simeq \mathfrak{S}_n \ .$$

- Un système de racines de type B_n dans V est l'ensemble des vecteurs $\pm e_i$ et $\pm e_i \pm e_j$ où $1 \leq i \neq j \leq n$. Une base de ce système de racines est $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n, e_n\}$. Son groupe de Weyl est le groupe linéaire des permutations avec changement de signe de $e_1, \ldots, e_n$, isomorphe au produit semi-direct $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ où $\mathfrak{S}_n$ agit sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ par permutation des coordonnées, d'ordre $2^n n!$.
- Un système de racines de type C_n dans V est l'ensemble des vecteurs $\pm 2e_i$ et $\pm e_i \pm e_j$ où $1 \leq i \neq j \leq n$ (c'est le système de coracines du système de racines précédent). Son groupe de Weyl est le même que le précédent.
- Un système de racines de type BC_n dans V est alors obtenu en prenant la réunion des systèmes de racines de type B_n et C_n ci-dessus : il est formé des éléments $\pm e_i$, $\pm 2e_i$ et $\pm e_i \pm e_j$ où $1 \leq i \neq j \leq n$. Son groupe de Weyl est le même que le précédent :

$$W_{B_n} = W_{C_n} = W_{BC_n} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n \ .$$

- Un système de racines de type D_n dans V est l'ensemble des vecteurs $\pm e_i \pm e_j$ où $1 \leq i \neq j \leq n$. Il est isomorphe à son système de coracines. Une base de ce système de racines est $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n\}$. Son groupe de Weyl est le groupe linéaire des permutations avec un nombre pair de changements de signes de $e_1, \ldots, e_n$, isomorphe au produit semi-direct du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agissant par permutation des coordonnées sur le sous-groupe des éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ de somme des coordonnées nulle modulo 2, d'ordre $2^{n-1} n!$:

$$W_{D_n} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1} \rtimes \mathfrak{S}_n \ .$$

Remarque. Soient Φ un système de racines irréductible réduit et Π une base de Φ. Par inspection de la liste ci-dessus, le groupe $A(\Pi)$ des automorphismes de Φ préservant Π est donc trivial, sauf si

- Φ est de type A_n $(n \geq 2)$, D_n $(n \geq 5)$ et E_6, où $A(\Pi)$ est d'ordre 2, et
- Φ est de type D_4, où $A(\Pi)$ est isomorphe au groupe des permutations de trois lettres.

1.3.4 Idéaux d'algèbres de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps commutatif K.

Un *idéal* de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel I de $\mathfrak{g}$ tel que pour tous les $x \in I$ et $y \in \mathfrak{g}$, nous ayons $[x, y] \in I$. L'algèbre de Lie *quotient* de $\mathfrak{g}$ par un idéal I est l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/I$ muni du crochet de Lie $[x + I, y + I] = [x, y] + I$ pour tous les $x, y \in \mathfrak{g}$.

Un idéal est en particulier une sous-algèbre de Lie. Si I est un idéal de $\mathfrak{g}$, la projection canonique de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}/I$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Par exemple, le noyau $\operatorname{Ker} f$ d'un morphisme f d'algèbres de Lie est un idéal, et l'algèbre de Lie image de f est isomorphe à l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker} f$. Le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est donc un idéal de $\mathfrak{g}$. Toute intersection et toute somme vectorielle d'idéaux de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. En particulier, pour toute partie A de $\mathfrak{g}$, l'intersection de tous les idéaux de $\mathfrak{g}$ contenant A est le plus petit idéal contenant A, appelé *l'idéal engendré par* A. Si I et J sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, alors l'inclusion de J dans $I + J$ induit un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $J/(I \cap J)$ et $(I + J)/I$.

Une *partie génératrice* de $\mathfrak{g}$ est une partie A de $\mathfrak{g}$ telle que la plus petite sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ contenant A soit $\mathfrak{g}$. Une *présentation* de $\mathfrak{g}$ est un couple (S, R), où S est une partie génératrice de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et R est une partie de l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{L}(S)$ sur S (voir la définition dans l'exemple (9) de la partie 1.2.1), tel que l'unique morphisme de $\mathfrak{L}(S)$ dans $\mathfrak{g}$ valant l'identité sur S induise par passage au quotient un isomorphisme de l'algèbre de Lie quotient de $\mathfrak{L}(S)$ par l'idéal engendré par R à valeurs dans $\mathfrak{g}$.

Si (S, R) est une présentation de $\mathfrak{g}$, nous dirons aussi que $\mathfrak{g}$ est *définie par générateurs les éléments de S et relations les éléments de R.*

Exercice E.9 *Si K est un corps commutatif de caractéristique nulle, montrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(K)$ est définie par les générateurs*

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et les relations

$$[E, F] = H, \ \ [H, E] = 2E, \ \ [H, F] = -2F \ .$$

Calculer la forme de Killing de $\mathfrak{sl}_2(K)$ dans cette base.

Il découle de cet exercice et de la définition d'une présentation d'algèbre de Lie que si (e, f, h) est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (voir la partie 1.2.3) dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur K, alors il existe un et un seul morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{sl}_2(K)$ dans $\mathfrak{g}$ qui envoie E sur e, F sur f et H sur h.

Soit A une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Le *commutant* ou *centralisateur* de A dans $\mathfrak{g}$ est

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A) = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ \forall\, Y \in A, \ \ \operatorname{ad} Y(X) = 0\} \ .$$

Par la formule de Jacobi, c'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, qui contient A si A est abélienne. Le *normalisateur* de A dans $\mathfrak{g}$ est

$$\mathfrak{n}(A) = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ \operatorname{ad} X\,(A) \subset A\} \ .$$

Il contient le centralisateur de A dans $\mathfrak{g}$. C'est la plus grande sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ contenant A dans laquelle A soit un idéal.

Si I et J sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, alors le sous-espace vectoriel $[I, J]$ de $\mathfrak{g}$ engendré par les $[x, y]$ pour $x \in I$ et $y \in J$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. En général, il contient strictement cet ensemble des $[x, y]$ pour $x \in I$ et $y \in J$.

L'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est appelé *l'algèbre dérivée* de $\mathfrak{g}$. C'est le plus petit idéal de $\mathfrak{g}$ tel que l'algèbre de Lie quotient de $\mathfrak{g}$ par cet idéal soit abélienne. Si $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un morphisme d'algèbres de Lie, alors $f([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \subset [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$.

La *suite centrale descendante* de $\mathfrak{g}$ est la suite décroissante $(C_n\mathfrak{g})_{n\in\mathbb{N}}$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ définie par $C_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ et $C_{n+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C_n\mathfrak{g}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons que si $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un morphisme d'algèbres de Lie, alors $f(C_n\mathfrak{g}) \subset C_n(\mathfrak{g}')$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite *nilpotente* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $C_n\mathfrak{g} = \{0\}$, et *l'ordre de nilpotence* de $\mathfrak{g}$ est alors le plus petit tel n. L'ordre de nilpotence de $\mathfrak{g}$ est 1 si et seulement si $\mathfrak{g}$ est abélienne non triviale. Remarquons que le dernier terme non nul de la suite centrale descendante d'une algèbre de Lie nilpotente est contenu dans son centre, en particulier celui-ci est non nul, si l'algèbre de Lie est non nulle. Par exemple, la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(K)$ formée des matrices triangulaires supérieures strictes est nilpotente d'ordre de nilpotence $n - 1$.

La *suite dérivée* de $\mathfrak{g}$ est la suite décroissante $(D_n\mathfrak{g})_{n\in\mathbb{N}}$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ définie par $D_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ et $D_{n+1}\mathfrak{g} = [D_n\mathfrak{g}, D_n\mathfrak{g}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons que si $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un morphisme d'algèbres de Lie, alors $f(D_n\mathfrak{g}) \subset D_n(\mathfrak{g}')$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite *résoluble* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $D_n\mathfrak{g} = \{0\}$, et *l'ordre de résolubilité* de $\mathfrak{g}$ est alors le plus petit tel n. Notons que $D_1\mathfrak{g} = C_1\mathfrak{g}$, et que l'ordre de résolubilité est 1 si et seulement si $\mathfrak{g}$ est abélienne non triviale. Remarquons que le dernier terme non nul de la suite dérivée d'une algèbre de Lie résoluble non nulle est un idéal abélien non nul. Par exemple, la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(K)$ formée des matrices triangulaires supérieures est résoluble, non nilpotente si $n > 1$.

Une algèbre de Lie abélienne est nilpotente, et une algèbre de Lie nilpotente est résoluble. Soit D l'application de l'ensemble des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans lui-même définie par $D : \mathfrak{h} \mapsto [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Comme $D_{n+1}\mathfrak{g} = D^{n+1}(\mathfrak{g}) = D_n(D\mathfrak{g})$, si l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$ est nilpotente (donc résoluble), alors $\mathfrak{g}$ est résoluble. La propriété d'être abélien, nilpotent ou résoluble est stable par passage à la sous-algèbre de Lie, à l'image par un morphisme d'algèbres de Lie (donc aux algèbres de Lie quotients), aux intersections et aux produits finis. Les idéaux $D_n\mathfrak{g}$ et $C_n\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$ sont *caractéristiques*, c'est-à-dire invariants par tous les automorphismes d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$.

Proposition 1.14 *Soit* $0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{f} \mathfrak{b} \xrightarrow{g} \mathfrak{c} \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte de morphismes d'algèbres de Lie (c'est-à-dire telle que* f *est injective,* g *surjective et* $\operatorname{im} f = \ker g$*). Alors* $\mathfrak{b}$ *est résoluble si et seulement si* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{c}$ *le sont. Si l'extension est centrale (c'est-à-dire si* $f(\mathfrak{a})$ *est contenue dans le centre de* $\mathfrak{b}$*) et si* $\mathfrak{c}$ *est nilpotente, alors* $\mathfrak{b}$ *est nilpotente.*

En corollaire, nous pouvons remontrer que si l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$ est nilpotente, alors $\mathfrak{g}$ est résoluble (car $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est alors un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ de quotient abélien).

Démonstration. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c}$ sont résolubles d'ordres m et n respectivement, alors $D_n\mathfrak{b}$, dont l'image par g est nulle, est contenu dans $f(\mathfrak{a})$, donc $D_{n+m}\mathfrak{b}$, contenu dans $f(D_m\mathfrak{a})$, est nul.

Si l'extension est centrale et si $\mathfrak{c}$ est nilpotente d'ordre n, alors $C_n\mathfrak{b}$, dont l'image par g est nulle, est contenu dans $f(\mathfrak{a})$, donc dans le centre de $\mathfrak{b}$, donc $C_{n+1}\mathfrak{b} = [\mathfrak{b}, C_n\mathfrak{b}] = 0$. $\square$

En particulier, si I et J sont deux idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$, alors $I + J$ est résoluble, car I et $(I + J)/I \simeq J/(I \cap J)$ sont résolubles. Lorsque la dimension de $\mathfrak{g}$ est finie, il existe

donc un plus grand idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ (la somme vectorielle de tous les idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$), appelé le *radical résoluble* de $\mathfrak{g}$, et noté $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.

Comme la suite $0 \longrightarrow \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{ad} \operatorname{ad}\mathfrak{g} \longrightarrow 0$ est exacte, une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nilpotente si et seulement si $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie nilpotente de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite *simple* si elle n'a pas d'idéal différent de $\{0\}$ et $\mathfrak{g}$, et si elle est non abélienne. (Cette dernière condition peut être remplacée par « et si sa dimension est au moins 2 ».)

1.3.5 Algèbres de Lie semi-simple

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif de caractéristique nulle.

Nous dirons que $\mathfrak{g}$ est *semi-simple* si l'une des conditions suivantes, que nous montrerons être équivalentes, est vérifiée.

(i) tout idéal abélien de $\mathfrak{g}$ est nul ;

(ii) le radical résoluble de $\mathfrak{g}$ est nul ;

(iii) la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est non dégénérée ;

(iv) $\mathfrak{g}$ est somme directe d'idéaux simples.

L'équivalence de ces assertions est appelée le *critère de semi-simplicité de Cartan*. En ce qui concerne l'étude des groupes de Lie, la troisième définition est sans doute la plus importante. Les trois autres s'en déduisent d'ailleurs assez facilement. Pour démontrer l'équivalence de ces assertions, nous commençons par le lemme élémentaire suivant.

Lemme 1.15 *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie et $B = B_{\mathfrak{g}}$ sa forme de Killing.*

(1) Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors l'orthogonal $\mathfrak{a}^{\perp}$ de $\mathfrak{a}$ pour la forme bilinéaire B est un idéal, et $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{\perp}]$ est contenu dans le noyau[9] *de B. En particulier, le noyau de B est un idéal.*

(2) Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors la restriction de B à $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ est la forme de Killing de $\mathfrak{a}$.

(3) Tout idéal abélien $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ est contenu dans le noyau de B.

Démonstration. (1) Ceci découle du fait que B est ad-alternée : pour tous les $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{a}^{\perp}, z \in \mathfrak{g}$, nous avons $B([z,y],x) = -B(y,[z,x]) = 0$ et $B([x,y],z) = -B(y,[x,z]) = 0$. De plus, le noyau de B est égal à $\mathfrak{g}^{\perp}$.

(2)-(3) Soit $\mathfrak{b}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathfrak{a}$. Pour tous les $x \in \mathfrak{g}$ et $y \in \mathfrak{a}$, puisque $\mathfrak{a}$ est un idéal, nous avons $\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y\,(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}$. Si de plus $\mathfrak{a}$ est abélien, alors $\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y\,(\mathfrak{a}) = 0$. Un calcul par blocs dans la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ de la trace montre alors les résultats. □

Montrons que l'assertion (i) implique l'assertion (ii). Le radical $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ étant résoluble, s'il est non nul, le dernier terme non nul de sa série dérivée est un idéal abélien caractéristique de $\mathfrak{r}$, donc un idéal abélien non nul de $\mathfrak{g}$, puisque $\mathfrak{r}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Montrons que l'assertion (ii) implique l'assertion (iii). Ceci découle du résultat suivant en prenant pour $\mathfrak{g}$ le noyau de B et en utilisant le lemme 1.15.

9. Rappelons que le *noyau* d'une forme bilinéaire symétrique $f : E \times E \to K$ sur un espace vectoriel E sur K est $E^{\perp} = \{x \in E \ : \ \forall\, y \in E, \ \ f(x,y) = 0\}$, que f est *non dégénérée* si son noyau est nul, et que *l'orthogonal* pour f d'un sous-espace vectoriel A de E est $A^{\perp} = \{x \in E \ : \ \forall\, y \in A, \ \ f(x,y) = 0\}$.

Théorème 1.16 (Critère de résolubilité de Cartan) *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif de caractéristique nulle. Si sa forme de Killing B est nulle, alors $\mathfrak{g}$ est résoluble.*

Faisons quelques rappels avant de démontrer ce résultat.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K de caractéristique nulle. Un élément X de $\mathrm{End}(V)$ est dit *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X^n = 0$; il est dit *semi-simple* s'il est diagonalisable sur une extension (finie, ou algébriquement close) de K. Notons que $X \in \mathrm{End}(V)$ est nilpotent si et seulement si ses valeurs propres dans une clôture algébrique de K sont nulles, et que sa trace est alors nulle. Rappelons le résultat classique suivant.

Théorème 1.17 (Décomposition de Jordan) *Tout élément $X \in \mathrm{End}(V)$ s'écrit, de manière unique, $X = X_s + X_n$ où X_s est semi-simple, X_n est nilpotent, et X_s et X_n commutent. De plus, il existe des polynômes P et Q à coefficients dans K, sans terme constant, tels que $X_s = P(X)$ et $X_n = Q(X)$.* □

Notons que si $X \in \mathrm{End}(V)$ est nilpotent, alors $\mathrm{ad}\, X \in \mathrm{End}(\mathrm{End}(V))$ l'est aussi (car $(\mathrm{ad}\, X)^k Y$ est une somme de termes $X^i Y X^j$ où $i + j = k$, donc $(\mathrm{ad}\, X)^{2n} = 0$ si $X^n = 0$). Voici un critère utile de nilpotence.

Théorème 1.18 (Théorème d'Engel) *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente si et seulement si, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}\, x$ de $\mathfrak{g}$ est nilpotent.*

Démonstration. Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente d'ordre n, alors pour tous les x, y dans $\mathfrak{g}$, nous avons $(\mathrm{ad}\, x)^n(y) \in C_n\mathfrak{g} = \{0\}$, donc $\mathrm{ad}\, x$ est nilpotent.

La réciproque repose sur le résultat suivant.

Lemme 1.19 *Pour tout espace vectoriel V' de dimension finie non nulle, pour toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{gl}(V')$ dont les éléments sont nilpotents, il existe un vecteur $v \in V'$ non nul tel que $x(v) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}'$.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur la dimension k de $\mathfrak{g}'$. C'est immédiat si $k = 0$ ou $k = 1$, car tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel non nul admet 0 pour valeur propre. Supposons $k \geq 2$. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}'$, différente de $\mathfrak{g}'$, de dimension maximale. Cette dimension est au moins 1, car toute droite vectorielle dans $\mathfrak{g}'$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}'$. Pour tout X dans $\mathfrak{h}$, puisque $\mathrm{ad}\, X(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}\, X$ (nilpotent par la remarque qui précède l'énoncé du théorème d'Engel) induit un endomorphisme nilpotent de l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}'/\mathfrak{h}$. Par récurrence, il existe donc un élément $y \in \mathfrak{g}' - \mathfrak{h}$ tel que pour tout $x \in \mathfrak{g}'$, nous ayons $\mathrm{ad}\, x\,(y) \in \mathfrak{h}$. Alors l'espace vectoriel engendré par $\mathfrak{h}$ et y est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}'$, qui par maximalité est égale à $\mathfrak{g}'$. Toujours par récurrence, le sous-espace vectoriel $E = \{u \in V' \ : \ \forall x \in \mathfrak{h},\ x(u) = 0\}$ est non nul, et invariant par y car pour tous les $x \in \mathfrak{h}$ et $u \in E$, nous avons $x(y(u)) = (\mathrm{ad}\, x\,(y))(u) + y(x(u)) = 0$. Si $v \in E$ est un vecteur propre de l'endomorphisme nilpotent y de E (pour la valeur propre 0), alors $x(v) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{h} \cup \{y\}$, donc pour tout $x \in \mathfrak{g}'$, par linéarité. □

Le théorème d'Engel se démontre alors par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Le lemme précédent appliqué à $V' = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}' = \operatorname{ad}\mathfrak{g}$ montre que le centre de $\mathfrak{g}$ est non trivial. L'hypothèse de récurrence appliquée à l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ montre alors que $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est nilpotente, ce qui conclut par la proposition 1.14. □

Démonstration du théorème 1.16. Pour démontrer le critère de résolubilité de Cartan, montrons tout d'abord le lemme technique suivant.

Lemme 1.20 *Soient $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ et $\mathfrak{b} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \ : \ [X, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}\}$ le normalisateur de $\mathfrak{a}$. Si $Z \in \mathfrak{a}$, si $\operatorname{tr}(XZ) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{b}$, alors Z est nilpotent.*

Démonstration. Nous pouvons supposer V non nul. Soit $Z \in \mathfrak{a}$ tel que $\operatorname{tr}(XZ) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{b}$. Notons $Z = S + N$ la décomposition de Jordan de Z, avec S semi-simple et N nilpotent ; montrons que $S = 0$. Par extension des scalaires, nous pouvons supposer que K est algébriquement clos. Fixons une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V telle que $S(e_i) = \lambda_i e_i$ où $\lambda_i \in K$ pour $1 \leq i \leq n$. Notons $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base vectorielle correspondante de $\mathfrak{gl}(V)$ et E le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Il suffit de montrer que $E = \{0\}$. Soit $f : E \to \mathbb{Q}$ une forme $\mathbb{Q}$-linéaire sur E ; montrons que $f = 0$, ce qui conclut. Notons T l'endomorphisme de V défini par $T(e_i) = f(\lambda_i)e_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Soit P un polynôme de terme constant nul tel que $P(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i) - f(\lambda_j)$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Ceci est possible, car si $\lambda_i - \lambda_j = \lambda_k - \lambda_\ell$, alors $f(\lambda_i) - f(\lambda_j) = f(\lambda_k) - f(\lambda_\ell)$, donc il existe un polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i) - f(\lambda_j)$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Ce polynôme P est bien de terme constant nul car $P(0) = P(\lambda_1 - \lambda_1) = f(\lambda_1) - f(\lambda_1) = 0$.

Puisque $\operatorname{ad} S(E_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$ et $\operatorname{ad} T\,(E_{i,j}) = (f(\lambda_i) - f(\lambda_j))E_{i,j}$, nous avons $\operatorname{ad} T = P(\operatorname{ad} S)$. Or $\operatorname{ad} S$ est un polynôme de terme constant nul en $\operatorname{ad} Z$, car $\operatorname{ad} Z = \operatorname{ad} S + \operatorname{ad} N$ est la décomposition de Jordan de $\operatorname{ad} Z$, par unicité ($\operatorname{ad} S$ est semi-simple, $\operatorname{ad} N$ est nilpotent, et $\operatorname{ad} S$ et $\operatorname{ad} N$ commutent par la formule de Jacobi). Puisque $Z \in \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Lie, nous avons $\operatorname{ad} Z(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$, donc $\operatorname{ad} T(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$. Donc $T \in \mathfrak{b}$ et par hypothèse,

$$0 = \operatorname{tr}(TZ) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\lambda_i) \ .$$

En appliquant f, nous obtenons que $\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)^2 = 0$, donc que $f = 0$, ce qu'il fallait démontrer. □

Démontrons maintenant le théorème 1.16. Supposons que la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ soit nulle. Pour montrer que $\mathfrak{g}$ est résoluble, il suffit de montrer que son algèbre dérivée $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente. Par le théorème d'Engel, il suffit de montrer que tout élément de $\operatorname{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotent. Appliquons le lemme technique 1.20 à $V = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{a} = \operatorname{ad}\mathfrak{g}$, en vérifiant son hypothèse. Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $X' \in \mathfrak{gl}(V)$ tels que X' appartienne au normalisateur de $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire vérifie $[X', \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$, et $Z = \operatorname{ad}[X, Y]$. Alors $Z \in \mathfrak{a}$ et par la formule de Jacobi,

$$\operatorname{tr}(X'\ Z) = \operatorname{tr}(X'\ \operatorname{ad}[X, Y]) = \operatorname{tr}(X'\ [\operatorname{ad} X, \operatorname{ad} Y]) = \operatorname{tr}([X', \operatorname{ad} X]\ \operatorname{ad} Y]) \ .$$

Puisque $[X', \operatorname{ad} X] \in \mathfrak{a} = \operatorname{ad}\mathfrak{g}$ et par annulation de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, nous avons donc $\operatorname{tr}(X'\ Z) = 0$. Par linéarité, $\operatorname{tr}(X'\ Z) = 0$ pour tout $Z \in \operatorname{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Le lemme 1.20 implique donc que tout élément de $\operatorname{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotent, ce qui conclut. □

Montrons que l'assertion (iii) implique l'assertion (iv). Raisonnons par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est abélienne ou simple, alors le résultat est immédiat. Sinon, soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ non nul, différent de $\mathfrak{g}$. Par le lemme 1.15 (1), son orthogonal $\mathfrak{a}^\perp$ est un idéal, dont la dimension est la codimension de $\mathfrak{a}$, puisque B est non dégénérée. Notons que $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^\perp] = 0$ par le lemme 1.15 (1) et l'hypothèse (iii). En particulier, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ est un ideal abélien, donc nul par le lemme 1.15 (3) et l'hypothèse (iii). Ceci implique que $\mathfrak{g}$ est la somme directe vectorielle $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$, avec $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^\perp$ de dimension strictement plus petite que celle de $\mathfrak{g}$. Ceci conclut par récurrence : les formes de Killing de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{a}^\perp$ sont non dégénérées par le lemme 1.15 (2) ; les idéaux de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{a}^\perp$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, car $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^\perp] = 0$.

Montrons enfin que l'assertion (iv) implique l'assertion (i). Supposons que $\mathfrak{g}$ soit somme directe vectorielle d'idéaux simples $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k$. La forme de Killing de $\mathfrak{g}_i$ est non dégénérée, car son noyau, qui est un idéal de $\mathfrak{g}_i$, n'est pas égal à $\mathfrak{g}_i$ par le critère de résolubilité de Cartan (une algèbre de Lie simple n'est pas résoluble). Nous avons $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = \{0\}$ si $i \neq j$. Donc, par un calcul de trace par blocs, la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est non dégénérée. Le résultat découle alors du lemme 1.15 (3). □

Remarque. Pour tout corps commutatif K, par le lemme 1.15 (2) et par le calcul de la forme de Killing de $\mathfrak{gl}_n(K)$ (voir la formule $(\cdot\, 1\, \cdot)$), puisque $\mathfrak{sl}_n(K)$ est un idéal de $\mathfrak{gl}_n(K)$ (car la trace d'un commutateur de matrices est nulle), la forme de Killing B de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(K)$ est

$$\forall\, X, Y \in \mathfrak{sl}_n(K), \quad B(X, Y) = 2n \operatorname{tr}(XY)\ .$$

Il est alors facile de vérifier que B est non dégénérée, donc $\mathfrak{sl}_n(K)$ est semi-simple. Nous montrerons en fait que $\mathfrak{sl}_n(K)$ est simple ultérieurement (voir l'exercice E.10). Nous avons $\mathfrak{gl}_n(K) = \mathfrak{sl}_n(K) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(K))$. Puisque le centre de $\mathfrak{gl}_n(K)$ est non trivial, $\mathfrak{gl}_n(K)$ n'est pas semi-simple. Notons que $\mathfrak{sl}_n(K) = [\mathfrak{sl}_n(K), \mathfrak{sl}_n(K)] = [\mathfrak{gl}_n(K), \mathfrak{gl}_n(K)]$, par le résultat suivant.

Corollaire 1.21 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur un corps commutatif de caractéristique nulle. Alors le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est nul, et $\mathfrak{g}$ est égale à son algèbre dérivée :*

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\ .$$

De plus, toute dérivation de $\mathfrak{g}$ est intérieure (c'est-à-dire de la forme $\operatorname{ad} X$ pour un $X \in \mathfrak{g}$).

Démonstration. La première affirmation découle de (i). La seconde assertion est immédiate si $\mathfrak{g}$ est simple, et sinon elle découle de la définition (iv).

Montrons la dernière affirmation. L'algèbre de Lie $\mathfrak{a} = \operatorname{ad} \mathfrak{g}$ (qui est semi-simple car ad est un isomorphisme sur son image puisque $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$) est un idéal de l'algèbre de Lie $\delta = \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$, car pour toute dérivation D et tout $X \in \mathfrak{g}$, nous avons $[D, \operatorname{ad} X] = \operatorname{ad}(DX)$ (une simple réécriture de la propriété de dérivation). Notons $\mathfrak{a}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans δ pour la forme de Killing de δ. Puisque la forme de Killing de $\mathfrak{a}$, restriction de la forme de Killing de δ à $\mathfrak{a}$ par le lemme 1.15 (2), est non dégénérée, nous avons $\delta = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$. Soit $D \in \mathfrak{a}^\perp$, montrons que $D = 0$, ce qui conclut. Or pour tout $X \in \mathfrak{g}$, nous avons $\operatorname{ad}(DX) = [D, \operatorname{ad} X] \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$ et ad est injective, donc $D = 0$. □

1.3.6 Sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple

Soient K un corps commutatif de caractéristique nulle et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur K, qui est semi-simple.

Rappelons qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur K est dit *semi-simple* s'il est diagonalisable sur une clôture algébrique de K.

Une *sous-algèbre de Cartan* de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ vérifiant l'une des deux conditions suivantes, que nous montrerons être équivalentes :

(i) $\mathfrak{h}$ est abélienne, $\operatorname{ad} x$ est semi-simple pour tout $x \in \mathfrak{h}$, et $\mathfrak{h}$ est maximale pour ces propriétés ;

(ii) $\mathfrak{h}$ est abélienne maximale, et $\operatorname{ad} x$ est semi-simple pour tout $x \in \mathfrak{h}$.

On fera bien attention à ne pas confondre la notion de "sous-algèbre de Cartan" que nous venons de définir et celle de "sous-espace de Cartan" que nous définirons dans la partie 4.2.1.

Ces définitions sont les plus pratiques pour les algèbres de Lie semi-simple. Nous renvoyons à la discussion qui précède la proposition 1.28 pour une définition des sous-algèbres de Cartan valable pour toutes les algèbres de Lie sur un corps commutatif infini.

Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est dite *déployée* si $\operatorname{ad} x$ est diagonalisable dans $\mathfrak{g}$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$. Si $K = \mathbb{C}$, toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est bien sûr déployée.

Exemples. (1) Pour tout $n \geq 2$, dans l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{sl}_n(K)$, l'ensemble $\mathfrak{h}$ des matrices diagonales est une sous-algèbre abélienne, maximale car tout élément de $\mathscr{M}_n(K)$ qui commute avec toute matrice diagonale de trace nulle est diagonale, et pour tout $x \in \mathfrak{h}$, si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de K^n et $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ celle de $\mathscr{M}_n(K)$, si $x(e_i) = \lambda_i e_i$, alors

$$\operatorname{ad} x\,(E_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j) E_{i,j}\ , \qquad (\cdot 8 \cdot)$$

donc $\operatorname{ad} x$ est diagonale dans la base $\{E_{1,1} - E_{k,k}\}_{2 \leq k \leq n} \cup \{E_{i,j}\}_{1 \leq i \neq j \leq n}$ de $\mathfrak{sl}_n(K)$. Donc $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan déployée de $\mathfrak{sl}_n(K)$.

(2) Si $\mathfrak{g}$ est le produit de deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sur K, qui sont de dimension finie et semi-simples, si $\mathfrak{h}_i$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_i$ pour $i = 1, 2$, alors $\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, qui est déployée si $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ le sont.

Démonstration de l'équivalence des définitions des sous-algèbres de Cartan. Il est immédiat qu'une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ vérifiant (ii) vérifie aussi (i). La réciproque découle du résultat suivant.

Proposition 1.22 *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie abélienne de $\mathfrak{g}$ telle que $\operatorname{ad} x$ soit semi-simple pour tout $x \in \mathfrak{h}$, et qui est maximale pour ces propriétés. Alors $\mathfrak{h}$ est égale à son normalisateur*

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g}\ :\ \forall\, H \in \mathfrak{h},\ \ \operatorname{ad} H(X) \in \mathfrak{h}\}$$

dans $\mathfrak{g}$, est égale à son commutant

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g}\ :\ \forall\, H \in \mathfrak{h},\ \ \operatorname{ad} H(X) = 0\}$$

dans $\mathfrak{g}$, et en particulier est abélienne maximale.

Démonstration. Notons B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, qui est non dégénérée car $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Puisque $\mathfrak{h}$ est abélienne, nous avons

$$\mathfrak{h}\ \subset\ \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\ \subset\ \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\ .$$

Pour montrer les inclusions réciproques, nous commençons par quatre lemmes.

Lemme 1.23 *Nous avons* $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]$. *En particulier,* $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

Démonstration. Montrons pour commencer que $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \cap [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = \{0\}$. Nous pouvons supposer que K est algébriquement clos. Puisque les endomorphismes $\operatorname{ad} X$ pour $X \in \mathfrak{h}$ sont diagonalisables, et commutent entre eux par la formule de Jacobi, ils sont simultanément diagonalisables. L'espace propre commun pour la valeur propre 0 est le commutant de $\mathfrak{h}$. Nous avons donc une décomposition en somme directe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \ ,$$

où Φ est un ensemble d'applications de $\mathfrak{h}$ dans K non identiquement nulles et

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \ : \ \forall\, H \in \mathfrak{h}, \ \ \operatorname{ad} H(x) = \alpha(H)x\} \ .$$

Puisque $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha$ et $[\mathfrak{h}, \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})] = 0$, nous avons donc $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$, et la première affirmation en découle.

Puisque B est non dégénérée, il suffit alors, pour obtenir que $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]$, de montrer que l'orthogonal de $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]$ pour B est égal à $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Or, puisque B est non dégénérée et ad-alternée, un élément X de $\mathfrak{g}$ appartient à $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ si et seulement si $[X, Y] = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{h}$, si et seulement si $B([X, Y], Z) = 0$ pour tous les $Y \in \mathfrak{h}$ et $Z \in \mathfrak{g}$, si et seulement si $B(X, [Y, Z]) = 0$ pour tous les $Y \in \mathfrak{h}$ et $Z \in \mathfrak{g}$, si et seulement si X appartient à l'orthogonal de $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]$ pour B.

Enfin, si X normalise $\mathfrak{h}$, alors pour tout $Y \in \mathfrak{h}$, nous avons

$$[X, Y] \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{h} \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{0\} \ ,$$

donc X centralise $\mathfrak{h}$. □

Lemme 1.24 *Soient* $\widetilde{X}$ *et* $\widetilde{Y}$ *deux endomorphismes d'un espace vectoriel sur* K *de dimension finie tels que* $\widetilde{X}$ *soit nilpotent et* $[\widetilde{X}, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]] = 0$. *Alors* $\widetilde{X}\widetilde{Y}$ *est nilpotent.*

Démonstration. Nous pouvons supposer K algébriquement clos. Posons $\widetilde{Z} = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$. Puisque $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Z}$ commutent, pour tout $n \geq 1$, nous avons $\widetilde{Z}^n = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}\widetilde{Z}^{n-1}]$, donc $\operatorname{tr} \widetilde{Z}^n = 0$. En trigonalisant $\widetilde{Z}$, ceci implique que $\widetilde{Z}$ est nilpotent.

Soient λ une valeur propre de $\widetilde{X}\widetilde{Y}$ et v un vecteur propre (non nul) associé. Notons $p \geq 1$ le plus petit entier tel que $\widetilde{X}^p v = 0$, qui existe car $\widetilde{X}$ est nilpotent. Par récurrence, nous avons $[\widetilde{X}^n, \widetilde{Y}] = n\widetilde{Z}\widetilde{X}^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$\lambda \widetilde{X}^{p-1} v = \widetilde{X}^{p-1}\widetilde{X}\widetilde{Y} v = [\widetilde{X}^p, \widetilde{Y}]v + \widetilde{Y}\widetilde{X}^p v = p\widetilde{Z}\widetilde{X}^{p-1} v \ .$$

Par conséquent, λ/p est une valeur propre de $\widetilde{Z}$, qui est nilpotent. Nous avons donc $\lambda = 0$.

En trigonalisant, l'endomorphisme $\widetilde{X}\widetilde{Y}$, dont toutes les valeurs propres sont nulles, est donc nilpotent. □

Lemme 1.25 *Soit* X *un élément de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\operatorname{ad} X$ *soit nilpotent. Alors il existe* $H \in \mathfrak{g}$ *tel que* $[H, X] = X$.

Démonstration. Puisque B est ad-alternée, l'endomorphisme $(\operatorname{ad} X)^2$ est auto-adjoint :

$$\forall\, Y, Z \in \mathfrak{g}, \quad B((\operatorname{ad} X)^2 Y, Z) = B(Y, (\operatorname{ad} X)^2 Z)\ .$$

Notons N le noyau de $(\operatorname{ad} X)^2$ et $N^\perp$ son orthogonal pour B. Puisque B est non dégénérée, l'image de l'endomorphisme auto-adjoint $(\operatorname{ad} X)^2$ est égale à $N^\perp$ (car contenue dans $N^\perp$ et de même dimension).

Pour tout $Y \in N$, le produit $\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y$ est nilpotent par le lemme 1.24 (appliqué à $\widetilde{X} = \operatorname{ad} X$ et $\widetilde{Y} = \operatorname{ad} Y$, car $\operatorname{ad} X$ est nilpotent et $[\operatorname{ad} X, [\operatorname{ad} X, \operatorname{ad} Y]] = \operatorname{ad}[X, [X, Y]] = \operatorname{ad}((\operatorname{ad} X)^2 Y) = 0$), et donc $B(X, Y) = 0$ (car la trace d'un endomorphisme nilpotent est nulle). Par conséquent, $X \in N^\perp = \operatorname{im}(\operatorname{ad} X)^2$ et il existe $Z \in \mathfrak{g}$ tel que $X = (\operatorname{ad} X)^2 Z$. En posant $H = -[X, Z]$, le résultat en découle. □

Lemme 1.26 (Décomposition de Jordan) *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (de dimension finie) semi-simple sur un corps commutatif de caractéristique nulle K. Tout élément X de $\mathfrak{g}$ s'écrit de manière unique $X = X_s + X_n$ avec $\operatorname{ad} X_s$ semi-simple, $\operatorname{ad} X_n$ nilpotent et $[X_s, X_n] = 0$. De plus, pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, si $[X, Y] = 0$, alors $[X_s, Y] = 0$ et $[X_n, Y] = 0$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord l'unicité. Puisque $[\operatorname{ad} X_s, \operatorname{ad} X_n] = \operatorname{ad}[X_s, X_n] = 0$, l'écriture $\operatorname{ad} X = \operatorname{ad} X_s + \operatorname{ad} X_n$ est la décomposition de Jordan de l'endomorphisme $\operatorname{ad} X$ (voir le théorème 1.17). Donc l'unicité découle de l'unicité dans la décomposition de Jordan de $\operatorname{ad} X$, et du fait que ad est injective (car le centre de $\mathfrak{g}$ est trivial).

Montrons que la partie semi-simple $(\operatorname{ad} X)_s$ dans la décomposition de Jordan de $\operatorname{ad} X$ est une dérivation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Nous pouvons supposer que K est algébriquement clos. Pour tout $\lambda \in K$, notons $\mathfrak{g}_\lambda = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker(\operatorname{ad} X - \lambda \operatorname{id})^n$, qui est le sous-espace caractéristique de $\operatorname{ad} X$ associé à λ si λ est une valeur propre de $\operatorname{ad} X$, et qui est égal à $\{0\}$ sinon. Nous avons $\mathfrak{g} = \oplus_{\lambda\in K} \mathfrak{g}_\lambda$. Pour montrer que $(\operatorname{ad} X)_s$ est une dérivation, il suffit donc de montrer que $[(\operatorname{ad} X)_s Y, Z] + [Y, (\operatorname{ad} X)_s Z] = (\operatorname{ad} X)_s [Y, Z]$ pour tous les $\lambda, \mu \in K$, $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$ et $Z \in \mathfrak{g}_\mu$. Puisque la restriction de $\operatorname{ad} X$ à $\mathfrak{g}_\lambda$ est la somme de $\lambda \operatorname{id}_{\mathfrak{g}_\lambda}$ et d'un endomorphisme nilpotent, l'endomorphisme $(\operatorname{ad} X)_s$ agit par multiplication par λ sur $\mathfrak{g}_\lambda$. Il suffit donc de montrer que $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$. Ceci découle de la formule suivante, qui se montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: pour tous les $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ et $\lambda, \mu \in K$, nous avons

$$(\operatorname{ad} X - (\lambda + \mu) \operatorname{id})^n [Y, Z] = \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{p} \big[(\operatorname{ad} X - \lambda \operatorname{id})^k Y, (\operatorname{ad} X - \mu \operatorname{id})^{n-k} Z\big]\ . \qquad (\cdot 9 \cdot)$$

Par le corollaire 1.21, il existe donc $X_s \in \mathfrak{g}$ tel que $(\operatorname{ad} X)_s = \operatorname{ad} X_s$. Posons $X_n = X - X_s$. Alors $\operatorname{ad} X_n = \operatorname{ad} X - (\operatorname{ad} X)_s$ est nilpotent, et $\operatorname{ad}[X_s, X_n] = [(\operatorname{ad} X)_s, \operatorname{ad} X - (\operatorname{ad} X)_s] = 0$ par les propriétés de la décomposition de Jordan de $\operatorname{ad} X$. Comme ad est injective, nous avons $[X_s, X_n] = 0$.

La dernière assertion découle du fait que $\operatorname{ad} X_s = (\operatorname{ad} X)_s$ est un polynôme de terme constant nul en $\operatorname{ad} X$. □

Après ces lemmes, soit $X \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$, montrons que $X \in \mathfrak{h}$, ce qui conclut la démonstration de la proposition 1.22, car $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ par le lemme 1.23.

Considérons la décomposition de Jordan $X = X_s + X_n$ de X (voir le lemme 1.26). Par la dernière assertion de ce lemme, X_s commute avec tout élément de $\mathfrak{h}$, donc appartient

à $\mathfrak{h}$ par maximalité de $\mathfrak{h}$. Nous pouvons par conséquent supposer que $X = X_n$, donc que $\operatorname{ad} X$ est nilpotent. Montrons alors que $X = 0$, ce qui conclut.

Par le lemme 1.25, soit $H \in \mathfrak{g}$ tel que $[H, X] = X$. Par le lemme 1.23, écrivons $H = H' + [Y, Z]$ avec $H' \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, $Y \in \mathfrak{h}$ et $Z \in \mathfrak{g}$. Puisque $X - [H, X] = 0$ et $[X, Y] = 0$, nous avons par l'identité de Jacobi,

$$X - [H', X] = [[Y, Z], X] = [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = [Y, [Z, X]] \ .$$

Le terme de gauche appartient à la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ (car $X, H' \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$), celui de droite à $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]$. Comme $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \cap [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = \{0\}$ par le lemme 1.23, nous avons $X - [H', X] = 0$. Nous pouvons donc supposer que $H \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Notons $H = H_s + H_n$ la décomposition de Jordan de H. Puisque $H \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, par la dernière assertion du lemme 1.26, H_s commute encore avec $\mathfrak{h}$, donc appartient à $\mathfrak{h}$ par la propriété de maximalité de $\mathfrak{h}$. Par conséquent $(\operatorname{ad} H_s)X = [H_s, X] = 0$ et $(\operatorname{ad} H_n)X = [H_n, X] = X$. Par récurrence, $(\operatorname{ad} H_n)^k(X) = X$ pour tout $k \geq 1$, car puisque $\operatorname{ad} H_s$ et $\operatorname{ad} H_n$ commutent, nous avons

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad} H_n)^{k+1}(X) &= (\operatorname{ad} H_n)^k((\operatorname{ad} H_s)X + (\operatorname{ad} H_n)X) = (\operatorname{ad} H_s + \operatorname{ad} H_n) \circ (\operatorname{ad} H_n)^k(X) \\ &= [H, X] = X \ .\end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{ad} H_n$ est nilpotent, nous avons donc $X = 0$, comme voulu. □

Toute algèbre de Lie semi-simple admet au moins une sous-algèbre de Cartan. En effet, $\{0\}$ est une sous-algèbre de Lie abélienne formée d'éléments dont les images par ad sont semi-simples, et il suffit de prendre une telle sous-algèbre de Lie de dimension maximale.

Le résultat suivant (voir [Bou4, Chap. VII, §2,3], [Kna, Chap. II, §3]) affirme l'unicité modulo automorphismes des sous-algèbres de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple complexe. Un *automophisme intérieur* de $\mathfrak{g}$ est un élément de $\operatorname{End}(\mathfrak{g})$ de la forme $e^{\operatorname{ad} x}$ pour un $x \in \mathfrak{g}$. Un tel élément est inversible (d'inverse $e^{-\operatorname{ad} x}$) et c'est un automorphisme d'algèbres de Lie, par la propriété de dérivation de $\operatorname{ad} x$ itérée :

$$(\operatorname{ad} x)^n[y, z] = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} [(\operatorname{ad} x)^p y, (\operatorname{ad} x)^{n-p} z] \ . \qquad (\cdot 10 \cdot)$$

Théorème 1.27 *Si K est algébriquement clos, le sous-groupe de* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ *engendré par les automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$ agit transitivement sur l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$.* □

Remarque. Puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, le sous-groupe de $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ engendré par les automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$ est en fait égal à la composante neutre de $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ (voir [Bou4, Chap. VIII, §10, exerc. 5]).

Nous donnons ci-dessous (voir aussi [Bou4, Chap. VII, §2,3]) une définition équivalente (celle de sous-algèbre nilpotente, égale à son normalisateur) des sous-algèbres de Cartan lorsque K est algébriquement clos, qui sert à démontrer le résultat d'unicité ci-dessus (Théorème 1.27), mais nous ne nous en servirons pas par la suite. Elle a l'avantage d'être valable pour toute algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif infini, avec des propriétés analogues (existence et conjugaison par le sous-groupe engendré par les automorphismes intérieurs si le corps commutatif de base est algébriquement clos de caractéristique nulle), voir loc. cit. .

Proposition 1.28 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur un corps commutatif K algébriquement clos de caractéristique nulle. Une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ si et seulement si elle est nilpotente et égale à son normalisateur dans $\mathfrak{g}$.*

Nous avons déjà montré dans la proposition 1.22 qu'une sous-algèbre de Cartan est nilpotente et égale à son normalisateur, et donc il s'agit de montrer la réciproque.

Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle. Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie nilpotente et V un $\mathfrak{h}$-module de dimension finie. Notons $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(V)$ la représentation (d'algèbres de Lie) de $\mathfrak{h}$ dans V. Pour toute application $\lambda : \mathfrak{h} \to K$, notons

$$V_\lambda = \{v \in V \ : \ \forall\, x \in \mathfrak{h},\ \exists\, n \in \mathbb{N}, \quad (\rho(x) - \lambda(x)\,\mathrm{id})^n v = 0\}\ .$$

Si $V_\lambda \neq \{0\}$, le sous-espace vectoriel V_λ est appelé un *espace de poids généralisé*, et λ un *poids* de $\mathfrak{h}$ dans V.

Proposition 1.29 *(1) Tout espace de poids généralisé V_λ est invariant par $\rho(\mathfrak{h})$.*

(2) Tout poids λ est une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$, qui s'annule sur $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$.

(3) Si K est algébriquement clos, alors $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ est la somme directe de ses espaces de poids généralisés.

(4) Si K est algébriquement clos, il existe une base de V dans laquelle les $\rho(H)$ sont triangulaires supérieurs pour tout $H \in \mathfrak{h}$.

Démonstration. (1) Pour toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{h}$ et toute application $\lambda' : \mathfrak{h}' \to K$, notons

$$V_{\lambda',\mathfrak{h}'} = \{v \in V \ : \ \forall\, x \in \mathfrak{h}',\ \exists\, n \in \mathbb{N}, \quad (\rho(x) - \lambda'(x)\,\mathrm{id})^n v = 0\}\ .$$

Montrons plus généralement que $V_{\lambda',\mathfrak{h}'}$ est invariant par $\rho(\mathfrak{h})$.

Nous laissons en exercice au lecteur de montrer par récurrence que pour tous les endomorphismes f et g d'un espace vectoriel et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$f^n \circ g = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{ad}\, f)^k(g) \circ f^{n-k}\ . \qquad (\cdot\, 11\, \cdot)$$

Soient $v \in V_{\lambda',\mathfrak{h}'}$ et $y \in \mathfrak{h}$. Montrons que pour tout $x \in \mathfrak{h}'$, nous avons $(\rho(x) - \lambda'(x)\,\mathrm{id})^n \circ \rho(y)v = 0$ pour n assez grand, ce qui montre l'assertion (1). Posons $f = \rho(x) - \lambda'(x)\,\mathrm{id}$ et $g = \rho(y)$. Puisque $\mathfrak{h}$ est nilpotente, l'algèbre de Lie $\rho(\mathfrak{h})$ est nilpotente. Par le théorème d'Engel 1.18, l'endomorphisme $\mathrm{ad}\, f = \mathrm{ad}\, \rho(x)$ est nilpotent, donc $(\mathrm{ad}\, f)^k(g) = 0$ pour tout k assez grand. Puisque $v \in V_{\lambda',\mathfrak{h}'}$, pour tout k' assez grand, nous avons $f^{k'}(v) = 0$. Le résultat découle donc de la formule $(\cdot\, 11\, \cdot)$.

Notons dans la suite $\rho_\lambda(x)$ la restriction de $\rho(x)$ à V_λ, pour tout $x \in \mathfrak{h}$.

(2) Comme $\rho_\lambda(x) - \lambda(x)\,\mathrm{id}_{V_\lambda}$ est nilpotent, nous avons $\mathrm{tr}\, \rho_\lambda(x) = \lambda(x) \dim V_\lambda$. Puisque $\dim V_\lambda$ est non nul si λ est un poids, ceci montre la linéarité de λ. Comme la trace d'un commutateur d'endomorphismes est nulle et puisque ρ est un morphisme d'algères de Lie, λ s'annule sur $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$.

(3) Raisonnons par récurrence sur la dimension de V. Si $\rho(x)$ n'a qu'une valeur propre pour tout x dans V, alors en la notant $\lambda(x)$, nous avons $V = V_\lambda$, ce qui conclut. Sinon, soit

$x \in V$ tel que $\rho(x)$ possède au moins deux valeurs propres distinctes $\mu_1, \dots, \mu_n$. Notons $\mathfrak{h}'$ la droite vectorielle de $\mathfrak{h}$ engendrée par x, et $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ les formes linéaires sur $\mathfrak{h}'$ telles que $\lambda'_i(x) = \mu_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Remarquons que $V_{\lambda'_i, \mathfrak{h}'}$ est le sous-espace caractéristique de $\rho(x)$ pour la valeur propre μ_i, donc que $V = \oplus_{1 \leq i \leq n} V_{\lambda'_i, \mathfrak{h}'}$. Par la version plus générale de l'assertion (1), les sous-espaces $V_{\lambda'_i, \mathfrak{h}'}$ sont invariants par $\rho(\mathfrak{h})$, et de dimension strictement inférieure à celle de V. Le résultat en découle donc par récurrence.

(4) Soit λ un poids. Comme λ s'annule sur $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$, l'application $x \mapsto \rho_\lambda(x) - \lambda(x)\,\mathrm{id}_{V_\lambda}$ est une représentation de $\mathfrak{h}$ dans V_λ. Par construction, l'image de cette représentation est constituée d'endomorphismes nilpotents. Par le lemme 1.19, il existe un vecteur $v \in V_\lambda$ non nul tel que $\rho_\lambda(x)v = \lambda(x)v$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$. Par récurrence appliquée à V_λ / Kv, il existe une base de V_λ dans laquelle les $\rho_\lambda(x)$ pour $x \in \mathfrak{h}$ sont triangulaires supérieurs. Comme $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ par l'assertion (3), le résultat en découle. □

Si K est algébriquement clos, pour toute sous-algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, notons $\Phi_\mathfrak{h}$ l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{h}$ pour l'action adjointe de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{g}$, et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{0,\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Phi_\mathfrak{h}} \mathfrak{g}_{\lambda,\mathfrak{h}}$$

la décomposition en espaces de poids généralisés de $\mathfrak{g}$ correspondante (et $\mathfrak{g}_{\lambda,\mathfrak{h}} = \{0\}$ si $\lambda \in \mathfrak{h}^* - (\{0\} \cup \Phi_\mathfrak{h})$).

Proposition 1.30 *Supposons K algébriquement clos. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie nilpotente de $\mathfrak{g}$, égale à son normalisateur. Notons B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.*

(1) Nous avons $\mathfrak{g}_{0,\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$.

(2) Soient $\alpha, \beta \in \Phi_\mathfrak{h} \cup \{0\}$ tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Alors $B(\mathfrak{g}_{\alpha,\mathfrak{h}}, \mathfrak{g}_{\beta,\mathfrak{h}}) = 0$.

(3) La restriction à $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ de B est non dégénérée.

(4) L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est abélienne maximale, et $\mathrm{ad}\, X$ est semi-simple pour tout $X \in \mathfrak{h}$.

L'assertion (4) démontre la proposition 1.28.

Démonstration. (1) Puisque $\mathfrak{h}$ est nilpotente et par le théorème d'Engel 1.18, la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est contenue dans $\mathfrak{g}_{0,\mathfrak{h}}$.

Réciproquement, supposons par l'absurde que $\mathfrak{g}_{0,\mathfrak{h}} \neq \mathfrak{h}$. Notons que si $X \in \mathfrak{h}$, alors l'endomorphisme $\mathrm{ad}\, X$ préserve $\mathfrak{h}$, car $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie, et préserve $\mathfrak{g}_{0,\mathfrak{h}}$ par la proposition 1.29 (1), donc induit un endomorphisme de $\mathfrak{g}_{0,\mathfrak{h}}/\mathfrak{h}$. Par le lemme 1.19 appliqué à $V' = \mathfrak{g}_{0,\mathfrak{h}}/\mathfrak{h}$ et à $\mathfrak{g}'$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V')$ formée des images des $\mathrm{ad}\, X$ pour $X \in \mathfrak{h}$, il existe $x \in \mathfrak{g}_{0,\mathfrak{h}} - \mathfrak{h}$ tel que $[\mathfrak{h}, x] \subset \mathfrak{h}$. Donc x normalise $\mathfrak{h}$, donc appartient à $\mathfrak{h}$, contradiction.

(2) Pour tous les $\alpha', \beta' \in \mathfrak{h}^*$, par la formule ($\cdot 9 \cdot$), nous avons

$$[\mathfrak{g}_{\alpha',\mathfrak{h}}, \mathfrak{g}_{\beta',\mathfrak{h}}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha'+\beta',\mathfrak{h}}\ .$$

Pour tous les $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi_\mathfrak{h} \cup \{0\}$ et $x \in \mathfrak{g}_{\alpha,\mathfrak{h}}$, $y \in \mathfrak{g}_{\beta,\mathfrak{h}}$, nous avons donc $\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y\ (\mathfrak{g}_{\gamma,\mathfrak{h}}) \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma,\mathfrak{h}}$. Comme $\alpha + \beta + \gamma \neq \gamma$ si $\alpha + \beta \neq 0$, en prenant une base de $\mathfrak{g}$ adaptée à la décomposition en somme directe $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \Phi_\mathfrak{h} \cup \{0\}} \mathfrak{g}_{\lambda,\mathfrak{h}}$, les coefficients diagonaux de $\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y$ sont nuls. Donc $B(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y) = 0$, ce qui montre l'assertion (2).

(3) Par les assertions (1) et (2), l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est orthogonale à $\mathfrak{g}_{\alpha,\mathfrak{h}}$ pour tout $\alpha \in \Phi_\mathfrak{h}$. Donc tout élément x de l'intersection de $\mathfrak{h}$ et de son orthogonal dans $\mathfrak{h}$ pour B

est contenu dans le noyau de B. Celui-ci est nul car $\mathfrak{g}$ est semi-simple. D'où $x = 0$, ce qui montre le résultat.

(4) Soient $x \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ et $y \in \mathfrak{h}$. Les endomorphismes $\operatorname{ad} x$ et $\operatorname{ad} y$ sont simultanément trigonalisables par la proposition 1.29 (4). Les valeurs propres de $\operatorname{ad} x$ sont nulles par la proposition 1.29 (2). Donc $B(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y) = 0$, ceci pour tout $y \in \mathfrak{h}$. D'où $x = 0$ par l'assertion (3), et $\mathfrak{h}$ est abélienne.

Comme le centralisateur de $\mathfrak{h}$ est contenu dans son normalisateur, qui est égal à $\mathfrak{h}$ par hypothèse, l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est abélienne maximale.

Soit $X \in \mathfrak{h}$, écrivons $X = X_s + X_n$ sa décomposition de Jordan. Alors X_n commute avec tout élément de $\mathfrak{h}$, par la dernière assertion du lemme 1.26, donc appartient à $\mathfrak{h}$. Comme $\operatorname{ad} X_n$ est nilpotent, ses valeurs propres sont nulles. Par l'argument ci-dessus, nous en déduisons que X_n est orthogonal pour B à tout élément de $\mathfrak{h}$, donc est nul par l'assertion (3). Donc $\operatorname{ad} X = \operatorname{ad} X_s$ est semi-simple. □

Donnons une construction d'une sous-algèbre de Lie nilpotente égale à son normalisateur, qui est valable même lorsque $\mathfrak{g}$ n'est pas supposée semi-simple. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, notons

$$\mathfrak{g}^0(x) = \{y \in \mathfrak{g} \ : \ \exists\, k \in \mathbb{N}, \ \ (\operatorname{ad} x)^k y = 0\} \ = \ \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker (\operatorname{ad} x)^k$$

le sous-espace caractéristique de $\operatorname{ad} x$ dans $\mathfrak{g}$ pour la valeur propre 0, appelé le *nilespace* de $\operatorname{ad} x$ dans $\mathfrak{g}$. Par la formule ($\cdot$ 10 $\cdot$), le sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}^0(x)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Un élément x de $\mathfrak{g}$ est dit *régulier* si

$$\dim \mathfrak{g}^0(x) = \min_{y \in \mathfrak{g}} \ \dim \mathfrak{g}^0(y) \ .$$

L'existence d'une sous-algèbre de Lie nilpotente égale à son normalisateur découle alors de l'existence (immédiate) d'éléments réguliers et de la proposition suivante.

Proposition 1.31 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif de caractéristique nulle K. Pour tout élément régulier x de $\mathfrak{g}$, la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}^0(x)$ est nilpotente, égale à son normalisateur. L'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$ est un ouvert dense de $\mathfrak{g}$ si $K = \mathbb{R}$, et un ouvert dense connexe de $\mathfrak{g}$ si $K = \mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit x un élément régulier de $\mathfrak{g}$, notons $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$ et $r \geq 1$ la dimension de $\mathfrak{h}$.

Montrons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est nilpotente. Par le théorème d'Engel 1.18, il suffit de montrer que l'endomorphisme $\operatorname{ad} y$ de $\mathfrak{h}$ est nilpotent pour tout $y \in \mathfrak{h}$.

Fixons une base de $\mathfrak{h}$, et complétons-la en une base de $\mathfrak{g}$. Pour tout $y \in \mathfrak{h}$, notons $P_y = P_y(t)$ le polynôme caractéristique de $\operatorname{ad} y$ et $m_y \geq r$ la dimension du nilespace $\mathfrak{g}^0(y)$, c'est-à-dire la multiplicité de la valeur propre 0 de $\operatorname{ad} y$. Alors $P_y(t)$ est de degré la dimension de $\mathfrak{g}$, et il est divisible par t^{m_y} donc par t^r. Puisque $\mathfrak{h}$ est stable par $\operatorname{ad} y$, le polynôme P_y est un produit $P'_y P''_y$ avec P'_y le polynôme caractéristique de la restriction de $\operatorname{ad} y$ à $\mathfrak{h}$. Puisque $(u, v) \mapsto \operatorname{ad} u\,(v) = [u, v]$ est bilinéaire, les coefficients de P'_y et P''_y sont des polynômes en les coordonnées de y. Puisque P''_x n'admet pas 0 comme racine, le terme constant de P''_y est un polynôme non nul en les coordonnées de y. Pour tout $i < r$, le coefficient de t^i dans $P'_y P''_y$ est le polynôme nul en les coordonnées de y. Par récurrence sur i tant que $i < r$, le coefficient de t^i dans P'_y est aussi le polynôme nul en les coordonnées de

y. Comme P'_y est unitaire et de degré r, nous avons donc $P'_y(t) = t^r$. Donc l'endomorphisme $\operatorname{ad} y : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ est nilpotent, ce qu'il fallait démontrer.

Montrons que le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathfrak{h}$. Si $z \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, alors $[x, z] \in \mathfrak{h}$, donc $(\operatorname{ad} x)^{n+1} z = (\operatorname{ad} x)^n [x, z] = 0$ pour n assez grand, donc $z \in \mathfrak{g}^0(x) = \mathfrak{h}$, ce qui montre le résultat.

Nous renvoyons à [Bou4, Hel] pour la démonstration des autres assertions. □

Si $K = \mathbb{C}$, l'unicité modulo automorphismes intérieurs des sous-algèbres de Cartan implique que toute sous-algèbre de Cartan est le nilespace $\mathfrak{g}^0(x)$ d'un élément régulier x de $\mathfrak{g}$.

1.3.7 Système de racines d'une algèbre de Lie complexe semi-simple

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, qui est semi-simple. Soient B sa forme de Killing et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, supposée déployée (ce qui est toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Pour tout élément α du dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$, posons

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \ : \ \forall\, H \in \mathfrak{h}, \ \ \operatorname{ad} H(x) = \alpha(H) x\} \ .$$

En particulier, par la proposition 1.22, nous avons

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \ .$$

Par la formule de Jacobi, nous avons

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \ . \tag{$\cdot\, 12\, \cdot$}$$

Appelons *racine* de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ tout élément $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\alpha \neq 0$ et $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$, et *espace de racine* de α le sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}_\alpha$. Notons Φ l'ensemble des racines de $\mathfrak{h}$. Par la formule précédente, si $\alpha, \beta \in \Phi$ et $\alpha + \beta \notin \Phi \cup \{0\}$, alors $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$; de plus $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$.

Puisque les endomorphismes $\operatorname{ad} X$ pour $X \in \mathfrak{h}$ sont diagonalisables, et commutent entre eux par la formule de Jacobi, ils sont simultanément diagonalisables, et les valeurs propres de $\operatorname{ad} X$ dépendent linéairement de X. Nous avons donc une décomposition en somme directe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \ ,$$

appelée *décomposition en espaces de racine.*

Par exemple, il découle de la formule $(\cdot\, 8\, \cdot)$ que les racines de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, relativement à la sous-algèbre de Cartan (déployée) $\mathfrak{h}$ des matrices diagonales, sont les formes linéaires

$$\alpha_{i,\,j} : H = (H_{i,\,j})_{1 \leq i,\, j \leq n} \mapsto H_{i,\,i} - H_{j,\,j}$$

pour $1 \leq i \neq j \leq n$, d'espace de racine $\mathbb{K} E_{i,\,j}$, où $(E_{i,\,j})_{1 \leq i,\, j \leq q}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La décomposition en espaces de racine correspondante est donc

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbb{K} E_{i,\,j} \ .$$

Lemme 1.32 *(1) Pour tous les $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$ tels que $\alpha+\beta \neq 0$, les sous-espaces vectoriels $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_\beta$ sont orthogonaux pour la forme de Killing.*

(2) Si $\alpha \in \Phi$, alors $-\alpha \in \Phi$.

(3) Les restrictions de B à $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ et à $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ pour tout $\alpha \in \Phi$ sont non dégénérées.

(4) L'espace vectoriel dual $\mathfrak{h}^*$ est engendré par Φ.

Démonstration. (1) Soient $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_\beta$ et $H \in \mathfrak{h}$ tels que $(\alpha+\beta)(H) \neq 0$. Puisque B est ad-alternée, nous avons

$$0 = B([H,x],y) + B(x,[H,y]) = \alpha(H)B(x,y) + \beta(H)B(x,y) = B(x,y)\ (\alpha+\beta)(H)\ .$$

Donc x et y sont orthogonaux.

(2)-(3) Puisque $\mathfrak{h}$ est orthogonal à $\mathfrak{g}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Phi$, si $x \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$, alors x est orthogonal à $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$, donc nul car B est non dégénérée. D'où $B_{|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ est non dégénérée.

De même, pour tout $\alpha \in \Phi$, si $x \in \mathfrak{g}_\alpha - \{0\}$ est orthogonal à $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ (par exemple si $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \{0\}$), alors x est orthogonal à $\mathfrak{g}$, donc nul, contradiction. Le résultat en découle.

(4) Sinon, il existe $H \in \mathfrak{h}$ non nul tel que $\alpha(H) = 0$ pour tout $\alpha \in \Phi$. Mais alors H appartient au centre de $\mathfrak{g}$, qui est nul car $\mathfrak{g}$ est semi-simple. □

L'application bilinéaire symétrique B, étant non dégénérée sur $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$, induit un isomorphisme linéaire de $\mathfrak{h}^*$ dans $\mathfrak{h}$, que nous noterons $\alpha \mapsto h'_\alpha$: étant donné $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, le vecteur h'_α est l'unique élément de $\mathfrak{h}$ tel que $B(h'_\alpha, H) = \alpha(H)$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$.

Lemme 1.33 *Soit $\alpha \in \Phi$.*

(i) Pour tous les $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, nous avons

$$[x,y] = B(x,y)\, h'_\alpha\ ,$$

et en particulier $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ est de dimension 1, engendré par h'_α.

(ii) Nous avons $\alpha(h'_\alpha) = B(h'_\alpha, h'_\alpha) \neq 0$.

(iii) La dimension de $\mathfrak{g}_\alpha$ est 1 et si $n \in \mathbb{Z}$ et $n\alpha \in \Phi$, alors $n = \pm 1$.

Démonstration. (i) Nous avons vu que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ est contenu dans $\mathfrak{h}$. Pour tout $H \in \mathfrak{h}$, nous avons $B(H,[x,y]) = B([H,x],y) = \alpha(H)B(x,y)$. Par définition de h'_α, l'égalité cherchée en découle. Comme B n'est pas identiquement nulle sur $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ par le lemme 1.32 (3), la seconde assertion de (i) en découle

(ii) Par (i), soient $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tels que $[x,y] = h'_\alpha$. Pour toute racine β, considérons le sous-espace vectoriel $E = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\ \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$. Il est invariant par $\operatorname{ad} x$ et $\operatorname{ad} y$, d'après la formule centrée ($\cdot 12 \cdot$). La trace de $\operatorname{ad} h'_\alpha = [\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y]$ sur E, qui est égale à $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\beta+n\alpha)(h'_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$, est nulle. Si nous avions $\alpha(h'_\alpha) = 0$, ceci impliquerait que $\beta(h'_\alpha) = 0$, pour toute racine β. Ceci contredit l'assertion (4) du lemme 1.32.

(iii) Avec x et y comme ci-dessus, considérons cette fois-ci le sous-espace vectoriel $E' = \mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}h'_\alpha \oplus_{n\geq 1} \mathfrak{g}_{-n\alpha}$. Il est invariant par $\operatorname{ad} x$ et $\operatorname{ad} y$, par l'assertion (i). La trace de $\operatorname{ad} h'_\alpha = [\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y]$ sur E', qui est $\alpha(h'_\alpha) + \sum_{n\geq 1}(-n\alpha)(h'_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{-n\alpha}$, est nulle. Puisque $\alpha(h'_\alpha) \neq 0$ par (ii), nous avons donc $\dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$ et $\dim \mathfrak{g}_{-n\alpha} = 0$ si $n \geq 2$. Le résultat en découle. □

Pour tout $\alpha \in \Phi$, notons e_α un vecteur non nul de $\mathfrak{g}_\alpha$. Posons $h_\alpha = \frac{2h'_\alpha}{B(h'_\alpha, h'_\alpha)}$, qui existe par le lemme 1.33 (ii). Notons f_α l'unique élément de $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que $[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha$, qui existe par le lemme 1.33 (i) et le fait que $B(x,y) \neq 0$ si $x \in \mathfrak{g}_\alpha - \{0\}$ et $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} - \{0\}$, dont l'unicité découle de l'assertion (iii) de ce lemme.

Lemme 1.34 *Pour tout $\alpha \in \Phi$, le triplet $(e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha)$ de $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet.*

Démonstration. Nous avons $[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha$ par construction de f_α. Puisque $\alpha(h_\alpha) = 2$ par le lemme 1.33 (ii) et puisque $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, nous avons $[h_\alpha, e_\alpha] = \alpha(h_\alpha)e_\alpha = 2e_\alpha$ et $[h_\alpha, f_\alpha] = -\alpha(h_\alpha)f_\alpha = -2f_\alpha$. □

Notons $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{R}\ \alpha$ le sous-espace vectoriel réel de $\mathfrak{h}^*$ engendré par les racines, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{R}\ h'_\alpha$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{h}$ correspondant, et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ déduite de B par dualité, c'est-à-dire définie par

$$\forall\ \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}, \quad \langle\alpha, \beta\rangle = B(h'_\alpha, h'_\beta) = \alpha(h'_\beta) = \beta(h'_\alpha)\ .$$

Proposition 1.35 *La forme bilinéaire symétrique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive sur $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, et Φ est un système de racines réduit de l'espace euclidien $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$. De plus, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que la restriction de B à $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{R}\ h'_\alpha$ est positive.

Pour tout $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, puisque l'endomorphisme $\operatorname{ad} H$ de $\mathfrak{g}$ est diagonal par blocs dans la décomposition de $\mathfrak{g}$ en espaces de racine, valant la multiplication par $\alpha(X)$ sur l'espace de racine $\mathfrak{g}_\alpha$ (de dimension 1), et par définition de h'_α, nous avons

$$B(H, H) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} H \circ \operatorname{ad} H) = \sum_{\alpha\in\Phi} \alpha(H)^2 = \sum_{\alpha\in\Phi} B(h'_\alpha, H)^2\ .$$

Il suffit donc de montrer que $B(h'_\alpha, h'_\beta)$ est réel pour tous les $\alpha, \beta \in \Phi$. Ceci est immédiat si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, supposons donc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Or par les définitions de h'_α et h_α, et par le lemme 1.33 (ii), nous avons

$$B(h'_\beta, h'_\alpha) = \beta(h'_\alpha) = \frac{1}{2}\alpha(h'_\alpha)\beta(h_\alpha)\ .$$

Puisque $(e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha)$ est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet, par le corollaire 1.9 appliqué à la représentation adjointe ad de $\mathfrak{g}$, les valeurs propres $\beta(h_\alpha)$ de $\operatorname{ad} h_\alpha$ sont entières. Il suffit donc de montrer que $\alpha(h'_\alpha)$ est réel, ce qui découle du calcul

$$\begin{aligned}\alpha(h'_\alpha) = B(h'_\alpha, h'_\alpha) &= \frac{1}{4}\alpha(h'_\alpha)^2 B(h_\alpha, h_\alpha) = \frac{1}{4}\alpha(h'_\alpha)^2 \sum_{\alpha\in\Phi} B(h'_\alpha, h_\alpha)^2 \\ &= \frac{1}{4}\alpha(h'_\alpha)^2 \sum_{\beta\in\Phi} \beta(h_\alpha)^2\ .\end{aligned}$$

Puisque B est non dégénérée sur $\mathfrak{h}$ par le lemme 1.32 (3), nous déduisons de l'affirmation du début de cette démonstration que B est définie positive sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Ceci montre la première affirmation de la proposition 1.35 par dualité. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}$ par le lemme 1.32 (4). Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors B est définie négative sur $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Donc $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cap i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \{0\}$, et puisque que Φ engendre $\mathfrak{h}^*$ par le lemme 1.32 (4), nous avons $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

Montrons maintenant que Φ est un système de racines réduit de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, qui est bien un espace vectoriel euclidien pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$ par ce qui précède, engendré par Φ par définition.

Soient α et β dans Φ, notons $p = 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \beta(h_\alpha)$. Par les axiomes (R2) et (R3) d'un système de racines, il s'agit de vérifier que $p \in \mathbb{Z}$ et $\beta - p\alpha \in \Phi$. Par le lemme 1.32 (2),

quitte à remplacer β par $-\beta$, nous pouvons supposer que $p \geq 0$. Notons $\mathfrak{s}_\alpha$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ engendrée par $e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha$. Alors $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$, muni de la restriction à $\mathfrak{s}_\alpha$ de la représentation adjointe ad, est un $\mathfrak{s}_\alpha$-module, car $\operatorname{ad} e_\alpha(\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}) \subset \mathfrak{g}_{\beta+(n+1)\alpha}$, $\operatorname{ad} f_\alpha(\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}) \subset \mathfrak{g}_{\beta+(n-1)\alpha}$ et $\operatorname{ad} h_\alpha(\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}) \subset \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$ par la formule $(\cdot\, 12\, \cdot)$. Par le corollaire 1.9, les valeurs propres de $(\operatorname{ad} h_\alpha)_{|V}$ sont entières et symétriques par rapport à l'origine. Donc $p = \beta(h_\alpha)$ est entier et $-p$ est une des valeurs propres de $(\operatorname{ad} h_\alpha)_{|V}$, qui sont parmi les $\beta(h_\alpha) + n\alpha(h_\alpha) = p + 2n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Donc $\mathfrak{g}_{\beta-p\alpha}$ est non nul, ce qui signifie que $\beta - p\alpha$ est bien une racine.

Le système de racines Φ est réduit par le lemme 1.33 (iii). □

Le système de racines Φ sera appelé le *système de racines de* $\mathfrak{g}$ (relativement à $\mathfrak{h}$). Par le théorème 1.27, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il ne dépend pas du choix de $\mathfrak{h}$, à automorphisme intérieur près de $\mathfrak{g}$. Par la décomposition en espaces de racines et les formules de crochet $(\cdot\, 12\, \cdot)$, il est immédiat que $\mathfrak{g}$ est simple si et seulement si son système de racines est irréductible.

Exercice E.10 *(1) Montrer que les algèbres de Lie complexes suivantes sont semi-simples, et que leur système de racines est de type indiqué dans la colonne du milieu, donc que ces algèbres de Lie sont simples*

$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$	A_n	$n \geq 1$
$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$	B_n	$n \geq 2$
$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$	C_n	$n \geq 3$
$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$	D_n	$n \geq 4$

(2) Montrer l'existence d'isomorphismes d'algèbres de Lie, dits accidentels

$$\mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sp}_1(\mathbb{C}) \ ,$$

$$\mathfrak{so}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \ ,$$

$$\mathfrak{so}_5(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C}) \ ,$$

$$\mathfrak{so}_6(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C}) \ .$$

Le théorème de classification des algèbres de Lie complexes semi-simples par leur système de racines est le suivant. Nous renvoyons par exemple à [Ser1, Bou1] et [Kna, Chap. II, §9] pour une démonstration de ce résultat.

Théorème 1.36 *(1) Pour tout système de racines réduit Φ, il existe une algèbre de Lie complexe semi-simple de système de racines isomorphe à Φ, unique à isomorphisme près.*

(2) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe semi-simple, de système de racines Φ. Soit $(n_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\Pi}$ la matrice de Cartan de Φ relativement à une base Π de Φ. Pour tout $\alpha \in \Pi$, soient $e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha$ comme ci-dessus. Alors $\mathfrak{g}$ est définie par les générateurs $e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha$ où $\alpha \in \Pi$ et les relations suivantes, où α, β parcourent les éléments de Π :

- $[h_\alpha, h_\beta] = 0$,
- $[e_\alpha, f_\beta] = h_\alpha$ *si* $\alpha = \beta$, *et* $[e_\alpha, f_\beta] = 0$ *sinon,*
- $[h_\alpha, e_\beta] = n_{\alpha,\beta}\, e_\beta$,
- $[h_\alpha, f_\beta] = -n_{\alpha,\beta}\, f_\beta$,
- $(\operatorname{ad} e_\alpha)^{1-n_{\alpha,\beta}}(e_\beta) = 0$ *si* $\alpha \neq \beta$,
- $(\operatorname{ad} f_\alpha)^{1-n_{\alpha,\beta}}(f_\beta) = 0$ *si* $\alpha \neq \beta$. □

Rappelons que $n_{\alpha,\beta} \leq 0$ si α et β sont deux éléments distincts de la base Π. Les deux dernières relations ci-dessus, appelées les *relations de Serre*, sont donc bien définies.

Puisque $\mathfrak{g}$ est simple si et seulement si son système de racines est irréductible, la classification à isomorphisme près des systèmes de racines réduits irréductibles donne une classification à isomorphisme près des algèbres de Lie complexes (de dimension finie) semi-simples : toute telle algèbre de Lie est isomorphe à un produit fini d'algèbres de Lie simples de type $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4$ ou G_2. En particulier, toute algèbre de Lie complexe simple de dimension finie assez grande est isomorphe à $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ ou $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ pour un n dans $\mathbb{N}$.

1.4 Correspondance entre algèbres de Lie et groupes de Lie

Le but de cette partie 1.4 est de donner une bijection naturelle entre l'ensemble des classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie (réelles ou complexes) de dimension finie et l'ensemble des groupes de Lie (réels ou complexes) connexes modulo revêtements.

1.4.1 Application exponentielle

Soit G un groupe de Lie, d'élément neutre e, et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

Étudions tout d'abord les propriétés de l'intégration des champs de vecteurs invariants à gauche. Rappelons qu'un champ de vecteurs X de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) sur une variété M de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) est *complet* si son flot local ϕ est défini sur $\mathbb{R} \times M$. Ceci implique que $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre C^∞ de difféomorphismes C^∞ (respectivement analytiques complexes) de M. Un critère nécessaire et suffisant (laissé en exercice, voir par exemple [Pau2]) pour que X soit complet est qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout x dans M, il existe un voisinage ouvert U_x de x tel que le flot local de X soit défini sur $]-\epsilon, \epsilon[\times U_x$.

Proposition 1.37 *Soient G un groupe de Lie réel (respectivement complexe) et $\overline{X}$ un champ de vecteurs invariant à gauche sur G. Alors $\overline{X}$ est de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) et il est complet. De plus, si $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot de $\overline{X}$, alors pour tous les t dans $\mathbb{R}$ et g, g' dans G, nous avons*

$$\phi_t(gg') = g\phi_t(g') \ .$$

Démonstration. La régularité de $\overline{X}$, qui a déjà été vue, découle du fait que $\overline{X}(x) = T_eL_x(\overline{X}(e))$ pour tout x dans G. Soient $x, g \in G$. Notons (ϕ_t) le flot local de $\overline{X}$. Considérons l'application $y : t \mapsto g\phi_t(x)$. Alors $y(0) = gx$ et

$$\begin{aligned}\dot{y} &= T_{\phi_t(x)}L_g\big(\frac{d}{dt}\phi_t(x)\big) = T_{\phi_t(x)}L_g\big(\overline{X}(\phi_t(x))\big) = T_{\phi_t(x)}L_g \circ T_eL_{\phi_t(x)}(\overline{X}(e)) \\ &= T_eL_{g\phi_t(x)}(\overline{X}(e)) = \overline{X}(y) \ .\end{aligned}$$

Par la propriété d'unicité du flot local de $\overline{X}$, le point $\phi_t(gx)$ est donc défini si et seulement si $\phi_t(x)$ l'est, et sur son ensemble de définition, nous avons

$$\phi_t(gx) = g\phi_t(x) \ .$$

D'après le théorème d'existence du flot local, il existe $\epsilon > 0$ et un voisinage ouvert U de e tel que $\phi_t(x)$ soit défini pour (t, x) dans $]-\epsilon, \epsilon[\times U$. Donc $\phi_t(x)$ est défini pour (t, x) dans

$]-\epsilon, \epsilon[\times gU$, pour tout g dans G. Par le rappel précédant l'énoncé de la proposition 1.37, $\overline{X}$ est donc complet. D'après ce qui précède, nous avons bien $\phi_t(gg') = g\phi_t(g')$ pour tous les t dans $\mathbb{R}$ et g, g' dans G. $\square$

Le flot des champs de vecteurs invariants à gauche permet de définir une application canonique cruciale sur l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, à valeurs dans ce groupe de Lie.

Appelons *application exponentielle* du groupe de Lie G, et notons

$$\exp = \exp_G : \mathfrak{g} \to G$$

l'application définie par $X \mapsto \exp\ X = \phi_1(e)$, où $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot du champ de vecteurs invariant à gauche $\overline{X}$ associé à X.

Notons que comme un champ de vecteurs invariant à gauche est complet, le temps 1 de son flot est bien défini. Les exemples ci-dessous expliquent l'origine de cette terminologie.

Exemples. (1) Si G est le groupe de Lie réel abélien $\mathbb{U} = \mathbb{S}_1 = \{e^{i\theta}\ :\ \theta \in \mathbb{R}\}$, d'élément neutre 1, alors l'espace tangent $T_{e^{i\theta}}\mathbb{S}_1$ en un point $e^{i\theta}$ de la sous-variété $\mathbb{S}_1$ est le sous-espace vectoriel $ie^{i\theta}\mathbb{R}$ du plan réel $\mathbb{C}$. Un élément X de l'algèbre de Lie de G est donc de la forme $X = ix$ pour x dans $\mathbb{R}$. Le champ de vecteurs invariant à gauche associé à X est l'application $\overline{X} : e^{i\theta} \mapsto \overline{X}(e^{i\theta}) = ixe^{i\theta}$. Soit $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot de ce champ de vecteurs (défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$). Alors l'application $t \mapsto \phi_t(1)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est l'unique solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\phi_t(1) = ix\,\phi_t(1)$$

avec condition initiale $\phi_0(1) = 1$. Donc $\phi_t(1) = e^{ixt}$ et

$$\exp X = e^X\ .$$

Donc l'application exponentielle du groupe de Lie $\mathbb{S}_1$, dont l'algèbre de Lie est identifiée comme ci-dessus avec la droite des nombres complexes imaginaires purs, coïncide avec l'exponentielle des nombres complexes.

(2) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit G le groupe de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, d'élément neutre I_n, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ son algèbre de Lie. Comme la multiplication à gauche par un élément de G est un endomorphisme linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, le champ de vecteurs invariant à gauche associé à X est

$$g \mapsto X(g) = gX\ ,$$

où gX est la multiplication des matrices g et X. Soit $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot de ce champ de vecteurs (défini sur $\mathbb{R} \times G$). Alors l'application $t \mapsto \phi_t(I_n)$ de $\mathbb{R}$ dans G est l'unique solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\phi_t(I_n) = \phi_t(I_n)X$$

avec condition initiale $\phi_0(I_n) = I_n$. Donc $\phi_t(\mathrm{Id}) = e^{tX} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}X^k$ et

$$\exp X = e^X\ .$$

Donc l'application exponentielle du groupe de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, coïncide avec l'application exponentielle des matrices.

(3) Si V est un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, on montre de même que l'application exponentielle du groupe de Lie $\mathrm{GL}(V)$, définie sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ et à valeurs dans $\mathrm{GL}(V)$, coïncide avec l'application exponentielle des endomorphismes.

Propriétés. (1) Par un changement de variable sur le temps dans l'équation différentielle définissant le flot local, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, si $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot du champ de vecteurs invariant à gauche associé à X, alors

$$\exp\ tX = \phi_t(e)\ .$$

(2) Par les propriétés de régularité du flot local, l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est de classe C^∞ (et même analytique réelle si G est un groupe de Lie réel muni de sa structure de variété analytique réelle canonique, voir le théorème 1.1, et analytique complexe si G est un groupe de Lie complexe).

(3) La différentielle en 0 de l'application exponentielle de G est l'application identité de $\mathfrak{g}$.

En effet, en identifiant avec $\mathfrak{g}$ l'espace tangent en tout point de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, nous avons, pour tout $X \in \mathfrak{g}$,

$$T_0 \exp(X) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp(0 + tX) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi_t(e) = \overline{X}(\phi_0(e)) = X\ .$$

(4) Par le théorème d'inversion locale, on en déduit que l'application exponentielle est un C^∞-difféomorphisme local en 0 (et même analytique réel si G est muni de sa structure de variété analytique réelle canonique, et analytique complexe si G est un groupe de Lie complexe).

En particulier, si G est connexe, alors $\exp(\mathfrak{g})$, qui contient un voisinage de l'identité, engendre G, par la proposition 1.3. Mais on prendra garde que l'application exponentielle n'est pas toujours surjective, comme par exemple dans le cas de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

(5) Un *sous-groupe à un paramètre réel de* G est un morphisme de groupes de Lie réels $t \mapsto \gamma_t$ de $\mathbb{R}$ dans G (ou dans le groupe de Lie réel sous-jacent à G lorsque G est complexe) souvent noté $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Par exemple, le morphisme trivial $t \mapsto e$ est un sous-groupe à un paramètre. Notons $SG_1(G)$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de G. Alors l'application de $SG_1(G)$ dans $\mathfrak{g}$ définie par

$$\theta : (\gamma_t)_{t\in\mathbb{R}} \mapsto \frac{d}{dt}_{|t=0} \gamma_t$$

est une bijection, d'inverse

$$\theta' : X \mapsto (\exp\ tX)_{t\in\mathbb{R}}\ .$$

En effet, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, par la propriété (1), le flot $(\exp\ tX)_{t\in\mathbb{R}}$ est un sous-groupe à un paramètre, et il est clair que $\theta \circ \theta'$ vaut l'identité de $\mathfrak{g}$. Réciproquement, soient $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un sous-groupe à un paramètre de G, $X = \frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma_t \in \mathfrak{g}$ et $\overline{X}$ le champ de vecteurs invariant à gauche associé à X. En particulier, $\gamma_0 = e$. De plus, pour tout $s_0 \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{ds}_{|s=s_0} \gamma_s = \frac{d}{dt}_{|t=0} \gamma_{s_0+t} = \frac{d}{dt}_{|t=0} \gamma_{s_0}\gamma_t = T_e L_{\gamma_{s_0}}(X) = \overline{X}(\gamma_{s_0})\ .$$

La propriété (1) et le théorème d'unicité des courbes intégrales d'un champ de vecteurs montrent donc que les applications $t \mapsto \gamma_t$ et $t \mapsto \exp\ tX$ coïncident.

L'exemple du groupe de Lie quotient $G = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, où $n \geq 1$, montre qu'un sous-groupe à un paramètre de G, même non trivial, n'est pas forcément injectif. Par ailleurs, son image n'est pas forcément une sous-variété de G, il existe par exemple des sous-groupes à un paramètre (non surjectifs) d'image dense dans $G = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ pour $n \geq 2$.

(6) Soient H un groupe de Lie et $f : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie. Alors, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, nous avons

$$f(\exp_G(X)) = \exp_H(T_e f(X)) \ .$$

En effet, l'application $t \mapsto f(\exp_G(tX))$ est un sous-groupe à un paramètre de H, dont la dérivée en $t = 0$ est $T_e f(X)$, et on conclut par la propriété (5).

Exemples. a) Pour tout g dans G, la conjugaison $i_g : G \to G$ définie par $h \mapsto ghg^{-1}$ est un morphisme de groupes de Lie, d'application tangente en e égale à Ad g par définition. Donc, pour tout X dans $\mathfrak{g}$,

$$\exp(\mathrm{Ad}\ g\ (X)) = g\,(\exp\ X)\,g^{-1} \ .$$

b) Comme l'application $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est un morphisme de groupes de Lie, dont l'application tangente en l'identité est ad, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, et puisque l'exponentielle du groupe de Lie $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est l'exponentielle des endomorphismes de $\mathfrak{g}$, nous avons

$$\mathrm{Ad}(\exp\ X) = e^{\mathrm{ad}\ X} \ .$$

c) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, comme l'application déterminant $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupes de Lie, dont la différentielle en l'élément neutre I_n est l'application trace $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, nous avons

$$\forall\ X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(e^X) = e^{\mathrm{tr}(X)} \ .$$

d) Si H est un sous-groupe de Lie immergé de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ (identifiée avec son image dans $\mathfrak{g}$), alors

$$\exp_H = \exp_{G\ |\mathfrak{h}} \ .$$

Il suffit en effet d'appliquer la formule de la propriété (6) à l'immersion injective $i : H \to G$, car $T_e i$ est alors l'inclusion $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$. En particulier, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si G est un sous-groupe de Lie plongé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors l'exponentielle de G est la restriction à la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ de l'exponentielle des matrices de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(7) Pour tous les X et Y dans $\mathfrak{g}$, si $[X, Y] = 0$, alors

$$\exp(X + Y) = \exp\ X\ \exp\ Y \ .$$

On fera bien attention que cette formule n'est en général pas vraie sans l'hypothèse $[X, Y] = 0$. Pour s'en persuader, trouver un contre-exemple pour $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, et montrer que si la formule précédente est vraie pour tous les X, Y dans l'algèbre de Lie de G, alors la composante neutre de G est un groupe de Lie abélien.

Pour démontrer cette formule, remarquons que, pour tout s fixé dans $\mathbb{R}$, l'application

$$t \mapsto \exp(sX)\ \exp(tY)\ \exp(-sX)$$

est un sous-groupe à un paramètre, dont la dérivée en $t = 0$ est

$$\mathrm{Ad}(\exp\ sX)(Y) = e^{\mathrm{ad}\ sX}(Y) = Y$$

car ad $X(Y) = [X, Y] = 0$. Donc, par unicité,

$$\exp(sX)\ \exp(tY)\ \exp(-sX) = \exp(tY)\ .$$

Donc l'application $t \mapsto \exp(tX)\ \exp(tY)$ est un sous-groupe à un paramètre de G, dont la dérivée en $t = 0$ est $X + Y$. Encore une fois par unicité, nous avons $\exp(tX)\ \exp(tY) = \exp(t(X + Y))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et en particulier pour $t = 1$, ce qui montre le résultat.

(8) Calculons l'application tangente de l'application exponentielle.

Proposition 1.38 *Pour tout X dans $\mathfrak{g}$, l'application tangente $T_X \exp : \mathfrak{g} \to T_{\exp X} G$ en X de l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est donnée par la formule suivante :*

$$T_X \exp = T_e L_{\exp X} \circ \left(\frac{e^{\mathrm{ad}(-X)} - \mathrm{id}}{\mathrm{ad}(-X)} \right)\ .$$

Avant de montrer cette formule, notons que l'application $\Theta : z \mapsto \frac{e^z - 1}{z}$ si $z \neq 0$ et $0 \mapsto 1$ est analytique complexe sur $\mathbb{C}$, car elle coïncide avec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}$. Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, nous noterons comme d'habitude $\Theta(f)$ (ou par abus $\frac{e^f - \mathrm{id}}{f}$) la valeur de la série convergente d'endomorphismes obtenue par substitution de z par f. Pour tous les g, h dans G et v dans $T_h G$, notons par abus

$$g \cdot v = T_h L_g(v) \in T_{gh} G\ ,$$

et

$$v \cdot g = T_h R_{g^{-1}}(v) \in T_{hg} G\ .$$

Avec ces notations, notons que par définition Ad $g\ (Z) = g \cdot Z \cdot g^{-1}$ (l'absence de parenthésage vient du fait que L_g et R_g commutent).

Démonstration. Soit $X \in \mathfrak{g}$. Il revient au même de montrer que

$$(\exp\ -X) \cdot T_X \exp = \Theta(\mathrm{ad}(-X))\ .$$

Notons $f_X : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ l'application définie par

$$f_X : s \mapsto \left\{ Y \mapsto s\ (\exp(-sX)) \cdot T_{sX} \exp(Y) \right\}\ .$$

Soient $s, t \in \mathbb{R}$. En dérivant par rapport à X l'équation $\exp\,(s + t)X = \exp\ sX\ \exp\ tX$, on obtient, pour tout Y dans $\mathfrak{g}$,

$$(s + t) T_{(s+t)X} \exp\,(Y) = s(T_{sX} \exp\,(Y)) \cdot (\exp\ tX) + t(\exp\ sX) \cdot (T_{tX} \exp\,(Y))\ .$$

En se ramenant dans $\mathfrak{g}$ par $(\exp -(s + t)X) \cdot$, on obtient

$$f_X(s + t) = \mathrm{Ad}(\exp(-tX)) \circ f_X(s) + f_X(t) = e^{\mathrm{ad}(-tX)} \circ f_X(s) + f_X(t)\ .$$

En dérivant cette équation par rapport à t en $t = 0$, et comme $f'_X(0) = T_0 \exp = \mathrm{id}$, on obtient

$$f'_X(s) = \mathrm{id} - \mathrm{ad}\ X \circ f_X(s)\ .$$

Il est facile de vérifier que l'application $s \mapsto s\,\Theta(s\ \mathrm{ad}(-X))$ est aussi une solution de cette équation différentielle, dont la valeur en $s = 0$ est $0 = f_X(0)$. Par unicité, nous avons donc $f_X(s) = s\,\Theta(s\ \mathrm{ad}(-X))$. En prenant $s = 1$, le résultat en découle. □

Corollaire 1.39 *L'application exponentielle est un difféomorphisme local* C^∞ *(respectivement analytique complexe) en* $X \in \mathfrak{g}$ *si et seulement si les valeurs propres de l'endomorphisme* $\operatorname{ad} X$ *de* $\mathfrak{g}$ *appartiennent à* $(\mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z}) \cup \{0\}$.

Démonstration. Par le théorème d'inversion locale, exp est un difféomorphisme local C^∞ (respectivement analytique complexe) en X si et seulement si $T_X \exp$ est un isomorphisme linéaire. Par la proposition précédente, ceci équivaut au fait que $\Theta(-\operatorname{ad} X)$ n'ait pas 0 comme valeur propre. Or si λ est une valeur propre de $\operatorname{ad} X$ associée au vecteur propre Y_λ, alors $\Theta(-\lambda)$ est une valeur propre de $\Theta(-\operatorname{ad} X)$ associée au vecteur propre Y_λ. Donc si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les valeurs propres de $\operatorname{ad} X$, alors $\Theta(-\lambda_1), \ldots, \Theta(-\lambda_k)$ sont celles de $\Theta(-\operatorname{ad} X)$. Or $\Theta(z)$ est nul si et seulement si z appartient à $2i\pi\mathbb{Z} - \{0\}$. Le résultat en découle. □

Exercice E.11 *Soient* X, Y *deux éléments de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *d'un groupe de Lie* G*, et* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *l'application exponentielle de* G.

(1) Montrer que $\frac{d}{dt}_{|t=0} \exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY) = 0$.

(2) Montrer que $[X, Y] = \frac{d}{dt}_{|t=0^+} \exp(\sqrt{t}\,X)\exp(\sqrt{t}\,Y)\exp(-\sqrt{t}\,X)\exp(-\sqrt{t}\,Y)$.

1.4.2 Correspondance entre sous-algèbres de Lie et sous-groupes de Lie

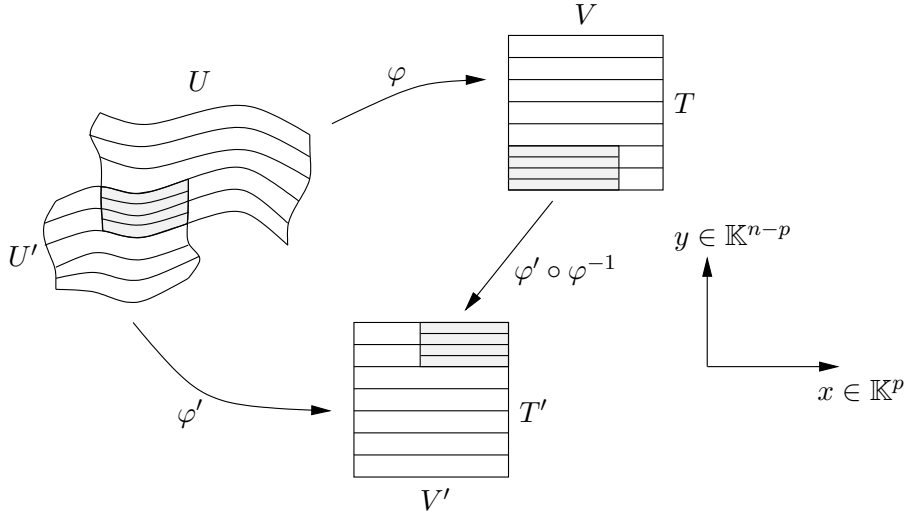
Les techniques de cette partie reposent sur le théorème de Frobenius suivant, pour lequel nous renvoyons à [Die2, Pau2].

Soient M une variété C^∞ (respectivement analytique complexe) de dimension n et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$.

Un *atlas de cartes feuilletées* C^∞ (respectivement analytique complexe) de dimension p sur M est un sous-atlas de cartes $\mathscr{A}$ de l'atlas de cartes de M, tel que, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$),

- pour chaque carte (U, φ) de $\mathscr{A}$, nous avons $\varphi(U) = V \times T$ où V est un ouvert de $\mathbb{K}^p$ et T un ouvert de $\mathbb{K}^{n-p}$,
- pour toutes les cartes $\varphi : U \to V \times T$ et $\varphi' : U' \to V' \times T'$ dans $\mathscr{A}$, le changement de cartes est localement de la forme

$$(x, y) \mapsto (a(x, y), b(y)) \ .$$



En appelant *horizontale* tout sous-espace affine de $\mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^{n-p}$ parallèle à $\mathbb{K}^p \times \{0\}$, cette dernière condition est équivalente à demander à ce que localement ce changement de carte préserve les horizontales (envoie deux points d'une même horizontale sur deux points d'une même horizontale).

Un *feuilletage* $\mathscr{F}$ de M de classe C^∞ (respectivement analytique complexe), de dimension p et de codimension $n-p$, est un atlas de cartes feuilletées C^∞ (respectivement analytique complexe) de dimension p sur M, qui est maximal (pour l'inclusion). Une *variété feuilletée* de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) est une variété de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) munie d'un feuilletage de classe C^∞ (respectivement analytique complexe).

Si $\varphi : U \to V \times T$ est une carte locale dans $\mathscr{F}$, alors les sous-variétés $\varphi^{-1}(V \times \{y\})$ de U, pour $y \in T$, sont appelées les *feuilles locales* de $\mathscr{F}$ dans cette carte, et les sous-variétés $\varphi^{-1}(\{x\} \times T)$ de U, pour $x \in V$, sont appelées les *transversales locales* de $\mathscr{F}$ dans cette carte. Pour tout $x \in M$, la *feuille* $\mathscr{F}_x$ du feuilletage $\mathscr{F}$ passant par x est l'ensemble des points y de M tels qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to M$ de x à y tel que pour tout $t \in [0,1]$, pour toute carte feuilletée de $\mathscr{F}$ dont le domaine contienne $\gamma(t)$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\gamma([t-\epsilon, t+\epsilon] \cap [0,1])$ soit contenu dans une feuille locale de $\mathscr{F}$ dans cette carte. Par les propriétés des changements de cartes feuilletées, il est équivalent de demander que pour tout $t \in [0,1]$, il existe $\epsilon > 0$ et une carte feuilletée de $\mathscr{F}$ dont le domaine contienne $\gamma(t)$ tel que $\gamma([t-\epsilon, t+\epsilon] \cap [0,1])$ soit contenu dans une feuille locale de $\mathscr{F}$ dans cette carte.

Appelons *topologie des feuilles* sur $\mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^{n-p}$ la topologie produit de la topologie usuelle sur $\mathbb{K}^p$ et de la topologie discrète sur $\mathbb{K}^{n-p}$. Si $(M, \mathscr{F})$ est une variété feuilletée, par les propriétés des changements de cartes feuilletées, il existe une et une seule topologie sur M, appelée la *topologie des feuilles* de $(M, \mathscr{F})$, telle que toute carte feuilletée $\varphi : U \to V \times T$ de $\mathscr{F}$ soit un homéomorphisme pour les restrictions à U et à $V \times T$ des topologies des feuilles de M et de $\mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^{n-p}$. Par définition, les feuilles de $\mathscr{F}$ sont les composantes connexes par arcs (ou, de manière équivalente, les composantes connexes) de M pour la topologie des feuilles.

Si $(M, \mathscr{F})$ et $(M', \mathscr{F}')$ sont deux variétés feuilletées (toutes deux C^∞ ou toutes deux analytiques complexes), une application continue $f : M \to M'$ *préserve les feuilletages* si elle envoie toute feuille de $\mathscr{F}$ dans une feuille de $\mathscr{F}'$, ou, de manière équivalente, si pour toutes les cartes feuilletées $\varphi : U \to V \times T$ et $\varphi' : U' \to V' \times T'$ de respectivement $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ telles que $f(U) \subset U'$, l'application f lue dans ces cartes, c'est-à-dire l'application $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : V \times T \to V' \times T'$, soit de la forme

$$(x, y) \mapsto (a(x, y), b(y)) \ .$$

Une action par homéomorphismes d'un groupe Γ sur M *préserve le feuilletage* $\mathscr{F}$ si tout élément de Γ préserve le feuilletage $\mathscr{F}$.

Puisque c'est le cas pour chaque feuille locale, toute feuille ℓ d'une variété feuilletée $(M, \mathscr{F})$ est munie d'une unique structure de variété C^∞ (respectivement analytique complexe) telle que l'injection $i : \ell \to M$ soit une immersion C^∞ (respectivement analytique complexe) injective. Attention, ces immersions ne sont pas toujours des plongements, et les feuilles d'un feuilletage ne sont pas toujours des sous-variétés (car elles ne sont pas forcément localement fermées).

Par exemple, pour tout nombre réel irrationnel α, pour le feuilletage du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dont les feuilles sont les images des droites affines de pente α de $\mathbb{R}^2$ (voir la fin de la partie 1.4.3), les feuilles sont des sous-variétés immergées de dimension 1 qui sont denses, donc non localement fermées.

Comme toute variété immergée, toute feuille ℓ de $\mathscr{F}$ admet en tout point $x \in \ell$ un espace tangent $T_x\ell$, qui est un sous-espace vectoriel de T_xM.

Un *champ de p-plans* C^∞ (respectivement analytique complexe) sur M est la donnée, pour tout point x de M, d'un sous-espace vectoriel Δ_x de dimension p de T_xM, telle que, pour tout point x_0 de M, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et p champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_p$ sur U, de classe C^∞ (respectivement analytiques complexes), tels que, en tout point x de U, le p-uplet $(X_1(x), \ldots, X_p(x))$ soit une base de Δ_x (voir la remarque 2.8 pour une définition intrinsèque équivalente).

Un champ de p-plans Δ de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) est dit *intégrable* s'il existe un feuilletage $\mathscr{F}$ de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) et de dimension p sur M tel que $\Delta_x = T_x\mathscr{F}_x$ pour tout x dans M. Un tel feuilletage est unique, et est dit *intégrer* Δ. Un champ de vecteurs X *appartient à* Δ *en tout point* si pour tout point x de M, le vecteur tangent $X(x)$ appartient au sous-espace tangent Δ_x.

Théorème 1.40 (Théorème de Frobenius) *Un champ de p-plans Δ de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) sur M est intégrable si et seulement si pour pour tout ouvert U de M, pour tous les champs de vecteurs X et Y sur U de classe C^∞ (respectivement analytiques complexes) et appartenant à Δ en tout point, le crochet de Lie $[X, Y]$ sur M appartient à Δ en tout point.* □

Exemples. (1) Si $p = 1$, un champ de droites Δ de classe C^∞ est localement dirigé par un champ de vecteurs C^∞ ne s'annulant pas, qui est toujours intégrable, et les orbites du flot de ce champ de vecteurs sont localement les feuilles du feuilletage intégrant Δ. Dès que $p \geq 2$, il existe des champs de p-plans de classe C^∞ non intégrables (voir l'exercice E.21).

(2) Soient G un groupe de Lie réel (respectivement complexe) et $\mathfrak{h}$ un sous-espace vectoriel de dimension p de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Soit Δ le champ de p-plans invariant à gauche sur G et valant $\mathfrak{h}$ en e :

$$\forall g \in G, \quad \Delta_g = T_eL_g(\mathfrak{h}) \ .$$

Ce champ de p-plans est clairement de classe C^∞ (respectivement analytique complexe). En effet, soit $(X_1, \ldots, X_p)$ une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{h}$. Alors les champs de vecteurs invariants à gauche $\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_p}$ associés à $X_1, \ldots, X_p$ sont C^∞ (respectivement analytiques complexes) et forment en tout point g de G une base de Δ_g. Notons que deux champs de vecteurs X et Y sur un ouvert U de G, de classe C^∞ (respectivement analytiques complexes) et appartenant à Δ en tout point, s'écrivent comme combinaisons linéaires de $\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_p}$ à coefficients dans l'anneau des fonctions C^∞ (respectivement analytiques complexes) sur U, donc leur crochet de Lie s'écrit comme une telle combinaison linéaire des $\overline{X_i}$, $[\overline{X_i}, \overline{X_j}]$ pour $1 \leq i, j \leq p$.

Si $\mathfrak{h}$ est de plus supposée être une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, par la proposition 1.6 et par le théorème de Frobenius 1.40, le champ de p-plans Δ est donc intégrable.

Soit G un groupe de Lie, d'élément neutre e, et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

Théorème 1.41 *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Alors il existe un unique sous-groupe de Lie immergé connexe H dans G, tel que si $i : H \to G$ est l'inclusion, l'application $T_e i$ soit un isomorphisme d'algèbres de Lie de l'algèbre de Lie de H sur $\mathfrak{h}$.*

Nous identifierons dans la suite l'algèbre de Lie de H et $\mathfrak{h}$ par $T_e i$.

Démonstration. Comme ci-dessus, soit Δ le champ de p-plans invariant à gauche sur G et valant $\mathfrak{h}$ en e, qui est intégrable. Soit H la feuille du feuilletage $\mathscr{F}$ intégrant Δ passant par e, munie de sa structure de variété C^∞ (respectivement analytique complexe), qui est telle que l'inclusion $i : H \to G$ soit une immersion injective C^∞ (respectivement analytique complexe) de H dans G.

Montrons que H est un sous-groupe de G. Pour tout g dans G, puisque le difféomorphisme L_g préserve le champ de p-plans Δ, il préserve le feuilletage $\mathscr{F}$. Donc la partie $L_g(H)$ est la feuille de $\mathscr{F}$ passant par g. En particulier, si g appartient à H, alors $L_g(H) = H$. Nous en déduisons que H est stable par multiplication, et que si g appartient à H, alors il existe h dans H tel que $gh = e$, ce qui implique que $g^{-1} = h$, donc que g^{-1} appartient à H.

Enfin, la restriction à H de l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est encore C^∞ (respectivement analytique complexe), car cette propriété est locale, et car H est une sous-variété immergée C^∞ (respectivement analytique complexe) dans G.

L'unicité découle de l'unicité de la feuille d'un feuilletage intégrant un champ de p-plans donné et passant par un point donné. □

Le résultat suivant découle immédiatement du théorème 1.41.

Corollaire 1.42 *Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'application qui à un sous-groupe de Lie immergé de G associe son algèbre de Lie est une bijection de l'ensemble des sous-groupes de Lie immergés connexes de G sur l'ensemble des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$.* □

Le résultat suivant apporte des précisions sur cette correspondance.

Théorème 1.43 *(E. Cartan) Soit G un groupe de Lie. Un sous-groupe de Lie immergé H de G est plongé si et seulement s'il est fermé.*

Si G est réel, alors un sous-groupe H de G est un sous-groupe de Lie plongé de G si et seulement s'il est fermé.

La seconde assertion est fausse si G est complexe : le sous-groupe fermé $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$ n'est pas une sous-variété complexe.

Démonstration. Montrons tout d'abord qu'un sous-groupe de Lie plongé d'un groupe de Lie est fermé. Rappelons qu'une sous-variété est localement fermée, c'est-à-dire ouverte dans son adhérence. Si H est un sous-groupe d'un groupe topologique G, alors son adhérence $\overline{H}$ est aussi un sous-groupe de G. Donc si H est un sous-groupe de Lie plongé d'un groupe de Lie, alors H est un ouvert dense dans $\overline{H}$. Or si $g \in \overline{H}$, alors gH est ouvert dans $\overline{H}$, car la multiplication par g est un homéomorphisme de $\overline{H}$ dans lui-même. Donc gH rencontre H, et g appartient à H. La première affirmation en découle.

Le fait qu'un sous-groupe de Lie immergé fermé (donc localement fermé) est plongé découle du théorème 1.62 que nous verrons plus tard (et le lecteur vérifiera l'absence de

boucle logique !). Dans le cas réel, il se déduit aussi de la dernière assertion, que nous montrons maintenant.

Cette dernière assertion est plus profonde. Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie réel G. Notons

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ \forall\, t \in \mathbb{R}\ ,\ \ \exp\ tX\ \in H\}\ .$$

C'est le candidat pour être l'algèbre de Lie de H.

Étape 1. Montrons d'abord que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie réelle de $\mathfrak{g}$.

Comme $T_0 \exp = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, et puisque l'application tangente en (e, e) à la multiplication $G \times G \to G$ est l'application somme $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, nous avons

$$\exp X\ \exp Y = \exp(X + Y + o(\|X\|, \|Y\|))$$

(pour n'importe quelle norme sur $\mathfrak{g}$). Donc pour tous les X, Y dans $\mathfrak{g}$, t dans $\mathbb{R}$ et α, β dans $\mathbb{R}$, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} (\exp \frac{t\alpha X}{n}\ \exp \frac{t\beta Y}{n})^n = \exp\ t(\alpha X + \beta Y)\ .$$

Donc, comme H est un sous-groupe fermé, le sous-ensemble $\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. Montrons que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire que $[X, Y]$ appartient à $\mathfrak{h}$ pour tous les X, Y dans $\mathfrak{h}$. Or

$$\mathrm{ad}\ X\ (Y) = \frac{d}{ds}_{|s=0} e^{s\ \mathrm{ad}\ X}(Y) = \frac{d}{ds}_{|s=0} \mathrm{Ad}(\exp sX)(Y)\ .$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Ad}(\exp sX)(Y)$ appartient à $\mathfrak{h}$ pour tout s, c'est-à-dire que, pour tout t dans $\mathbb{R}$, l'élément $\exp(t\ \mathrm{Ad}(\exp sX)(Y))$ appartient à H. Or, par les propriétés de l'application exponentielle,

$$\exp(\mathrm{Ad}(\exp sX)(tY)) = \exp sX\ \exp tY\ \exp(-sX)\ ,$$

ce qui conclut, car H est un sous-groupe.

Étape 2. Montrons que H est une sous-variété C^∞ de G au voisinage de e. Par translations à gauche, ceci montrera que H est une sous-variété de G (donc un sous-groupe de Lie plongé).

Soit $\mathscr{F}$ le feuilletage C^∞ intégrant le champ de plans invariant à gauche défini par $\mathfrak{h}$, et soit V un domaine de carte feuilletée en e. Notons $\mathscr{F}_{e,V}$ la feuille locale de e. Il suffit de montrer que si V est suffisamment petit, alors $V \cap H = \mathscr{F}_{e,V}$.

Montrons tout d'abord que le sous-groupe de Lie immergé $\mathscr{F}_e$ de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est contenu dans H. Muni de sa topologie intrinsèque, le groupe de Lie connexe $\mathscr{F}_e$ est engendré par tout voisinage U de e dans $\mathscr{F}_e$. Il existe un tel voisinage U qui est l'image d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{h}$ par l'application exponentielle. Donc par définition de $\mathfrak{h}$, le voisinage U, et donc $\mathscr{F}_e$, est contenu dans H.

Lemme 1.44 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers X dans $\mathfrak{g}$. S'il existe une suite de nombres réels strictement positifs $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge vers 0, telle que* $\exp\ t_n X_n$ *appartienne à H pour tout n dans $\mathbb{N}$, alors X appartient à $\mathfrak{h}$.*

Démonstration. Pour tout t dans $\mathbb{R}$, notons k_n la partie entière de t/t_n. Alors, comme t_n converge vers 0,

$$\exp\ tX = \lim_{n\to\infty} \exp(k_n t_n X_n) = \lim_{n\to\infty} (\exp(t_n X_n))^{k_n}\ .$$

Comme H est un sous-groupe fermé, exp tX appartient à H, et donc $X \in \mathfrak{h}$. □

Terminons la démonstration de l'étape 2. Nous avons déjà vu que $\mathscr{F}_e$, et donc $\mathscr{F}_{e,V}$, est contenu dans H. Montrons alors, par l'absurde, qu'il existe un voisinage U de e tel que $U \cap H \subset \mathscr{F}_{e,V}$.

Sinon, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans G, qui converge vers e, telle que $g_n \in H - \mathscr{F}_{e,V}$. Soit $\mathfrak{h}'$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, muni d'une norme quelconque. Rappelons que exp est un difféomorphisme local en 0, d'application tangente en 0 égale à l'identité. Il existe donc, par le théorème d'inversion locale, des voisinages W et W' de 0 dans $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ respectivement, tels que l'application de $W \times W'$ dans G définie par $(x, y) \mapsto \exp\ x\ \exp\ y$ soit un C^∞-difféomorphisme sur un ouvert de V. Écrivons $g_n = \exp\ x_n\ \exp\ y_n$ avec x_n, y_n qui appartiennent à $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ respectivement, et qui convergent vers 0. Puisque g_n n'appartient pas à $\mathscr{F}_e$, le vecteur y_n est non nul, donc quitte à extraire, $X_n = y_n/||y_n||$ converge vers un vecteur X n'appartenant pas à $\mathfrak{h}$. Ceci contredit le lemme précédent. □

Corollaire 1.45 *Soient G et H deux groupes de Lie réels. Alors tout morphisme de groupes continu f de G dans H est un morphisme de groupes de Lie.*

Démonstration. Le graphe $\mathscr{G}$ de l'application f est un sous-groupe fermé du groupe de Lie réel produit $G \times H$, donc est un sous-groupe de Lie plongé par le théorème de Cartan. Il est clair que la restriction de la seconde projection pr_2 à $\mathscr{G}$ est un morphisme de groupes de Lie de $\mathscr{G}$ dans H. La restriction g de la première projection pr_1 à $\mathscr{G}$ est un morphisme de groupes de Lie bijectif, donc un isomorphisme de groupes de Lie par la proposition 1.2 (b). Donc $f = \mathrm{pr}_2 \circ g^{-1}$ est un morphisme de groupes de Lie. □

Ce corollaire dit que tout morphisme de groupes continu entre deux groupes de Lie réels est C^∞ (il est même analytique réel pour l'unique structure du théorème 1.1). En particulier, un isomorphisme de groupes entre deux groupes de Lie réels, qui est un homéomorphisme, est un isomorphisme de groupes de Lie.

Notons que la conjugaison complexe $z \mapsto \overline{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est un isomorphisme de groupes, continu, qui n'est pas analytique complexe. Donc le corollaire 1.45 ne s'étend pas au cas des groupes de Lie complexes G et H.

Le but de la fin de la partie 1.4 est de montrer que le problème de classification des groupes de Lie connexes se ramène au problème de classification des algèbres de Lie de dimension finie. Ceci se fait en deux étapes, en passant d'abord des groupes de Lie connexes aux groupes de Lie simplement connexes par les revêtements, puis des groupes de Lie simplement connexes aux algèbres de Lie.

1.4.3 Rappels sur les revêtements

Nous renvoyons par exemple à [Godb] pour les rappels qui suivent.

Rappelons qu'une action (à gauche) d'un groupe discret Γ sur un espace topologique localement compact M (par homéomorphismes) est

- *propre* si pour tout compact K de M, l'ensemble $\{g \in \Gamma \ : \ gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini ;
- *libre* si pour tous les $g \in \Gamma$ et $x \in M$, si $gx = x$, alors $g = 1$.

Soit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$. Soient M et N deux variétés C^r. Un *revêtement* C^r de M dans N est une application $f : M \to N$ de classe C^r telle que pour tout $y \in N$, il existe un espace discret non vide D, un voisinage ouvert V de y dans N et un difféomorphisme $h : V \times D \to f^{-1}(V)$ de classe C^r tel que le diagramme suivant commute, où $\mathrm{pr}_1 : V \times D \to V$ est la première projection $(x, d) \mapsto x$:

$$\begin{array}{ccc} V \times D & \xrightarrow{h} & f^{-1}(V) \\ & \mathrm{pr}_1 \searrow & \downarrow f \\ & & V \end{array} .$$

Remarquons que si $r \geq 1$, pour tout x dans M, l'application $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ est un isomorphisme linéaire. Nous appellerons $f^{-1}(y)$ la *fibre* de f au-dessus de y, V un *voisinage ouvert distingué* de y pour f, h une *trivialisation locale* de f au-dessus de V. Pour tout $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, un revêtement est dit *à k feuillets* si toutes ses fibres sont de cardinal k. Si $f : M \to N$ et $f' : M' \to N$ sont deux revêtements C^r, un *morphisme de revêtements* (au-dessus de N) de f sur f' est une application $\phi : M \to M'$ de classe C^r telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & M' \\ & f \searrow \quad \swarrow f' & \\ & N & \end{array} .$$

La collection des revêtements et des ensembles de morphismes entre deux revêtements, munie de la composition des applications et des applications identités, est une catégorie. Un *isomorphisme de revêtements* de f sur f' est un morphisme de revêtements bijectif, d'inverse un morphisme de revêtements. Un *automorphisme de revêtements* de f est un isomorphisme de revêtements de f sur f. Deux revêtements f et f' sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de f sur f'.

Un espace topologique E est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs et si toute application continue du cercle $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ dans E s'étend continûment en une application continue du disque fermé $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}$ dans E. Un revêtement $f : M \to N$ est appelé un revêtement *universel* de N si M est simplement connexe. On montre que toute variété connexe N admet un revêtement universel, unique modulo isomorphisme de revêtements. On montre que deux morphismes de revêtements entre revêtements connexes, qui coïncident en un point, sont égaux. Si N est connexe, le groupe des automorphismes de revêtements d'un revêtement universel $\widetilde{N}$ de N est appelé un *groupe fondamental* de N, et noté $\pi_1 N$. On montre qu'il est bien défini modulo isomorphisme de groupes.

Par exemple, si Γ est un groupe discret agissant (à gauche) sur M proprement et librement par difféomorphismes C^r, alors l'ensemble quotient $\Gamma \backslash M$ admet une unique structure de variété C^r telle que la *projection canonique* $\pi : M \to \Gamma \backslash M$, qui à $x \in M$ associe son orbite par G, soit un difféomorphisme local C^r, et alors π est un revêtement C^r. Ce revêtement est à k feuillets si le cardinal de Γ est k. Si M est simplement connexe, alors π est un revêtement universel de $\Gamma \backslash M$ et le groupe $\pi_1(\Gamma \backslash M)$ est isomorphe à Γ.

Le groupe $\mathrm{Aut}(f)$ des automorphismes de revêtements d'un revêtement $f : \widetilde{M} \to M$ agit librement et proprement sur l'espace total $\widetilde{M}$ du revêtement f. Nous dirons qu'un

revêtement est *connexe* si son espace total est connexe, et qu'un revêtement connexe est *galoisien* si son groupe des automorphismes de revêtements agit transitivement sur la fibre au-dessus de chaque point. Le revêtement défini par une action propre et libre d'un groupe discret Γ par difféomorphismes sur une variété connexe est galoisien. Si le revêtement f est galoisien, l'application f passe au quotient par la projection canonique $\pi : \widetilde{M} \to \Gamma\backslash\widetilde{M}$ pour donner un isomorphisme de variétés $\overline{f} : \Gamma\backslash\widetilde{M} \to M$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{M} & \\ \pi \swarrow & & \searrow f \\ \Gamma\backslash\widetilde{M} & \xrightarrow{\overline{f}} & M \ . \end{array}$$

On montre qu'un revêtement universel $\widetilde{M} \to M$ est galoisien, donc $\pi_1 M$ agit librement et proprement sur $\widetilde{M}$ et ce revêtement universel induit par passage au quotient un difféomorphisme $\pi_1 M\backslash\widetilde{M} \to M$.

Rappelons le *théorème de classification des revêtements* connexes de N : si N est connexe et si $\widetilde{\pi} : \widetilde{N} \to N$ est un revêtement universel de N, alors l'application de l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1 N = \mathrm{Aut}(\widetilde{\pi})$ dans l'ensemble des classes d'isomorphismes de revêtements connexes de N, qui à la classe de conjugaison de Γ associe la classe d'isomorphisme de l'application de $\Gamma\backslash\widetilde{N}$ dans N induite par passage au quotient de $\widetilde{\pi}$, est une bijection.

Rappelons aussi le *théorème du relèvement*. Soient M, N, P trois variétés C^r, $p : M \to N$ un revêtement C^r, $f : P \to N$ une application C^r, $x \in P$ et $y \in p^{-1}(f(x))$. Alors, si P est simplement connexe, il existe une et une seule application $\widetilde{f} : P \to M$ de classe C^r (appelée un *relèvement* de f) telle que $\widetilde{f}(x) = y$ et telle que $p \circ \widetilde{f} = f$, c'est-à-dire telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \widetilde{f} \nearrow & \downarrow p \\ P & \xrightarrow{f} & N \ . \end{array}$$

Soient $(M, \mathscr{F})$ une variété feuilletée C^∞ (respectivement analytique complexe) et $p : M' \to M$ un revêtement C^∞ (respectivement analytique complexe). Il existe alors un unique feuilletage $\mathscr{F}'$ sur M', appelé *feuilletage image réciproque* de $\mathscr{F}$ par p, tel que pour tout ouvert U' de M' et pour toute carte locale feuilletée (U, φ) de $\mathscr{F}$ tels que la restriction de p à U soit un difféomorphisme sur un ouvert de M contenu dans U, l'application $\varphi \circ p_{|U'}$ soit une carte feuilletée de $\mathscr{F}'$: il suffit de prendre pour $\mathscr{F}'$ l'atlas maximal contenant ces telles applications.

Si Γ est un groupe discret agissant sur M proprement et librement par difféomorphismes C^∞ (respectivement analytique complexe), et si Γ préserve un feuilletage $\mathscr{F}$ de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) sur M, alors il existe un et un seul feuilletage $\overline{\mathscr{F}}$ de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) de la variété quotient $\Gamma\backslash M$ tel que $\mathscr{F}$ soit le feuilletage image réciproque de $\overline{\mathscr{F}}$.

Par exemple, tout $n \geq 2$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour tout réseau [10] Λ d'un espace vectoriel V de dimension n sur $\mathbb{K}$, pour tout sous-espace vectoriel E de dimension p de V, l'action par translations de Λ sur V préserve le feuilletage de V dont les feuilles sont les sous-espaces affines parallèles à E, et donc induit par passage

10. Un *réseau* d'un espace vectoriel réel ou complexe V de dimension finie est un sous-groupe discret du groupe additif V qui engendre V comme espace vectoriel

au quotient un feuilletage de dimension p et de codimension $n-p$ de la variété quotient $\Lambda\backslash V$.

1.4.4 Revêtements de groupes de Lie

Considérons G et G' deux groupes de Lie réels (respectivement complexes), d'éléments neutres e et e' respectivement. Un *revêtement de groupes de Lie* de G' dans G est un morphisme de groupes de Lie de G' dans G, qui est un revêtement (entre les variétés sous-jacentes). Un *(iso)morphisme (de revêtements de groupes de Lie)* d'un revêtement de groupes de Lie $p : G' \to G$ dans un revêtement de groupes de Lie $p' : G'' \to G$ est un (iso)morphisme de groupes de Lie $\psi : G' \to G''$ qui est un (iso)morphisme de revêtements (c'est-à-dire tel que $p' \circ \psi = p$).

Par exemple, les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}_1$ et dans $\mathrm{SO}(2)$ définies par $t \mapsto e^{it}$ et $\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ respectivement sont des revêtements de groupes de Lie, de groupes d'automorphismes de revêtements le groupe des translations par les multiples entiers de 2π. En particulier, puisque $\mathbb{R}$ est simplement connexe,

$$\pi_1(\mathbb{S}_1) \simeq \pi_1(\mathrm{SO}(2)) \simeq \mathbb{Z}\ .$$

Si $p_1 : G_1 \to G_1'$ et $p_2 : G_2 \to G_2'$ sont deux revêtements de groupes de Lie, alors l'application $p_1 \times p_2 : G_1 \times G_2 \to G_1' \times G_2'$, définie par $(x, y) \mapsto (p_1(x), p_2(y))$, est un revêtement de groupes de Lie, universel si p_1 et p_2 le sont.

Les revêtements de groupes de Lie sont décrits dans le résultat suivant.

Proposition 1.46 *Soient G un groupe de Lie et Γ un sous-groupe distingué discret de G. Alors il existe une et une seule structure de groupe de Lie sur $\Gamma\backslash G$ telle que la projection canonique $\pi : G \to \Gamma\backslash G$ soit un revêtement de groupes de Lie. De plus, $T_e\pi : T_eG \to T_{\Gamma e}(\Gamma\backslash G)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

Réciproquement, si $p : G \to G'$ est un revêtement de groupes de Lie, alors il existe un sous-groupe distingué discret Γ de G, et un isomorphisme de groupes de Lie $\theta : \Gamma\backslash G \to G'$ tels que, si $\pi : G \to \Gamma\backslash G$ est la projection canonique, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ {}^{\pi}\swarrow & & \searrow^{p} \\ \Gamma\backslash G & \xrightarrow[\simeq]{\theta} & G' \end{array}\ .$$

L'ensemble quotient $\Gamma\backslash G$ sera, sauf mention explicite du contraire, munie de cette structure de groupe de Lie, et sera appelé le *groupe de Lie quotient* de G par Γ. Nous identifierons souvent les algèbres de Lie de G et de $\Gamma\backslash G$ par $T_e\pi$. Notons qu'en particulier tout revêtement de groupes de Lie est galoisien. Nous renvoyons au théorème 1.60 (ii) pour une généralisation de ce résultat.

Démonstration. Supposons G réel (respectivement complexe). Il est immédiat que l'action par translations à gauche de Γ sur G est libre, propre et par difféomorphismes C^∞ (respectivement analytique complexes). Donc comme rappelé, l'ensemble quotient $\Gamma\backslash G$ admet une unique structure de variété C^∞ (respectivement analytique complexe) telle que

$\pi : G \to \Gamma\backslash G$ soit un revêtement C^∞ (respectivement analytique complexe). En particulier, comme le problème de vérifier qu'une application est lisse est local, la variété $\Gamma\backslash G$, munie de sa structure de groupe quotient, est un groupe de Lie, et la projection canonique $\pi : G \to \Gamma\backslash G$ est un revêtement de groupes de Lie. L'unicité est immédiate.

L'application tangente $T_e\pi$ est bien un isomorphisme (d'algèbres de Lie) de l'algèbre de Lie de G sur l'algèbre de Lie du groupe de Lie quotient $\Gamma\backslash G$, car c'est un isomorphisme linéaire et un morphisme d'algèbres de Lie (car la construction de la structure d'algèbre de Lie sur l'espace tangent en e est purement locale).

La réciproque est immédiate, en considérant pour Γ la fibre (discrète) $f^{-1}(e)$, qui est un sous-groupe distingué, et pour θ l'application induite par passage au quotient de p, qui est un isomorphisme de groupes et un difféomorphisme local. □

Par exemple, puisque $\{\pm\mathrm{Id}\}$ est un sous-groupe distingué discret du groupe de Lie $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ pour tout entier non nul n, le quotient

$$\mathrm{PSL}_{2n}(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})/\{\pm\mathrm{Id}\}$$

est un groupe de Lie quotient. Puisque $\{\pm\mathrm{Id}\}$ est un sous-groupe distingué discret du groupe de Lie $\mathrm{SO}(2n)$ pour tout entier non nul n, le quotient

$$\mathrm{PSO}(2n) = \mathrm{SO}(2n)/\{\pm\mathrm{Id}\}$$

est un groupe de Lie quotient.

Rappelons que le *centre* $Z(G)$ d'un groupe G est l'ensemble des éléments de G commutant avec tous les éléments de G :

$$Z(G) = \{g \in G \ : \ \forall\, h \in G, \ \ gh = hg\} \ .$$

Un sous-groupe de G est *central* s'il est contenu dans le centre de G. Tout sous-groupe central est distingué.

Exercice E.12 *(1) Montrer que si G est un groupe de Lie connexe, alors le noyau de sa représentation adjointe* Ad *est égal à son centre $Z(G)$.*

(2) Montrer que le centre $Z(G)$ d'un groupe de Lie réel connexe G est un sous-groupe de Lie plongé de G, dont l'algèbre de Lie est égale au centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Lemme 1.47 *Soit H un groupe topologique (par exemple un groupe de Lie) connexe, et Γ un sous-groupe distingué discret. Alors Γ est central dans H.*

Démonstration. Pour tout g dans Γ, l'application continue $h \mapsto hgh^{-1}$ de l'espace connexe H à valeurs dans l'espace discret Γ est constante, donc égale à $ege^{-1} = g$. Donc g commute avec tout élément de H. □

La proposition suivante est la proposition clef pour passer du problème de classification des groupes de Lie connexes à celui des groupes de Lie simplement connexes.

Proposition 1.48 *Soit G un groupe de Lie connexe. Il existe un revêtement de groupes de Lie $\widetilde{\pi} = \widetilde{\pi}_G : \widetilde{G} \to G$, unique à unique isomorphisme près, tel que $\widetilde{G}$ soit simplement connexe.*

De plus, le sous-groupe $\Gamma = \widetilde{\pi}^{-1}(e)$ *de* $\widetilde{G}$ *est distingué, discret, central, et le groupe de Lie* G *est isomorphe au groupe de Lie quotient* $\Gamma\backslash\widetilde{G}$.

Si H *est un groupe de Lie connexe et* $f : G \to H$ *un morphisme de groupes de Lie, alors il existe un et un seul morphisme de groupes de Lie* $\widetilde{f} : \widetilde{G} \to \widetilde{H}$ *tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G} & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{H} \\ {\scriptstyle \widetilde{\pi}_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\pi}_H} \\ G & \xrightarrow{f} & H\,. \end{array}$$

Une application $\widetilde{\pi} : \widetilde{G} \to G$ comme ci-dessus, et par abus $\widetilde{G}$, est appelée un *revêtement universel* (de groupes de Lie) de G. Sa propriété d'unicité à unique isomorphisme près fait que nous parlerons du revêtement universel de G (en identifiant deux d'entre eux par leur unique isomorphisme).

Démonstration. Soit $\widetilde{\pi} : \widetilde{G} \to G$ un revêtement universel de la variété C^∞ (respectivement analytique complexe) G. Soit $\widetilde{e}$ un point de $\widetilde{\pi}^{-1}(e)$. Montrons qu'il existe une et une seule structure de groupe de Lie sur $\widetilde{G}$, d'élément neutre $\widetilde{e}$, telle que $\widetilde{\pi}$ soit un morphisme de groupes de Lie.

Soit $m : G \times G \to G$ la multiplication de G (définie par $m : (x, y) \mapsto xy$). Remarquons que $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ est simplement connexe. Donc, par le théorème du relèvement rappelé ci-dessus, l'application composée de $\widetilde{\pi} \times \widetilde{\pi} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to G \times G$ et de $m : G \times G \to G$ se relève en une unique application $\widetilde{m} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) telle que $\widetilde{m}(\widetilde{e}, \widetilde{e}) = \widetilde{e}$. De même, l'application $x \mapsto (\widetilde{\pi}(x))^{-1}$ de $\widetilde{G}$ dans G se relève en une unique application, notée $x \mapsto x^{-1}$, de $\widetilde{G}$ dans $\widetilde{G}$ telle que $\widetilde{e}^{\,-1} = \widetilde{e}$.

L'unicité des relèvements dans le théorème du relèvement permet de montrer que la loi $\widetilde{m}$ est associative, a pour élément neutre $\widetilde{e}$ et pour inverse d'un élément x de $\widetilde{G}$ l'élément x^{-1}. En effet, les applications $(x, y, z) \mapsto \widetilde{m}(\widetilde{m}(x, y), z)$ et $(x, y, z) \mapsto \widetilde{m}(x, \widetilde{m}(y, z))$ de l'espace simplement connexe $\widetilde{G} \times \widetilde{G} \times \widetilde{G}$ dans $\widetilde{G}$ sont deux relèvements par $\widetilde{\pi}$ de l'application lisse $(x, y, z) \mapsto \widetilde{\pi}(x)\widetilde{\pi}(y)\widetilde{\pi}(z)$, qui coïncident en $(\widetilde{e}, \widetilde{e}, \widetilde{e})$, donc sont égales. De plus, les trois applications $x \mapsto \widetilde{m}(x, \widetilde{e})$, $x \mapsto \widetilde{m}(\widetilde{e}, x)$ et $x \mapsto x$ de l'espace simplement connexe $\widetilde{G}$ dans $\widetilde{G}$ sont trois relèvements par $\widetilde{\pi}$ de l'application $x \mapsto \widetilde{\pi}(x)$, qui coïncident en $\widetilde{e}$, donc sont égales. Enfin, les trois applications $x \mapsto \widetilde{m}(x, x^{-1})$, $x \mapsto \widetilde{m}(x^{-1}, x)$ et $x \mapsto \widetilde{e}$ de l'espace simplement connexe $\widetilde{G}$ dans $\widetilde{G}$ sont trois relèvements par $\widetilde{\pi}$ de l'application $x \mapsto e$, qui coïncident en $\widetilde{e}$, donc sont égales.

L'application $\widetilde{\pi}$, par construction, est un morphisme de groupes et un revêtement C^∞ (respectivement analytique complexe), donc est un revêtement de groupes de Lie. L'unicité découle de l'unicité d'un revêtement universel et de l'égalité de deux morphismes de revêtements entre revêtements connexes qui coïncident en un point.

La seconde assertion découle de la démonstration de la proposition 1.46 et du lemme 1.47. La troisième assertion se montre à l'aide du théorème de relèvement en considérant pour $\widetilde{f}$ l'unique relèvement de $f \circ \widetilde{\pi}_G$ tel que $\widetilde{f}(e) = e$. □

Remarque 1.49 *Avec les notations de cette proposition, l'action de* $\Gamma = \widetilde{\pi}^{-1}(e)$ *par translations à gauche sur* $\widetilde{G}$ *définit un morphisme injectif de groupes de* Γ *dans le groupe des difféomorphismes de* $\widetilde{G}$*, dont l'image est exactement le groupe des automorphismes de revêtements de* $\pi : \widetilde{G} \to G$.

Exemples. (1) L'application $t \mapsto e^{it}$ du groupe de Lie réel $\mathbb{R}$ dans le groupe de Lie réel $\mathbb{S}_1$ des nombres complexes de module 1 est un revêtement universel de groupes de Lie réels, car $\mathbb{R}$ est simplement connexe et cette application est un morphisme de groupes de Lie.

(2) Par la décomposition polaire (voir l'exercice E.2), le groupe de Lie $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{O}(2)$, le groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(2)$, et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{PSO}(2)$, donc à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_1$. Le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$ est donc un groupe de Lie réel C^∞-difféomorphe à $\mathbb{R}^3$, de centre infini cyclique. (Voir l'exercice E.22 ci-dessous pour des compléments.)

(3) Si $n \geq 3$, le revêtement universel de groupes de Lie de $\mathrm{SO}(n)$, noté $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$, est un revêtement à deux feuillets (voir l'exercice E.13 ci-dessous). De plus, le revêtement universel de groupes de Lie $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{PSO}(n)$ est à deux feuillets si n est impair, et à quatre feuillets sinon.

(4) Nous renvoyons à l'exercice (corrigé) E.16 de la partie 1.6 pour l'utilisation des revêtements de groupes de Lie pour la classification, à isomorphismes de groupes de Lie près, des groupes de Lie réels abéliens connexes.

Notons $\mathscr{G}'_{\mathrm{Lie,sc}}$ l'ensemble des couples (G, Γ) où G est un groupe de Lie simplement connexe et Γ un sous-groupe (distingué) discret central dans G, modulo la relation d'équivalence $(G, \Gamma) \sim (G', \Gamma')$ s'il existe un isomorphisme de groupes de Lie $\varphi : G \to G'$ tel que $\varphi(\Gamma) = \Gamma'$. Notons $\mathscr{G}_{\mathrm{Lie}}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de groupes de Lie connexes. Le fait que ces ensembles soient bien des ensembles vient de l'hypothèse de séparabilité des groupes de Lie, qui implique que leur cardinal est au plus celui du continu. Le résultat suivant découle alors immédiatement de la proposition 1.48.

Corollaire 1.50 *L'application de $\mathscr{G}'_{\mathrm{Lie,sc}}$ dans $\mathscr{G}_{\mathrm{Lie}}$, induite par l'application qui à un couple (G, Γ) associe le groupe de Lie quotient $\Gamma \backslash G$, est une bijection.* □

Cete bijection est naturelle, au sens que si (G, Γ) et (G', Γ') sont deux tels couples, un morphisme de groupes de Lie $\varphi : G \to G'$ tel que $\varphi(\Gamma) \subset \Gamma'$ induit par passage au quotient un morphisme de groupes de Lie de $\Gamma \backslash G$ dans $\Gamma' \backslash G'$.

1.4.5 Classification des groupes de Lie par leurs algèbres de Lie

Soient G et G' deux groupes de Lie réels (respectivement complexes), d'éléments neutres e et e' respectivement. Un *morphisme local (de groupes de Lie)* de G dans G' est une application h de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) d'un voisinage ouvert U de e dans G à valeurs dans un voisinage ouvert U' de e' dans G', telle que, pour tous les x et y dans U tels que xy appartienne à U, nous ayons

$$h(xy) = h(x)h(y) \ .$$

Un *isomorphisme local (de groupes de Lie)* de G dans G' est un morphisme local $h : U \to U'$ qui est un difféomorphisme C^∞ (respectivement analytique complexe) de U sur U'. Notons que $h^{-1} : U' \to U$ est alors aussi un morphisme local de groupes de Lie de G' dans G. Par exemple, tout revêtement de groupes de Lie, restreint à un voisinage ouvert de l'élément neutre suffisamment petit, est un isomorphisme local. Deux groupes de Lie sont

localement isomorphes s'il existe un isomorphisme local de l'un dans l'autre. La relation « être localement isomorphes » est une relation d'équivalence.

Pour une remarque historique, notons que Sophus Lie [Lie] n'a pas introduit la notion de groupe de Lie, mais celle de *groupe de Lie local* (appelé *groupuscule de Lie* dans [Bou2, Chap. III, §1, n^0 10]), correspondant à un « germe » en l'identité de groupe de Lie. Ce n'est que plus tard que l'on a montré que l'on pouvait bien globaliser les choses, pas forcément de manière unique, mais effectivement unique si l'on rajoute l'hypothèse de simple connexité. La notion de groupe de Lie local est alors tombée en désuétude (et c'est pour cela que nous ne la définirons pas), par contre la notion de morphisme local est toujours utile pour le passage des algèbres de Lie aux groupes de Lie en ce qui concerne leur classification.

Théorème 1.51 *Soient G et G' deux groupes de Lie (tous deux réels ou tous deux complexes), d'éléments neutres e et e', et d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ respectivement.*

(1) Si G est simplement connexe, alors tout morphisme local de groupes de Lie de G dans G' se prolonge, de manière unique, en un morphisme de groupes de Lie de G dans G'.

(2) Pour tout morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{f} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, il existe un morphisme local de groupes de Lie f de G dans G' tel que $T_e f = \mathfrak{f}$. De plus, tout autre tel morphisme local de groupes de Lie coïncide avec f au voisinage de l'élément neutre e de G.

(3) Si G est connexe, alors l'application $f \mapsto T_e f$ de l'ensemble des morphismes de groupes de Lie de G dans G', à valeurs dans l'ensemble des morphismes d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$, est injectif, et bijectif si G est simplement connexe.

(4) Deux groupes de Lie sont localement isomorphes si et seulement si leurs algèbres de Lie sont isomorphes.

(5) Si G et G' sont simplement connexes, alors pour tout isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{f} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, il existe un et un seul isomorphisme de groupes de Lie $f : G \to G'$ tel que $T_e f = \mathfrak{f}$.

La surjectivité dans (3) dit que si G est simplement connexe, alors tout morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ s'intègre (au sens de la terminologie introduite après la proposition 1.7) en un morphisme de groupes de Lie de G dans G'.

L'assertion (5) implique que deux groupes de Lie simplement connexes sont isomorphes si et seulement si leurs algèbres de Lie sont isomorphes.

Démonstration. (1) Soit h un morphisme local de groupes de Lie de G dans G'. Soit V un voisinage ouvert connexe (donc connexe par arcs) de e dans G, tel que $V^{-1} = V$ (où $V^{-1} = \{x^{-1} \ : \ x \in V\}$) et tel que $V^2 = \{xy \ : \ x, y \in V\}$ (qui contient V) soit contenu dans le domaine de h. Comme G est connexe, tout voisinage de e engendre G (voir la proposition 1.3). Donc, pour tout x dans G, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dans V tels que $x = x_1 x_2 \ldots x_k$. Si $\overline{h}$ est un morphisme de G dans G' prolongeant h alors $\overline{h}(x) = h(x_1)h(x_2)\ldots h(x_k)$, d'où l'unicité de $\overline{h}$.

Lemme 1.52 *Pour tous les $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dans V tels que $x_1 x_2 \ldots x_k = e$, nous avons*

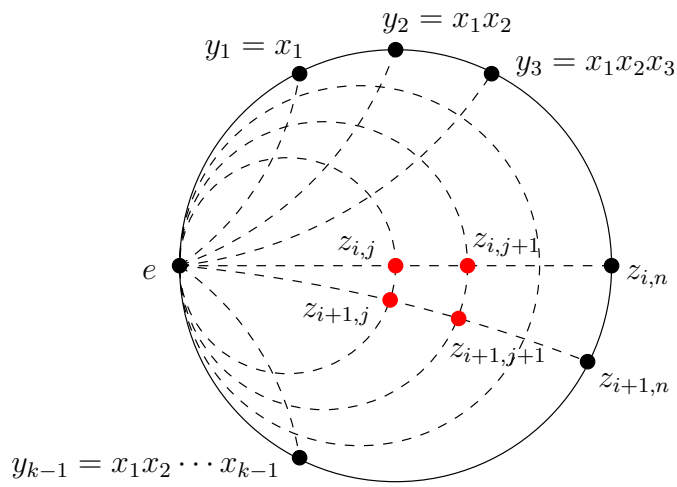
$$h(x_1)h(x_2)\ldots h(x_k) = e' \ .$$

Démonstration. (C'est le genre de démonstration qui se comprend mieux par un dessin que par une rédaction exhaustive, voir la figure ci-dessous).

Posons $y_0 = e$ et $y_{\ell+1} = y_\ell x_{\ell+1}$ pour $\ell = 0, \cdots, k-1$, de sorte que $y_k = e$. Soit $\gamma_\ell : [\frac{\ell}{k}, \frac{\ell+1}{k}] \to G$ un chemin continu de y_ℓ à $y_{\ell+1}$ contenu dans $y_\ell V$. Soit $\gamma : [0,1] \to G$ le chemin continu obtenu par concaténation de ces chemins. Comme $\gamma(0) = \gamma(1) = e$ et par simple connexité de G, il existe une application continue $f : [0,1] \times [0,1] \to G$ telle que $f(t,0) = f(0,s) = f(1,s) = e$ et $f(t,1) = \gamma(t)$, pour tous les $s, t \in [0,1]$. Par compacité de $[0,1] \times [0,1]$, il existe des subdivisions $0 = t_0, t_1, \ldots, t_n = 1$ et $0 = s_0, s_1, \ldots, s_n = 1$ de l'intervalle $[0,1]$, plus fines que la subdivision $(\frac{i}{k})_{0 \le i \le k}$, telles que, pour tous les $i, i', j, j' \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $|i' - i| \le 1$ et $|j' - j| \le 1$, nous ayons

$$f([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]) \subset f(t_{i'}, s_{j'})V \ .$$

Posons $z_{i,j} = f(t_i, s_j)$, de sorte en particulier que $z_{i',j'}^{-1} z_{i,j}$ appartienne à V si $|i' - i| \le 1$ et $|j' - j| \le 1$.



Montrons par récurrence sur $j = 0, \ldots, n$ que

$$h({z_{0,j}}^{-1} z_{1,j}) h({z_{1,j}}^{-1} z_{2,j}) \ldots h({z_{n-1,j}}^{-1} z_{n,j}) = e' \ .$$

L'assertion est immédiate pour $j = 0$. Le passage de j à $j+1$ découle du fait que

$${z_{i,j+1}}^{-1} z_{i+1,j+1} = ({z_{i,j+1}}^{-1} z_{i,j})({z_{i,j}}^{-1} z_{i+1,j})({z_{i+1,j+1}}^{-1} z_{i+1,j})^{-1} \ ,$$

que h est un morphisme local sur V^2 et que $V = V^{-1}$.

Comme γ_i est à valeurs dans $y_i V$, et puisque h est un morphisme local sur V^2, on a, si $i < i'$ sont tels que $t_i = \frac{\ell}{k}, t_{i'} = \frac{\ell+1}{k}$,

$$\begin{aligned} h(x_{\ell+1}) &= h(y_\ell^{-1} y_{\ell+1}) = h({z_{i,n}}^{-1} z_{i',n}) \\ &= h\big(({z_{i,n}}^{-1} z_{i+1,n})({z_{i+1,n}}^{-1} z_{i',n})\big) = h({z_{i,n}}^{-1} z_{i+1,n}) h({z_{i+1,n}}^{-1} z_{i',n}) \\ &= h({z_{i,n}}^{-1} z_{i+1,n}) h({z_{i+1,n}}^{-1} z_{i+2,n}) \ldots h({z_{i'-1,n}}^{-1} z_{i',n}) \ . \end{aligned}$$

Donc la récurrence au rang $j = n$ conclut. □

Pour terminer la démonstration de l'assertion (1), si un élément x dans G s'écrit $x = x_1 x_2 \ldots x_k$ et $x = x'_1 x'_2 \ldots x'_{k'}$, où $x_1, x_2, \ldots, x_k, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{k'}$ sont des éléments de V, alors

$$x'_1 x'_2 \ldots x'_{k'} x_k^{-1} x_{k-1}^{-1} \ldots x_1^{-1} = e \ ,$$

donc par le lemme,

$$h(x'_1)h(x'_2)\dots h(x'_{k'}) = h(x_1)h(x_2)\dots h(x_k)\ .$$

On peut donc poser $\overline{h}(x) = h(x_1)h(x_2)\dots h(x_k)$, ce qui définit une application $\overline{h}$ de G dans G'. Cette application est clairement un morphisme de groupes, et coïncide avec h sur un voisinage de e. En particulier, $\overline{h}$ est C^∞ (respectivement analytique complexe) en e, donc est un morphisme de groupes de Lie.

(2) Considérons le groupe de Lie produit $G \times G'$, dont l'algèbre de Lie s'identifie à l'algèbre de Lie produit $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}'$. Le graphe $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{f}$ est clairement une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}'$. Soit H le sous-groupe de Lie immergé connexe de $G\times G'$ dont l'algèbre de Lie s'identifie à $\mathfrak{h}$ (voir le théorème 1.41). La restriction, à un petit voisinage de l'élément neutre (e, e') dans H, de la première projection $\mathrm{pr}_1 : G \times G' \to G$ est un morphisme local de H dans G, et même un isomorphisme local, car son application tangente en l'élément neutre de H est un isomorphisme. La restriction à tout voisinage de (e, e') dans H de la seconde projection est un morphisme local de H dans G'. En composant (sur des voisinages suffisamment petits des éléments neutres) l'inverse du premier avec le second, nous obtenons donc un morphisme local f de G dans G'. La composition des applications tangentes en les éléments neutres est $\mathfrak{f}$.

Si f' est un autre tel morphisme local, alors son graphe dans $G \times G'$ est, au voisinage de (e, e'), une feuille du feuilletage invariant à gauche défini par $\mathfrak{h}$, donc coïncide, sur un voisinage de (e, e'), avec H. Par conséquent, f et f' coïncident sur un voisinage de e.

(3) L'injectivité découle, par l'assertion (2), du fait que si G est connexe, alors G est engendré par un voisinage de e, donc deux morphismes qui coïncident sur un voisinage de e sont égaux. La surjectivité découle des assertions (1) et (2).

Enfin, les assertions (4) et (5) découlent facilement des assertions (2) et (1) (en utilisant l'unicité). □

Nous admettrons le résultat suivant, dont la démonstration (purement algébrique) est trop longue pour être incorporée ici (voir par exemple [Bou1, Chap. I, page 99]).

Théorème 1.53 (Théorème d'Ado) *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle (respectivement complexe) de dimension finie. Alors il existe un élément n dans $\mathbb{N}$ et un morphisme d'algèbres de Lie injectif de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$).* □

Corollaire 1.54 *Toute algèbre de Lie de dimension finie est isomorphe à l'algèbre de Lie d'au moins un groupe de Lie.*

Démonstration. Le théorème d'Ado 1.53 dit que toute telle algèbre de Lie réelle (respectivement complexe) admet un morphisme (d'algèbres de Lie) injectif dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, pour n assez grand et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Or $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre de Lie du groupe de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Le théorème 1.41 conclut. □

Par l'assertion (4) du théorème 1.51 et le théorème 1.41, le théorème d'Ado implique aussi que tout groupe de Lie réel (respectivement complexe) est localement isomorphe à un sous-groupe de Lie immergé d'un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$). Mais nous montrerons que, par exemple, le groupe de Lie réel $\widetilde{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$ n'est pas (globalement) isomorphe à un sous-groupe de Lie immergé d'un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 1.55 *L'application qui à un groupe de Lie réel (respectivement complexe) associe son algèbre de Lie induit une bijection Θ de l'ensemble des classes d'isomorphismes de groupes de Lie réels (respectivement complexes) simplement connexes sur l'ensemble des classes d'isomorphismes d'algèbres de Lie réelles (respectivement complexes) de dimension finie.*

Démonstration. L'application Θ est bien définie, comme conséquence de la proposition 1.7. Elle est surjective par le corollaire 1.54, et le fait qu'un groupe de Lie et le revêtement universel de sa composante neutre sont localement isomorphes, donc ont des algèbres de Lie isomorphes. L'injectivité de Θ découle de l'assertion (5) du théorème 1.51. □

Ainsi, nous avons bien réussi à montrer que le problème de classification des groupes de Lie connexes se ramène au problème de classification des algèbres de Lie de dimension finie : par le corollaire 1.50, les groupes de Lie connexes sont, à isomorphisme près, les groupes de Lie quotients d'un groupe de Lie simplement connexe par un sous-groupe discret central ; et par le corollaire 1.55, les groupes de Lie simplement connexes sont, à isomorphisme près, uniquement déterminés par leurs algèbres de Lie, qui peut être n'importe quelle algèbre de Lie de dimension finie.

1.4.6 Algébricité des groupes de Lie semi-simples

Un groupe de Lie est dit *semi-simple* si son algèbre de Lie l'est. Le but de cette partie est de souligner le caractère algébrique de ces groupes.

Nous commençons par des définitions sur les groupes linéaires algébriques (voir la très jolie introduction rapide [Bor1], et [OV, Bor2] pour un traitement plus ample).

Dans ce texte (voir par exemple [Per] pour une introduction à ces notions), une *variété algébrique affine* est un sous-ensemble V d'un $\mathbb{C}^N$ où $N \in \mathbb{N}$, lieu des zéros communs d'une famille de polynômes à N variables complexes. L'ensemble $I(V)$ des polynômes qui s'annulent sur V est un idéal de l'anneau $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ des polynômes à N variables complexes. *L'anneau des fonctions* de V est l'anneau quotient $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]/I(V)$.

Un *fermé de Zariski* de V est le lieu dans V des zéros communs d'une famille de polynômes à N variables complexes. Il est facile de montrer que l'ensemble des fermés de Zariski est l'ensemble des fermés d'une topologie sur V, appelée la *topologie de Zariski* de V. La topologie induite sur V par la topologie usuelle de $\mathbb{C}^N$ est appelée la *topologie analytique* sur V pour la différencier de la précédente. Tout fermé de Zariski est un fermé analytique, mais la réciproque est fausse. Tout ouvert de Zariski de $V = \mathbb{C}^N$ non vide est dense pour la topologie usuelle de $\mathbb{C}^N$, car un polynôme qui s'annule sur un ouvert non vide de $\mathbb{C}^N$ est nul.

Soit k un sous-corps de $\mathbb{C}$ (nous nous intéresserons surtout à $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$). Une variété algébrique affine V est dite *définie sur* k (ou une *k-variété* pour raccourcir la terminologie) si elle est le lieu des zéros communs d'une famille de polynômes à coefficients dans k. L'ensemble de ses *k-points* (ou *points réels* si $k = \mathbb{R}$) est l'ensemble $V(k)$ des zéros communs dans k^N de ces polynômes. La topologie induite sur $V(k)$ par la topologie de Zariski de V s'appelle aussi la *topologie de Zariski* de $V(k)$.

Si V et V' sont des k-variétés, une application $f : V \to V'$ est *k-régulière* si les composantes de f sont des restrictions à V d'applications polynomiales à coefficients dans k. *L'anneau des fonctions k-régulières* d'une k-variété V est l'anneau quotient $k[V] = k[x_1, \ldots, x_N]/I_k(V)$, où $I_k[V] = I[V] \cap k[x_1, \ldots, x_N]$.

Nous dirons qu'une k-variété V est *k-irréductible* si elle n'est pas réunion de deux fermés de Zariski propres. L'anneau $k[V]$ étant noethérien,[11] toute k-variété est réunion finie de k-sous-variétés k-irréductibles.

Dans ce texte, un *groupe algébrique linéaire* est un sous-groupe d'un $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ pour $N \in \mathbb{N}$ qui est une sous-variété algébrique affine de $\mathbb{C}^{N^2}$. Il est *défini sur k* (ou *un k-groupe* pour raccourcir la terminologie) si c'est une k-variété. Si $\underline{G}$ est un k-groupe, alors $\underline{G}(k)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_N(k)$.

Soient $\underline{G}$ et $\underline{G}'$ deux k-groupes. Un *morphisme (algébrique) de groupes algébriques linéaires défini sur k* (ou *un k-morphisme* pour raccourcir la terminologie) de $\underline{G}$ dans $\underline{G}'$ est un morphisme de groupes de $\underline{G}$ dans $\underline{G}'$ qui est une application k-régulière. La collection des groupes algébriques linéaires et des ensembles de morphismes entre deux groupes algébriques linéaires, munie de la composition des applications et des applications identités, est une catégorie. Un *isomorphisme (de groupes algébriques linéaires)* est un morphisme bijectif, d'inverse un morphisme. Deux groupes algébriques linéaires sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre. Un *automorphisme (de groupes algébriques linéaires)* est un isomorphisme d'un groupe algébrique linéaire dans lui-même.

Soient $\underline{G}$ un k-groupe et V une k-variété. Une *action algébrique définie sur k* (ou *une k-action* pour raccourcir la terminologie) de $\underline{G}$ sur V est une action de groupes $\underline{G} \times V \to V$ de $\underline{G}$ sur V qui est une application k-régulière. Elle définit une action de $\underline{G}(k)$ sur $V(k)$.

Exemples. (1) Le *groupe additif* $\underline{G}_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{C} \right\}$, le *groupe multiplicatif* $\underline{G}_m = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \ : \ x, y \in \mathbb{C},\ xy = 1 \right\}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le *groupe linéaire*

$$\underline{\mathrm{GL}}_n = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \ : \ y \in \mathbb{C},\ \ y \det x = 1 \right\}$$

sont des $\mathbb{Q}$-groupes.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les sous-groupes

$$\underline{\mathrm{SL}}_n = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \ : \ \det x = 1\} \ ,$$

$$\underline{\mathrm{SO}}_n = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \ : \ {}^t x x = I_n,\ \ \det x = 1\} \ ,$$

$$\underline{\mathrm{Sp}}_n = \{x \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t x \, J_n \, x = J_n\}$$

sont des $\mathbb{Q}$-groupes, appelés *groupe linéaire spécial*, *groupe orthogonal spécial*, *groupe symplectique* respectivement, dont les groupes de Lie réels des points réels (voir la proposition 1.56 ci-dessous) sont $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

(3) L'adhérence de Zariski d'un k-groupe est un k-groupe.

(4) Les actions par translations à gauche et par translations à droite d'un sous-groupe algébrique $\underline{H}$ sur un groupe algébrique $\underline{G}$ sont algébriques. Elles sont définies sur k si $\underline{H}$ et $\underline{G}$ sont des k-groupes.

11. Un anneau commutatif est *noethérien* si toute suite croissante d'idéaux est stationnaire. Un corps commutatif est noethérien, ainsi que l'anneau $\mathbb{Z}$. Le théorème de la base de Hilbert dit que si A est un anneau commutatif noethérien, alors $A[x_1, \ldots, x_N]$ est noethérien. Tout anneau quotient d'un anneau commutatif noethérien est noethérien.

Nous admettrons sans démonstration (voir [OV, Bor2]) les faits suivants sur les groupes algébriques linéaires.

Proposition 1.56 *(1) Si $\underline{G}$ est un groupe algébrique linéaire dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$, alors $\underline{G} = \underline{G}(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de Lie plongé du groupe de Lie complexe $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$. Si $\underline{G}$ est défini sur $\mathbb{R}$, alors $\underline{G}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de Lie plongé du groupe de Lie réel $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$.*

(2) Si $\underline{G}$ est un groupe algébrique linéaire, alors les composantes connexes du groupe de Lie complexe $\underline{G}(\mathbb{C})$ sont les composantes irréductibles de la variété algébrique affine $\underline{G}$.

(3) Si $\underline{G}$ est un groupe algébrique linéaire défini sur $\mathbb{R}$, alors le groupe de Lie réel $\underline{G}(\mathbb{R})$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes ; si ce groupe de Lie est semi-simple, son centre est fini.

(4) Si $\underline{G}$ est un k-groupe Zariski-connexe, alors $\underline{G}(k)$ est Zariski-dense dans $\underline{G}$.

(5) Soit $\underline{G}$ un groupe algébrique linéaire défini sur $\mathbb{R}$. Si $x \in \underline{G}(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs propres positives, alors le sous-groupe à un paramètre $(x_t)_{t\in\mathbb{R}}$ tel que $x_1 = x$ est contenu dans $\underline{G}(\mathbb{R})$. □

En particulier, le groupe de Lie complexe $\underline{G}(\mathbb{C})$ est connexe si et seulement si la variété algébrique affine $\underline{G}$ est irréductible.

Si $\underline{G}$ est un groupe algébrique linéaire défini sur $\mathbb{R}$, son centre $Z(\underline{G}) = \{g \in \underline{G} \ : \ \forall h \in \underline{G}, \ \ gh = hg\}$ est aussi un groupe algébrique linéaire défini sur $\mathbb{R}$.

Attention, il peut exister un sous-groupe de Lie plongé du groupe de Lie des points réels d'un $\mathbb{R}$-groupe qui n'est pas le groupe de Lie des points réels d'un $\mathbb{R}$-sous-groupe, comme par exemple $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}^*$.

Attention, la composante neutre du groupe de Lie des points réels d'un groupe linéaire algébrique défini sur $\mathbb{R}$ n'est pas toujours le groupe de Lie des points réels d'un groupe linéaire algébrique défini sur $\mathbb{R}$.

Le résultat d'algébricité des groupes de Lie semi-simple est le suivant.

Théorème 1.57 *Soit G un groupe de Lie semi-simple réel connexe de centre trivial. Alors G est isomorphe à la composante neutre du groupe de Lie réel des points réels d'un groupe linéaire algébrique défini sur $\mathbb{R}$.*

Les hypothèses de connexité et de centre trivial sont nécessaires, comme le montrent respectivement les contre-exemples G un groupe discret infini et G un revêtement connexe non trivial du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (qu'il soit fini ou infini comme $\widetilde{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$).

Démonstration. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ des automorphismes d'algèbres de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des points réels d'un groupe algébrique linéaire défini sur $\mathbb{R}$, par bilinéarité du crochet de Lie. L'algèbre de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ par l'exercice E.7 (4) b), qui est isomorphe à $\mathfrak{g}$ par le corollaire 1.21.

Notons G' le groupe de Lie $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$, composante neutre de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Le centralisateur

$$Z_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}(G') = \{g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \ : \ \forall\, h \in G', \quad hg = gh\}$$

de G' dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est discret, car son algèbre de Lie, isomorphe au centre de $\mathfrak{g}$, est triviale. C'est aussi le groupe de Lie des points réels d'un groupe linéaire algébrique défini sur $\mathbb{R}$, car défini par une famille d'équations polynomiales à coefficients réels par sa définition même. Par la proposition 1.56, le groupe de Lie $Z_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}(G')$ n'a qu'un nombre fini de composantes

connexes. Donc le centre $Z(G') = G' \cap Z_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}(G')$ de G' est fini. Le groupe de Lie connexe quotient $G'' = G'/Z(G')$ est encore isomorphe à la composante neutre du groupe de Lie des points réels d'un groupe linéaire algébrique défini sur $\mathbb{R}$.

Par la classification des groupes de Lie, et puisque les groupes de Lie G et G'' sont connexes, de centre triviaux et d'algèbres de Lie isomorphes, ils sont isomorphes. Le résultat en découle. $\square$

1.4.7 Phénoménologie des groupes classiques

Nous terminons cette partie 1.4 en étudiant les groupes de Lie classiques (voir par exemple [MnT]). Pour tout groupe de Lie G, notons

— G_0 la composante neutre de G,

— $Z(G)$ le centre de G (ce qui permet de construire des groupes de Lie localement isomorphes à G, en prenant un sous-groupe discret Γ de $Z(G)$ (tout tel sous-groupe est distingué dans G), et en considérant le groupe de Lie quotient $\Gamma\backslash G$),

— $\pi_0(G)$ le groupe G/G_0 des composantes connexes de G, et

— $\pi_1(G_0)$ le groupe des automorphismes de revêtements du revêtement universel $\widetilde{G_0} \to G_0$ de G_0, qui s'identifie (voir la remarque 1.49) au sous-groupe discret distingué central Γ de $\widetilde{G_0}$ tel que l'application $\widetilde{G_0} \to G_0$ induise un isomorphisme de groupes de Lie $\Gamma\backslash\widetilde{G_0} \to G_0$.

Exercice E.13 *Dans les tableaux qui suivent, n, p, q sont des éléments de $\mathbb{N} - \{0\}$ avec $p \leq q$, $\mathbb{U}_n$ est le groupe des racines n-èmes de l'unité, $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ et $\mathbb{T}^n$ est le groupe de Lie quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.*

(1) En utilisant l'exercice E.2 (3), en notant $\mathrm{S}(\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q))$ le sous-groupe de Lie plongé réel de $\mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{R})$ des éléments de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $A \in \mathrm{O}(p)$ et $B \in \mathrm{O}(q)$, et de même pour $\mathrm{S}(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$ dans $\mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{C})$, montrer que les groupes G et K de chaque ligne du tableau suivant ont des groupes de composantes connexes et des groupes fondamentaux isomorphes :

G	K
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$\mathrm{SO}(n)$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$	$\mathrm{SU}(n)$
$\mathrm{SU}^*(2n)$	$\mathrm{Sp}_*(n)$
$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$	$\mathrm{U}(n)$
$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}(n)$
$\mathrm{SO}(p,q)$	$\mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q))$
$\mathrm{SU}(p,q)$	$\mathrm{S}(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$
$\mathrm{Sp}(p,q)$	$\mathrm{Sp}(p) \times \mathrm{Sp}(q)$
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$	$\mathrm{SO}(n)$
$\mathrm{SO}^*(2n)$	$\mathrm{U}(n)$

(2) Montrer que, pour tout groupe de Lie G de la colonne de gauche, les groupes $Z(G), \pi_0(G)$ et $\pi_1(G_0)$ sont isomorphes à ceux donnés dans les trois autres colonnes.

G	$Z(G)$	$\pi_0(G)$	$\pi_1(G_0)$
$\mathbb{S}_1$	$\mathbb{S}_1$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{T}^n$	$\mathbb{T}^n$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}^n$
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^*\mathrm{Id}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$\begin{cases} \{\pm\,\mathrm{Id}\} & \text{si } n \text{ pair} \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$	$\{1\}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$	$\{1\}$	$\begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n \text{ pair} \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n\geq 3 \text{ impair} \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \text{si } n\geq 3 \text{ pair} \end{cases}$
$\mathrm{PSL}_{2n}(\mathbb{R})$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n=1 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \text{si } n\geq 2 \end{cases}$
$\mathrm{O}(n)$	$\{\pm\,\mathrm{Id}\}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{SO}(n)$	$\begin{cases} \mathrm{SO}(2) & \text{si } n=2 \\ \{\pm\,\mathrm{Id}\} & \text{si } n\neq 2 \text{ pair} \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$	$\{1\}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{O}(p,q)$	$\{\pm\,\mathrm{Id}\}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } p=q=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p=1, q=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p=1, q\geq 3 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } p=q=2 \\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p=2, q\geq 3 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \text{si } p,q\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{SO}(p,q)$	$\begin{cases} \{\pm\,\mathrm{Id}\} & \text{si } p+q \text{ pair} \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } p=q=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p=1, q=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p=1, q\geq 3 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } p=q=2 \\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p=2, q\geq 3 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \text{si } p,q\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^*\,\mathrm{Id}$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}$
$\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\mathbb{U}_n$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$	$\mathbb{U}_n\,\mathrm{Id}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\mathrm{PSL}_n(\mathbb{C})$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\mathbb{U}_n$
$\mathrm{U}(n)$	$\mathbb{S}_1\,\mathrm{Id}$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}$
$\mathrm{SU}(n)$	$\mathbb{U}_n\,\mathrm{Id}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\mathrm{U}(p,q)$	$\mathbb{S}_1\,\mathrm{Id}$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
$\mathrm{SU}(p,q)$	$\mathbb{U}_{p+q}\,\mathrm{Id}$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}$
$\mathrm{Sp}_*(n)$	$\{\pm\,\mathrm{Id}\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$	$\{\pm\,\mathrm{Id}\}$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}$
$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$	$\{\pm\,\mathrm{Id}\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\mathrm{Sp}(p,q)$	$\{\pm\,\mathrm{Id}\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$	$\{\pm\,\mathrm{Id}\}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$	$\begin{cases} \{\pm\,\mathrm{Id}\} & \text{si } n \text{ pair} \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$	$\{1\}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n\geq 3 \end{cases}$

En particulier, si $n, p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$, alors les groupes de Lie

$$\mathrm{O}(n), \ \ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \ \ \mathrm{SO}(p,q), \ \ \mathrm{O}_n(\mathbb{C}), \ \ \mathrm{O}(p,q)$$

ne sont pas connexes, et ont exactement deux, deux, deux, deux, quatre composantes connexes respectivement. Les groupes de Lie

$$\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}, \ \ \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, \ \ \mathrm{SO}(n) \text{ si } n \neq 1, \ \ \mathrm{U}(n), \ \ \mathrm{U}(p,q), \ \ \mathrm{SU}(p,q),$$

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}), \ \ \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \text{ si } n \neq 1, \ \ \mathrm{PSL}_{2n}(\mathbb{R}), \ \ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \ \ \mathrm{SO}_n(\mathbb{C}) \text{ si } n \neq 1$$

sont connexes, mais ne sont pas simplement connexes. Enfin, les groupes de Lie

$$\mathbb{R}^n, \ \ \mathrm{SU}(n) \text{ si } n \neq 1, \ \ \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \text{ si } n \neq 1\,,$$

$$\mathrm{Sp}(n) \simeq \mathrm{Sp}_*(n), \ \ \mathrm{SL}_n(\mathbb{H}) \simeq \mathrm{SU}^*(2n), \ \ \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C}), \ \ \mathrm{Sp}(p,q)$$

sont simplement connexes.

En petite dimension, il existe un certain nombre d'isomorphismes, dit *remarquables*, entre ces groupes (voir par exemple [MnT] ou [Hel, page 519]). Nous en énonçons quelques-un sous forme d'exercices, bien que certains de ceux-ci ne soient pas du tout immédiats. Le préfixe P devant un groupe signifie le quotient par son centre (en général $\{\pm \mathrm{Id}\}$). Nous notons $\mathbb{S}_3 = \mathrm{SL}_1(\mathbb{H}) = \{x = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \ : \ N(x) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$ le groupe de Lie des quaternions de Hamilton de norme 1.

Exercice E.14 *Montrer l'existence d'isomorphismes*

$$\begin{aligned}
\mathrm{SO}(3) &\simeq \mathrm{PU}(2) \simeq \mathrm{PSp}(1)\\
\mathrm{PSO}(4) &\simeq \mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3)\\
\mathrm{SO}(5) &\simeq \mathrm{PSp}(2)\\
\mathrm{PSO}(6) &\simeq \mathrm{PU}(4)\\
\mathrm{Spin}(3) &\simeq \mathrm{SU}(2) \simeq \mathrm{Sp}(1) \simeq \mathbb{S}_3\\
\mathrm{Spin}(4) &\simeq \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)\\
\mathrm{Spin}(5) &\simeq \mathrm{Sp}(2)\\
\mathrm{Spin}(6) &\simeq \mathrm{SU}(4)\\
\mathrm{PSL}_n(\mathbb{C}) &\simeq \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})\\
\mathrm{PSO}_4(\mathbb{C}) &\simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})\\
\mathrm{SO}_5(\mathbb{C}) &\simeq \mathrm{PSp}_2(\mathbb{C})\\
\mathrm{PSO}_6(\mathbb{C}) &\simeq \mathrm{PSL}_4(\mathbb{C})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) &\simeq \mathrm{SO}(1,2)_0 \simeq \mathrm{SU}(1,1) \simeq \mathrm{PSp}_1(\mathbb{R})\\
\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) &\simeq \mathrm{SO}(1,3)_0 \simeq \mathrm{PSp}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})\\
\mathrm{PSL}(2,\mathbb{H}) &\simeq \mathrm{SO}(1,5)_0\\
\mathrm{SO}(1,4)_0 &\simeq \mathrm{PSp}(1,1)\\
\mathrm{SO}(2,3)_0 &\simeq \mathrm{PSp}_2(\mathbb{R})\\
\mathrm{SO}(2,2)_0 &\simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})\\
\mathrm{SO}(3,3)_0 &\simeq \mathrm{PSL}_4(\mathbb{R})\\
\mathrm{SO}(2,4)_0 &\simeq \mathrm{PU}(2,2)\\
\mathrm{PSO}(2,\mathbb{H}) &\simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PU}(2)\\
\mathrm{PSO}(3,\mathbb{H}) &\simeq \mathrm{PU}(3,1)\\
\mathrm{PSO}(4,\mathbb{H}) &\simeq \mathrm{SO}_0(6,2)
\end{aligned}$$

1.5 Espaces homogènes

1.5.1 Actions lisses de groupes de Lie

Soient G un groupe de Lie réel (respectivement complexe), et M une variété C^∞ (respectivement analytique complexe). Sauf mention explicite du contraire, les actions sont des actions à gauche, mais les définitions pour les actions à droite sont analogues.

Une action de G sur M est dite *lisse* si l'application $(g,x) \mapsto gx$ de $G \times M$ dans M est C^∞ (respectivement analytique complexe). Notons qu'alors, pour tout g dans G, l'application $m_g : x \mapsto gx$ est un difféomorphisme C^∞ (respectivement analytique complexe) de M, d'inverse $m_{g^{-1}} : x \mapsto g^{-1}x$.

Une action de G sur M est dite

- *libre* si pour tous les $g \in G$ et $x \in M$, si $gx = x$, alors $g = e$;
- *transitive* si pour tous les $x, y \in M$, il existe $g \in G$ tel que $y = gx$;
- *propre* si pour tout compact K de M, l'ensemble $\{g \in G \ : \ K \cap gK \neq \emptyset\}$ est compact dans G. C'est toujours le cas si G est compact.

Par exemple, les actions à gauche d'un sous-groupe de Lie immergé H de G par translations à gauche $(h,g) \mapsto hg$ et par translations à droite $(h,g) \mapsto gh^{-1}$ sur G sont lisses et libres. Si H est un sous-groupe de Lie plongé, ces actions sont propres, car, par exemple pour l'action par translations à gauche, pour tout compact K de G, la partie $\{h \in H \ : \ K \cap hK \neq \emptyset\}$ est égale à $H \cap (KK^{-1})$, qui est compact car H est fermé (par la première assertion du théorème 1.43).

Considérons une action lisse de G sur M. Soit x dans M. Le *stabilisateur* de x dans G est le sous-groupe $G_x = \{g \in G \ : \ gx = x\}$ de G. L'*application orbitale* en x est l'application $\varphi_x : g \mapsto gx$ de G dans M. L'*application canonique* en x est l'application $\Theta_x : G/G_x \to M$ induite par passage au quotient de φ_x, c'est-à-dire définie par $\Theta_x(gG_x) = gx$; c'est une injection, qui est une bijection si l'action est transitive. L'application canonique Θ_x est équivariante pour les actions de G sur G/G_x et sur M : pour tous les $g \in G$ et $z \in G/G_x$, nous avons

$$\Theta_x(gz) = g\,\Theta_x(z) \ .$$

Lemme 1.58 *Pour tout x dans M, l'application orbitale φ_x est une application de rang constant, et le stabilisateur G_x est un sous-groupe de Lie plongé de G, d'algèbre de Lie*

$$T_eG_x = \mathrm{Ker}\ T_e\varphi_x \ .$$

Remarquons que lorsque G est un groupe de Lie réel, nous pourrions dire que G_x est clairement fermé (car M est séparé et l'action continue), et appliquer le théorème de Cartan 1.43, pour conclure à la seconde assertion, mais ce serait utiliser un marteau-pilon pour écraser une mouche.

Démonstration. Pour tout g dans G, les applications $L_g : G \to G$ et $m_g : M \to M$ définies respectivement par $h \mapsto gh$ et $y \mapsto gy$ sont des difféomorphismes, et, par définition d'une action, nous avons

$$\varphi_x \circ L_g = m_g \circ \varphi_x \ .$$

Donc $T_g\varphi_x \circ T_eL_g = T_xm_g \circ T_e\varphi_x$, et par conséquent $T_g\varphi_x, T_e\varphi_x$ ont le même rang.

Comme $G_x = \varphi_x^{-1}(x)$, le résultat découle alors du fait que l'image réciproque d'un point par une application f de rang constant C^∞ (respectivement analytique complexe) est une sous-variété C^∞ (respectivement analytique complexe), dont l'espace tangent en un point est le noyau de l'application tangente de f en ce point. $\square$

Nous noterons $\pi : M \to G\backslash M$ la *projection canonique*, qui à $x \in M$ associe son orbite par G, et nous munissons l'ensemble quotient $G\backslash M$ de la *topologie quotient* (une partie U de $G\backslash M$ est ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans M), de sorte que π est continue et *ouverte* (c'est-à-dire que l'image de tout ouvert par π est ouvert, ce qui découle

du fait que pour tout ouvert U de M, nous avons $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g\in G} gU$, qui est ouvert). En particulier, si G est un groupe de Lie réel (respectivement complexe), si H un sous-groupe de Lie immergé de G, en notant $H\backslash G$ (respectivement G/H) l'ensemble quotient pour l'action par translations à gauche (respectivement à droite) de H, nous munissons $H\backslash G$ (respectivement G/H) de la topologie quotient.

Lemme 1.59 *Soit M une variété C^∞ (respectivement analytique complexe), munie d'une action (à gauche) lisse et propre d'un groupe de Lie réel (respectivement complexe) G. Alors l'espace topologique quotient $G\backslash M$ est séparé et à base dénombrable d'ouverts.*

Démonstration. Montrons que $G\backslash M$ est séparé. En effet, soient x et x' deux points de M qui ne sont pas dans la même orbite. Puisque la variété M est localement compacte et métrisable, soient K et K' deux voisinages compacts disjoints de x et de x', et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des systèmes fondamentaux de voisinages de x et x' contenus dans K et K' respectivement. Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K_N \cap GK'_N$ soit vide. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K_n$ et $g_n \in G$ tels que $g_n x_n \in K'_N$. Comme $K \cup K'$ est compact (car M est séparée) et l'action est propre, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans un compact de G, donc, quitte à extraire, converge vers $g \in G$. Or $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et $(g_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x'. Donc par continuité de l'action, $x' = gx$, contradiction. Puisque π est ouverte, les images par π de K_N et K'_N sont alors des voisinages disjoints de $\pi(x)$ et $\pi(x')$ respectivement, ce qui conclut.

L'espace topologique $G\backslash M$ est à base dénombrable, car si $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base dénombrable d'ouverts de M, alors $(\pi(U_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est une base dénombrable d'ouverts de $G\backslash M$, car π est ouverte. □

La condition de propreté est cruciale. Par exemple, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le groupe $\mathbb{R}$ agit de manière lisse sur la variété produit $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ par

$$(t, (e^{2i\pi\theta}, e^{2i\pi\theta'})) \mapsto (e^{2i\pi(\theta+t)}, e^{2i\pi(\theta'+\alpha t)}) \ .$$

Ses orbites sont les images des droites affines de pente α de $\mathbb{R}^2$ par $(\theta, \theta') \mapsto (e^{2i\pi\theta}, e^{2i\pi\theta'})$. Si α est irrationnel, on peut montrer que l'espace topologique quotient $\mathbb{R}\backslash(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ n'est pas séparé, et même que sa topologie est la topologie grossière (dont les seuls ouverts sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}\backslash(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$).

Une variété C^∞ (respectivement analytique complexe) est dite *homogène* si elle admet une action lisse et transitive d'un groupe de Lie connexe réel (respectivement complexe). En particulier, elle est connexe. Il n'y a pas forcément unicité d'un tel groupe de Lie, et les propriétés « géométriques » d'une variété homogène dépendent du groupe de Lie transitif considéré. Par exemple, tout groupe de Lie connexe G est une variété homogène, pour l'action de G sur lui-même par translations à gauche.

Si G est un groupe de Lie réel (respectivement complexe), un *G-torseur* C^∞ (respectivement analytique complexe) est une variété C^∞ (respectivement analytique complexe) munie d'une action libre et transitive de G. Par exemple, pour tout espace vectoriel réel ou complexe V de dimension finie, en notant encore V le groupe de Lie additif sous-jacent, un V-torseur est un espace affine d'espace vectoriel associé V.

Une variété M de classe C^∞ (respectivement analytique complexe), munie d'une action à droite lisse, libre et propre d'un groupe de Lie réel (respectivement complexe) G (ou par abus la projection canonique $\pi : M \to M/G$) est appelée un *fibré principal* de *groupe structural* G (voir la partie 2.1 pour une explication de la terminologie).

1.5.2 Espaces homogènes quotients

Si H est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie G réel (respectivement complexe), alors H agit librement et proprement par translations à gauche sur G par difféomorphismes C^∞ (respectivement analytiques complexes). Comme rappelé dans la partie 1.4.3, l'ensemble quotient $H\backslash G$ admet une unique structure de variété C^∞ (respectivement analytique complexe) telle que $\pi : G \to H\backslash G$ soit une submersion C^∞ (respectivement analytique complexe). Le but du résultat suivant est d'étendre ceci au cas où H est seulement supposé être un sous-groupe de Lie plongé (ou lorsque G est réel, de manière équivalente par le théorème de Cartan 1.43, un sous-groupe fermé) de G.

Théorème 1.60 *Soient G un groupe de Lie réel (respectivement complexe), H un sous-groupe de Lie plongé de G, et $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Il existe une et une seule structure de variété différentielle de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) sur l'espace topologique quotient G/H, telle que π soit une submersion C^∞ (respectivement analytique complexe). De plus,*

(i) l'action de G par translations à gauche sur G/H est lisse ;

(ii) si en outre H est distingué, alors G/H, muni de ses structures de variété quotient et de groupe quotient, est un groupe de Lie, la projection canonique $\pi : G \to G/H$ est un morphisme de groupes de Lie, l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, et l'application linéaire de T_eG/T_eH dans $T_{eH}(G/H)$ induite par $T_e\pi$ est un isomorphisme de l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ dans l'algèbre de Lie de G/H.

Par les propriétés des submersions (voir le lemme 0.2), nous avons donc

(iii) $\dim(G/H) = \dim G - \dim H$;

(iv) pour tout g dans G, l'application $T_g\pi : T_gG \to T_{gH}(G/H)$ induit un isomorphisme linéaire $(T_gG)/(T_g(gH)) \simeq T_{gH}(G/H)$;

(v) pour toute variété N de classe C^k où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (respectivement de classe analytique complexe), une application $f : G/H \to N$ est de classe C^k (respectivement de classe analytique complexe) si et seulement si $f \circ \pi$ l'est.

La structure (de variété munie d'une action lisse de G) sur G/H construite dans ce théorème 1.60 s'appelle la structure *d'espace homogène quotient* sur G/H. C'est un espace homogène, car par l'assertion (i), l'action de G par translations à gauche sur G/H est lisse et transitive. En particulier, l'application $T_e\pi$ induit un isomorphisme linéaire de T_eG/T_eH sur $T_{eH}(G/H)$.

La condition que H est plongé est cruciale. Par exemple, pour tout irrationnel $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, dans le groupe de Lie $G = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$, le sous-groupe de Lie immergé $H = \{(e^{2i\pi t}, e^{2i\pi\alpha t}) : t \in \mathbb{R}\}$ n'est pas plongé, et l'espace topologique quotient $H\backslash G$, qui est grossier et non dénombrable, n'est pas une variété.

Démonstration. Il découle du lemme 1.59 que l'espace topologique quotient G/H est séparé et à base dénombrable.

[Donnons une démonstration simplifiée de la séparation de l'espace topologique quotient G/H. L'application $\phi : (x, y) \mapsto x^{-1}y$ est continue et H est fermé (voir la première assertion du théorème 1.43), donc $\phi^{-1}(H)$ est un fermé de $G \times G$. Pour tous les $x, y \in G$ tels que $\pi(x) \neq \pi(y)$, il existe donc des voisinages ouverts U et V de x et y respectivement dans G tels que l'ouvert complémentaire de $\phi^{-1}(H)$ contienne $U \times V$. Puisque π est ouverte, $\pi(U)$

et $\pi(V)$ sont des voisinages ouverts de $\pi(x)$ et $\pi(y)$ respectivement, qui sont disjoints par construction.]

Soient p la dimension de H, n celle de G et Δ le champ de p-plans sur G, invariant à gauche, tel que $\Delta_e = T_eH$. Ce champ de p-plans est intégrable (voir les lignes précédant l'énoncé du théorème 1.41). Il est donc tangent à un feuilletage $\mathscr{F}$, dont les feuilles sont, par unicité, les translatés à gauche par G de la composante neutre de H. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Soit (U, φ) une carte locale feuilletée de ce feuilletage, où U est un voisinage de e et $\varphi : U \to \mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^{n-p}$ est un difféomorphisme C^∞ (respectivement analytique complexe) sur un ouvert produit, qui envoie le feuilletage $\mathscr{F}_{|U}$ sur le feuilletage dont les feuilles sont les sous-espaces horizontaux $(\mathbb{K}^p \times \{x\}) \cap \varphi(U)$. Quitte à réduire U, comme H est une sous-variété, pour tout g dans G, l'intersection $gH \cap U$ est vide ou ne contient qu'une seule feuille locale de $\mathscr{F}$ dans U. Notons $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^{n-p} \to \mathbb{K}^{n-p}$ la seconde projection. Alors $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi : U \to \mathbb{K}^{n-p}$ induit par passage au quotient une bijection $\overline{\mathrm{pr}_2 \circ \varphi}$ de $\pi(U)$ sur l'ouvert $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi(U)$ de $\mathbb{K}^{n-p}$. Comme π est continue et ouverte, cette bijection est un homéomorphisme. Alors la famille $\big(\pi(L_gU), \overline{\mathrm{pr}_2 \circ \varphi \circ L_g^{-1}}\,\big)_{g \in G}$ est un atlas de cartes C^∞ (respectivement analytique complexe) sur G/H, car les applications de transitions sont localement de la forme $x \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ \varphi \circ L_g^{-1} \circ L_{g'} \circ \varphi^{-1}(0, x)$, donc sont de classe C^∞ (respectivement analytique complexe).

L'application π est alors une submersion C^∞ (respectivement analytique complexe), car, lue dans les cartes locales précédentes, c'est juste une restriction de la seconde projection pr_2 :

$$\begin{array}{ccc} L_gU & \xrightarrow{\varphi \circ L_g^{-1}} & \mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^{n-p} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_2 \\ \pi(L_gU) & \xrightarrow{\overline{\mathrm{pr}_2 \circ \varphi \circ L_g^{-1}}} & \mathbb{K}^{n-p} \end{array} .$$

Montrons la propriété (i). Pour tout $x \in G/H$, puisque π est une submersion, il existe un voisinage ouvert V de x dans G/H et une section locale lisse σ de π définie sur V, c'est-à-dire une application $\sigma : V \to M$ de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) telle que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_V$. Le fait que l'action à gauche $\lambda : G \times G/H \to G/H$ soit C^∞ (respectivement analytique complexe) vient alors du fait que, en restriction à $G \times V$, on peut écrire

$$\lambda(g, g'H) = \pi(g\, \sigma(g'H)) .$$

Montrons la propriété (ii). Supposons que H est distingué. Si σ et σ' sont des sections locales lisses de π, alors l'application de $G/H \times G/H$ dans G/H, définie par $(xH, yH) \mapsto xy^{-1}H$, coïncide, sur le produit des domaines de définition de σ et σ', avec $(u, v) \mapsto \pi(\sigma(u)\, \sigma'(v)^{-1})$, qui est de classe C^∞ (respectivement analytique complexe). Donc G/H, muni des structures de variété quotient et de groupe quotient, est un groupe de Lie. La projection canonique, étant un morphisme de groupes et de classe C^∞ (respectivement analytique complexe), est bien un morphisme de groupes de Lie.

Puisque H est distingué dans G, nous avons $i_g(H) \subset H$ pour tout $g \in G$, donc en dérivant, $\mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ pour tout $g \in G$, et, en dérivant encore, $\mathrm{ad}\, X(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ pour tout X dans $\mathfrak{g}$. Donc $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Puisque π est un morphisme de groupes de Lie qui est une submersion, l'application tangente $T_e\pi$ est un morphisme surjectif d'algèbres de Lie, de noyau $\mathfrak{h}$, donc induit un isomorphisme entre l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et l'algèbre de Lie de G/H. $\square$

La remarque tautologique suivante permet de construire (par « transport de structure ») une structure de variété sur un ensemble, en exhibant celui-ci comme ensemble quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe de Lie plongé.

Remarque 1.61 *Soit G un groupe de Lie réel (respectivement complexe), agissant transitivement sur un ensemble E, tel que le stabilisateur G_x d'un point x de E soit un sous-groupe de Lie plongé de G (ou lorsque G est réel, de manière équivalente par le théorème de Cartan 1.43, un sous-groupe fermé). Alors il existe sur E une et une seule structure de variété C^∞ (respectivement analytique complexe) telle que*

- *l'action de G sur E soit de classe C^∞ (respectivement analytique complexe),*
- *la bijection canonique $G/G_x \to E$ soit un difféomorphisme C^∞ (respectivement analytique complexe).* □

Dans la partie 1.5.3 suivante, nous verrons que si E admettait une structure de variété C^∞ (respectivement analytique complexe) pour laquelle l'action de G fût C^∞ (respectivement analytique complexe), alors cette structure et celle construite dans la remarque précédente coïncideraient.

1.5.3 Actions transitives de groupes de Lie

La partie précédente montre en particulier qu'une variété homogène quotient G/H d'un groupe de Lie G par un sous-groupe de Lie plongé H est une variété homogène. Le but de cette partie est de montrer que, à difféomorphisme près, toute variété homogène est de cette forme. Le résultat suivant donne en plus une condition nécessaire et suffisante pour qu'une orbite d'une action lisse d'un groupe de Lie soit une sous-variété, auquel cas cette orbite est un espace homogène.

Théorème 1.62 *Soient M une variété C^∞ (respectivement analytique complexe), munie d'une action lisse d'un groupe de Lie réel (respectivement complexe) G, et $x \in M$.*

(1) L'application canonique $\Theta_x : G/G_x \to M$ définie par $\Theta_x(gG_x) = gx$ est une immersion C^∞ (respectivement analytique complexe) injective, d'image l'orbite $G \cdot x$ de x par G.

(2) L'orbite $G \cdot x$ est une sous-variété C^∞ (respectivement analytique complexe) si et seulement si elle est localement fermée.

(3) Si $G \cdot x$ est localement fermée, alors l'application canonique Θ_x est un difféomorphisme C^∞ (respectivement analytique complexe) de G/G_x dans la sous-variété $G \cdot x$.

(4) Si l'action est transitive, alors l'application canonique Θ_x est un difféomorphisme C^∞ (respectivement analytique complexe).

En particulier, si une orbite est fermée, alors c'est une sous-variété.

En appliquant ceci à M un groupe de Lie et G un sous-groupe de Lie immergé de M, la réciproque de la première assertion du théorème 1.43 en découle : un sous-groupe de Lie immergé fermé est plongé.

Démonstration. (1) Comme $\Theta = \Theta_x$ est obtenue par passage au quotient de l'application orbitale $\varphi_x : g \mapsto gx$ de classe C^∞ (respectivement analytique complexe), l'injection Θ est C^∞ (respectivement analytique complexe), voir le théorème 1.60 (v). Son image est $G \cdot x$ par construction. Montrons que Θ est une immersion, c'est-à-dire que $T_u\Theta$ est injective en tout point u de G/G_x. Par équivariance de Θ, il suffit de le vérifier pour $u = eG_x$, car pour

tout g dans G, les actions de g sur G/G_x et sur M sont des difféomorphismes C^∞, rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} G/G_x & \xrightarrow{\Theta} & M \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ G/G_x & \xrightarrow{\Theta} & M \end{array} .$$

Nous avons vu dans le lemme 1.58 que $\mathrm{Ker}\, T_e\varphi_x = T_eG_x$. Notons que la projection canonique $\pi : G \to G/G_x$ est une submersion et que $\varphi_x = \Theta \circ \pi$ (donc $T_e\varphi_x = T_{eG_x}\Theta \circ T_e\pi$). Si $X \in \mathrm{Ker}\, T_{eG_x}\Theta \subset T_{eG_x}(G/G_x)$, alors en choisissant Y tel que $T_e\pi(Y) = X$, nous avons $Y \in \mathrm{Ker}\, T_e\varphi_x = T_eG_x$. Or par le théorème 1.60 (iv), l'application $T_e\pi : T_eG \to T_{eG_x}(G/G_x)$ induit un isomorphisme linéaire $(T_eG)/(T_eG_x) \simeq T_{eG_x}(G/G_x)$. Donc $X = 0$ et $T_{eG_x}\Theta$ est injective, ce qui montre la première assertion.

(2) et (3) Nous avons rappelé dans le préambule que toute sous-variété est localement fermée.

Supposons que $G\cdot x$ soit localement fermée, donc localement compacte. Montrons que Θ est un homéomorphisme sur son image. Comme c'est une application C^∞ (respectivement analytique complexe) qui est une immersion injective par (1), l'application canonique Θ sera donc un plongement C^∞ (respectivement analytique complexe). Donc par les rappels du préambule, son image sera une sous-variété C^∞ (respectivement analytique complexe), et Θ sera un difféomorphisme C^∞ (respectivement analytique complexe) sur son image.

Si nous montrons que l'application orbitale $\varphi_x : G \to G \cdot x$ alors l'application $\Theta_x : G/G_x \to G \cdot x$ sera une bijection continue et ouverte (car $\Theta_x(U) = \varphi_x(\pi^{-1}(U))$ pour tout ouvert U de G/G_x), donc un homéomorphisme.

Soit U un voisinage ouvert de e dans G, montrons que Ux est un voisinage ouvert de x dans $G \cdot x$. Ceci concluera par changement de point base dans l'orbite : pour tout g dans G, la partie Ug est un voisinage ouvert de g, et nous avons $\Theta_x(Ug) = \Theta_{gx}(U)$ et $G \cdot (gx) = G \cdot x$.

Soit V un voisinage compact de e dans G tel que $V^{-1}V \subset U$. Alors $Vx = \varphi_x(V)$ est compact (car φ_x est continue et $G\cdot x$ séparé), donc fermé dans $G\cdot x$. Comme G est séparable, il existe une suite $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans G telle que $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_iV$. Donc $G \cdot x = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_i(Vx)$. Si Vx est d'intérieur vide, alors l'espace localement compact non vide $G \cdot x$ est une union dénombrable d'ensembles fermés d'intérieur vide, ce qui contredit le théorème de Baire. Soit donc g dans V tel que gx soit un point intérieur de Vx. Alors $g^{-1}Vx$ est un voisinage de x, contenu dans Ux, ce qui montre le résultat.

(4) Ceci découle immédiatement de (3). □

Corollaire 1.63 *Soient M une variété C^∞ (respectivement analytique complexe), munie d'une action lisse d'un groupe de Lie réel (respectivement complexe) compact G, et $x \in M$. Alors l'orbite $G \cdot x$ est une sous-variété C^∞ (respectivement analytique complexe) compacte de M, et l'application canonique $\Theta_x : G/G_x \to G \cdot x$ est un difféomorphisme C^∞ (respectivement analytique complexe).*

Démonstration. Puisque G est compact et l'action continue (et M séparée), toute orbite est compacte, donc fermée, et le théorème précédent s'applique. □

1.5.4 Variétés quotients

Le résultat suivant implique le théorème 1.60 en prenant pour M un groupe de Lie (mais la démonstration que nous en donnons utilise ce théorème 1.60).

Théorème 1.64 *Soit M une variété C^∞ (respectivement analytique complexe), munie d'une action (à gauche) lisse, libre et propre d'un groupe de Lie réel (respectivement complexe) G. Alors l'espace topologique quotient $G\backslash M$ admet une et une seule structure de variété C^∞ (respectivement analytique complexe) telle que la projection canonique $\pi : M \to G\backslash M$ soit une submersion C^∞ (respectivement analytique complexe). De plus,*

(i) si M est de dimension n, alors $\dim(G\backslash M) = n - \dim G$;

(ii) pour tout x dans M, l'orbite $G \cdot x$ est une sous-variété C^∞ (respectivement analytique complexe) et l'application $T_x\pi : T_xM \to T_{G\cdot x}(G\backslash M)$ induit un isomorphisme linéaire $(T_xM)/(T_x(G \cdot x)) \simeq T_{G\cdot x}(G\backslash M)$;

(iii) pour toute variété N de classe C^k où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (respectivement $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{C}}\}$), une application $f : G\backslash M \to N$ est de classe C^k si et seulement si $f \circ \pi$ l'est.

Ce théorème peut être renforcé de la manière suivante. Notons G un groupe de Lie réel (respectivement complexe), X une variété C^∞ (respectivement analytique complexe) munie d'une action lisse de G, $\pi : X \to G\backslash X$ la projection canonique et $\mathscr{R} \subset X \times X$ la relation d'équivalence « être dans la même orbite ». Le résultat suivant, dû à Godement, est démontré dans [Die2, 16.10.3]. Nous n'en donnerons pas de démonstration, car nous ne nous en servirons pas dans ce texte.

Théorème 1.65 *Si $\mathscr{R}$ est une sous-variété fermée de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) de $X \times X$, alors il existe une et une seule structure de variété différentielle de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) sur l'espace topologique quotient $G\backslash X$, telle que π soit une submersion C^∞ (respectivement analytique complexe).* □

Lorsqu'elle existe, cette structure de variété sur $G\backslash X$ est appelée la structure de *variété quotient* de X par l'action de G.

Ce théorème 1.65 implique le théorème 1.64, car si l'action est libre et propre, alors l'application $G \times X \to X \times X$ définie par $(g, x) \mapsto (x, gx)$ est une immersion C^∞ (respectivement analytique complexe) injective et propre, donc un plongement C^∞ (respectivement analytique complexe) d'image fermée, et son image est exactement $\mathscr{R}$.

Remarque. L'hypothèse que $\mathscr{R}$ soit une sous-variété fermée est nécessaire pour l'existence de cette variété quotient. En effet, l'application $\pi \times \pi : (X \times X) \to (G\backslash X \times G\backslash X)$ est une submersion car π l'est. La diagonale Δ de $G\backslash X \times G\backslash X$ est une sous-variété C^∞ fermée de $G\backslash X \times G\backslash X$. Donc $\mathscr{R} = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta)$ est une sous-variété C^∞, fermée, de $X \times X$, par les propriétés des submersions.

Démonstration du théorème 1.64. Nous avons montré dans le lemme 1.59 que l'espace topologique $G\backslash M$ est séparé et à base dénombrable.

Montrons que pour tout $x \in M$, l'orbite $G \cdot x$ est localement fermée. En effet, soit U un voisinage ouvert de x d'adhérence compacte. Puisque l'action est propre, $K = \{g \in G : gx \in \overline{U}\}$ est un compact de G. Donc $K \cdot x$ est un compact de M et $(G \cdot x) \cap U = (K \cdot x) \cap U$ est fermé dans U. Par le théorème 1.62, toute orbite $G \cdot x$ est donc une sous-variété.

Notons p la dimension de G et n celle de M (nous pouvons supposer que M est connexe, donc de dimension constante). Définissons le champ de p-plans Δ sur M par

$$x \mapsto \Delta_x = T_x(G \cdot x) = T_e\varphi_x(T_eG) \ ,$$

qui est C^∞ (respectivement analytique complexe). Comme le crochet de deux champs de vecteurs tangents à une sous-variété est encore tangent à cette sous-variété, le champ Δ est intégrable, par le théorème de Frobénius : il est donc tangent à un feuilletage $\mathscr{F}$ de classe C^∞ (respectivement analytique complexe), dont les feuilles sont, par unicité, les composantes connexes des orbites de G. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Pour tout $x \in M$, soit (U_x, φ_x) une carte locale feuilletée de ce feuilletage, où U_x est un voisinage d'adhérence compacte de x et $\varphi_x : U_x \to \mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^{n-p}$ est un difféomorphisme C^∞ (respectivement analytique complexe) sur un ouvert produit, qui envoie le feuilletage $\mathscr{F}_{|U_x}$ sur le feuilletage dont les feuilles sont les sous-espaces horizontaux $(\mathbb{K}^p \times \{*\}) \cap \varphi_x(U_x)$.

Montrons que quitte à réduire U_x, l'intersection de toute orbite avec U_x est vide ou ne contient qu'une seule feuille locale de $\mathscr{F}$ dans U_x. Par continuité de l'action, il existe un voisinage ouvert connexe par arcs V de e dans G tel que si $y \in U_x$ est suffisamment proche de x, alors Vy est contenu dans U_x (et donc dans la feuille locale de $\mathscr{F}$ dans U_x passant par y). Si ce que nous voulons montrer n'est pas vrai, il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans U_x convergeant vers x et une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $G - V$ telles que la suite $(g_nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers x. Puisque l'action est propre et que l'adhérence de U_x est compacte, quitte à extraire, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $g \in G - V$. Mais par continuité, nous avons $gx = x$. Puisque l'action est libre, nous avons $g = e$, ce qui contredit le fait que $g \notin V$.

Notons $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^{n-p} \to \mathbb{K}^{n-p}$ la seconde projection. Alors $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_x : U_x \to \mathbb{K}^{n-p}$ induit par passage au quotient une bijection $\overline{\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_x}$ de $\pi(U_x)$ sur l'ouvert $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_x(U_x)$ de $\mathbb{K}^{n-p}$. Comme π est continue et ouverte, cette bijection est un homéomorphisme. Alors la famille

$$\big(\pi(U_x), \overline{\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_x}\ \big)_{x\in M}$$

est un atlas de cartes C^∞ (respectivement analytique complexe) sur $G\backslash M$, car l'application de transition des cartes $(\pi(U_x), \overline{\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_x})$ et $(\pi(U_y), \overline{\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_y})$ est localement de la forme $z \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_x \circ \varphi_y^{-1}(0, z)$, donc est de classe C^∞ (respectivement analytique complexe).

L'application π est alors une submersion C^∞ (respectivement analytique complexe), car, lue dans les cartes locales précédentes, c'est juste une restriction de la seconde projection pr_2 :

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{\varphi_x} & \mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^{n-p} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_2 \\ \pi(U_x) & \xrightarrow{\overline{\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_x}} & \mathbb{K}^{n-p} \end{array} \quad .$$

Pour montrer l'unicité, il suffit de montrer que s'il existe deux structures C^∞ (respectivement analytiques complexes) sur $G\backslash M$ telles que π soit une submersion, alors l'identité de $G\backslash M$ est un difféomorphisme C^∞ (respectivement analytique complexe) entre ces deux structures. Or, par le théorème de forme normale des submersions, pour tout x dans $G\backslash M$, il existe un voisinage V de x dans $G\backslash M$ et une section locale de π sur V, c'est-à-dire une application $\sigma : V \to M$ de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) telle que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}$. L'unicité découle alors du fait que localement, l'identité coïncide avec $\pi \circ \sigma$, et que π est C^∞ (respectivement analytique complexe) pour une structure, et σ est C^∞ (respectivement analytique complexe) pour l'autre.

Mis à part le fait déjà vu que $G \cdot x$ est une sous-variété, les trois dernières assertions ne sont que des propriétés générales des submersions, voir le lemme 0.2. $\square$

1.5.5 Exemples de variétés homogènes

(1) *Les sphères.* Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n+1)$ (respectivement spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n+1)$) agit transitivement par rotations sur la sphère unité $\mathbb{S}_n$ de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^{n+1}$. En effet, étant donné deux vecteurs unitaires, l'application qui vaut l'identité sur le supplémentaire orthogonal d'un plan vectoriel réel contenant ces deux vecteurs, et la rotation d'angle égal à l'angle entre ces deux vecteurs sur ce plan, envoie le premier vecteur sur le second. L'application de $\mathrm{O}(n)$ (respectivement $\mathrm{SO}(n)$) dans $\mathrm{O}(n+1)$ (respectivement $\mathrm{SO}(n+1)$) définie par

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de groupes de Lie de $\mathrm{O}(n)$ (respectivement $\mathrm{SO}(n)$) sur le stabilisateur de $(1, 0, \ldots, 0)$, par lequel nous identifions $\mathrm{O}(n)$ (respectivement $\mathrm{SO}(n)$) avec son image. Donc les applications orbitales en $(1, 0, \ldots, 0)$ induisent des C^∞-difféomorphismes

$$\mathbb{S}_n \simeq \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n) \simeq \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) \ .$$

Le groupe unitaire $\mathrm{U}(n+1)$ (respectivement spécial unitaire $\mathrm{SU}(n+1)$), agit transitivement sur la sphère unité $\mathbb{S}_{2n+1}$ de l'espace hermitien usuel $\mathbb{C}^{n+1}$. En effet, considérons un plan vectoriel complexe P contenant deux vecteurs unitaires, muni d'une base orthonormée telle que ces deux vecteurs aient respectivement pour coordonnées $(1, 0)$ et (α, β), avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. La matrice de l'application linéaire qui vaut l'identité sur le supplémentaire orthogonal de P, et admet comme matrice sur P, dans la base choisie, la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} ,$$

est un élément de $\mathrm{SU}(n+1)$ qui envoie le premier vecteur sur le second. L'application de $\mathrm{U}(n)$ (respectivement $\mathrm{SU}(n)$) dans $\mathrm{U}(n+1)$ (respectivement $\mathrm{SU}(n+1)$) définie par

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de groupes de Lie de $\mathrm{U}(n)$ (respectivement $\mathrm{SU}(n)$) sur le stabilisateur du point $(1, 0, \ldots, 0)$, par lequel nous identifions $\mathrm{U}(n)$ (respectivement $\mathrm{SU}(n)$) avec son image. Donc les applications orbitales en $(1, 0, \ldots, 0)$ induisent des C^∞-difféomorphismes

$$\mathbb{S}_{2n+1} \simeq \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(n) \simeq \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n) \ .$$

(2) *Les espaces projectifs.* L'action par rotations du groupe orthogonal $\mathrm{O}(n+1)$ (respectivement spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n+1)$) sur la sphère unité $\mathbb{S}_n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ préserve l'antipodie, donc induit une action C^∞ de $\mathrm{O}(n+1)$ (respectivement $\mathrm{SO}(n+1)$) sur l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_n/\{\pm 1\}$. Le stabilisateur du point $\pm(1, 0, \ldots, 0)$ est le sous-groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n+1) \right\} \quad (\text{resp. } \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\det A} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(n+1) \right\})$$

qui s'identifie de manière évidente au groupe de Lie $\{\pm 1\} \times \mathrm{O}(n)$ (respectivement $\mathrm{O}(n)$). Donc les applications orbitales en $\pm(1, 0, \ldots, 0)$ induisent des C^∞-difféomorphismes

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{O}(n+1)/(\{\pm 1\} \times \mathrm{O}(n)) \simeq \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n) \ .$$

(3) *Les variétés grassmanniennes.* Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n.

Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ agit sur la variété grassmannienne $\mathscr{G}_k(V)$ des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension k de V, par l'application qui à un sous-espace vectoriel C et à un automorphisme linéaire g associe le sous-espace vectoriel $g(C)$.

Proposition 1.66 *Cette action du groupe de Lie* $\mathrm{GL}(V)$ *sur la variété grassmannienne* $\mathscr{G}_k(V)$ *est lisse.*

Démonstration. Par définition d'une action, il suffit de montrer que pour tout g dans $\mathrm{GL}(V)$, l'application de $\mathscr{G}_k(V)$ dans $\mathscr{G}_k(V)$ définie par $C \mapsto g(C)$ est C^∞ (respectivement analytique complexe), et que l'action $(g, C) \mapsto g(C)$ est lisse en (e, A) pour tout A dans $\mathscr{G}_k(V)$.

Rappelons que l'atlas de cartes de $\mathscr{G}_k(V)$ est l'atlas de cartes C^∞ (respectivement analytique complexe) maximal contenant l'atlas de cartes $((U_B, \varphi_{A,B}))_{A,B}$ de $\mathscr{G}_k(V)$, où

- A parcourt $\mathscr{G}_k(V)$ et B parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels supplémentaires à A,
- U_B est l'ouvert de $\mathscr{G}_k(V)$ des sous-espaces vectoriels supplémentaires à B,
- $\varphi_{A,B}$ est l'application de U_B dans $\mathscr{L}(A, B) \simeq \mathbb{K}^{k(n-k)}$ telle que $\varphi_{A,B}^{-1}(f)$ soit le graphe de l'application linéaire $f : A \to B$ dans la décomposition $V = A \oplus B$:

$$\varphi_{A,B}^{-1}(f) = (\mathrm{id} + f)(A) = \{x + f(x) \ : \ x \in A\} \ .$$

Pour tout g dans $\mathrm{GL}(V)$ et toute telle carte $(U_B, \varphi_{A,B})$, la restriction à U_B de l'action de g sur $\mathscr{G}_k(V)$ est C^∞ (respectivement analytique complexe), car le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
C & \mapsto & g(C) \\
U_B & \longrightarrow & U_{g(B)} \\
{\scriptstyle \varphi_{A,B}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \varphi_{g(A),g(B)}} \\
\mathscr{L}(A, B) & \longrightarrow & \mathscr{L}(g(A), g(B)) \\
f & \mapsto & g \circ f \circ g^{-1}
\end{array}$$

est commutatif, et l'application $f \mapsto g \circ f \circ g^{-1}$ est de classe C^∞ (respectivement analytique complexe).

Soient $(U_B, \varphi_{A,B})$ une carte comme ci-dessus, U un voisinage de e dans G et U'_B un voisinage de A contenu dans U_B, tels que pour tous les g dans U et C dans U'_B, le sous-espace vectoriel $g(C)$ soit supplémentaire à B. Notons pr_1 la projection de V sur A parallèlement à B, et pr_2 la projection de V sur B parallèlement à A. Remarquons que si $C = (\mathrm{id} + f)(A)$ est le graphe d'une application linéaire $f : A \to B$, alors $g(C) = g \circ (\mathrm{id} + f)(A)$. Pour tous les g dans U et tous les f dans l'ouvert $\varphi_{A,B}(U'_B)$ de $\mathscr{L}(A, B)$, l'application $\psi(g, f) = \mathrm{pr}_1 \circ g \circ (\mathrm{id} + f)$ est un isomorphisme linéaire de A dans A, et dépend

de manière C^∞ (respectivement analytique complexe) de (g, f), donc son inverse aussi. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
(g, C) & \mapsto & g(C) \\
U \times U'_B & \longrightarrow & U_B \\
{\scriptstyle \mathrm{id}\times\varphi_{A,\,B}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{A,\,B}} \\
U \times \varphi_{A,\,B}(U'_B) & \longrightarrow & \mathscr{L}(A, B) \\
(g, f) & \mapsto & \mathrm{pr}_2 \circ g \circ (\mathrm{id} + f) \circ \psi(g, f)^{-1}
\end{array}$$

est commutatif : puisque $\psi(g, f) = \mathrm{pr}_1 \circ g \circ (\mathrm{id} + f)$, nous avons

$$(\mathrm{id} + \mathrm{pr}_2 \circ g \circ (\mathrm{id} + f) \circ \psi(g, f)^{-1})(\psi(g, f)(x)) = g \circ (\mathrm{id} + f)(x)$$

pour tous les $g \in U$, $f \in \varphi_{A,\,B}(U'_B)$ et $x \in A$, et la commutativité découle alors du fait que $\psi(g, f)(A) = A$: pour tout $(g, C) \in U \times U'_B$, si $f = \varphi_{A,\,B}(C)$, alors

$$g(C) = g((\mathrm{id} + f)(A)) = (\mathrm{id} + \mathrm{pr}_2 \circ g \circ (\mathrm{id} + f) \circ \psi(g, f)^{-1})(A) \ .$$

Donc l'application $(g, C) \mapsto g(C)$ est C^∞ (respectivement analytique complexe) en (e, A). $\square$

Supposons $V = \mathbb{K}^n$. Le stabilisateur du sous-espace vectoriel $\mathbb{K}^k \times \{0\}$ dans le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est le sous-groupe triangulaire supérieur par blocs

$$P_{n,k} = \Big\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \ : \ A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{K}) \Big\} \ .$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le sous-groupe de Lie plongé $\mathrm{O}(n)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ agit aussi transitivement sur $\mathscr{G}_k(\mathbb{R}^n)$, de stabilisateur du sous-espace $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ égal à

$$\Big\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n) \ : \ A \in \mathrm{O}(k) \Big\} \ ,$$

qui s'identifie de manière évidente au groupe de Lie $\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$. Donc les applications orbitales induisent des C^∞-difféomorphismes (analytique complexe pour le premier si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$\mathscr{G}_k(\mathbb{K}^n) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/P_{n,k} \quad \text{et} \quad \mathscr{G}_k(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)) \ .$$

Lorsque $k = 1$, nous retrouvons le cas des espaces projectifs.

Exercice E.15 *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), notons $\mathrm{Scal}(V)$ la sous-variété C^∞ de l'espace vectoriel réel des formes bilinéaires (respectivement sesquilinéaires), symétriques (respectivement hermitiennes) et définies positives de $V \times V$ dans $\mathbb{K}$. Montrer que l'application de $\mathrm{Scal}(V) \times \mathscr{G}_k(V)$ dans $\mathscr{G}_{n-k}(V)$, qui à un couple $(\langle \cdot, \cdot \rangle, F)$ d'un produit scalaire sur V et d'un sous-espace vectoriel F de dimension k de V associe l'orthogonal $F^\perp = \{x \in V \ : \ \forall y \in F, \ \ \langle x, y \rangle = 0\}$ de F pour ce produit scalaire, est de classe C^∞ (respectivement analytique complexe).*

(4) *Le demi-plan de Poincaré.* Le groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit de manière C^∞ sur le demi-plan supérieur $\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}\ z > 0\}$ qui est un ouvert de $\mathbb{C}$, donc une variété C^∞, par les homographies

$$(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \ .$$

En effet, $cz + d$ est non nul si $\mathrm{Im}\ z > 0$ et $c, d \in \mathbb{R}$, et $\mathrm{Im}\,(\frac{az+b}{cz+d}) = \frac{\mathrm{Im}\ z}{|cz+d|^2}$. Donc cette application est bien définie et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ préserve $\mathscr{H}$. Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'une action C^∞. Le stabilisateur du point i est le sous-groupe

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ : \ \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\} .$$

Donc l'application orbitale en i induit un C^∞-difféomorphisme

$$\mathscr{H} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) \ .$$

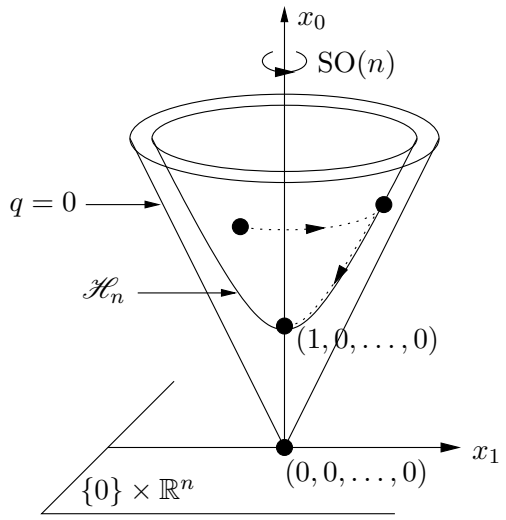
(5) *Les espaces hyperboliques.* Il est facile de vérifier que le sous-espace topologique de $\mathbb{R}^{n+1}$, défini par

$$\mathscr{H}_+^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_0 > 0, -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1\} \ ,$$

et appelé le *demi-hyperboloïde supérieur* de dimension n, est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Considérons le sous-groupe de Lie plongé $\mathrm{SO}_0(1,n)$ de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$, qui est la composante neutre du sous-groupe de Lie plongé $\mathrm{SO}(1,n)$ des éléments de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ préservant la forme quadratique $q = -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. La restriction à $\mathrm{SO}_0(1,n) \times \mathscr{H}_+^n$ de l'action linéaire de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ est une action C^∞ de $\mathrm{SO}_0(1,n)$ sur $\mathscr{H}_+^n$, car l'hyperboloïde $\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1\}$, qui est préservé par $\mathrm{SO}(1,n)$, possède deux composantes connexes (dont l'une est $\mathscr{H}_+^n$), qui, par connexité, sont toutes les deux préservées par $\mathrm{SO}_0(1,n)$. Le stabilisateur du point $(1, 0, \dots, 0)$ est le sous-groupe de Lie plongé

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \ : \ A \in \mathrm{SO}(n) \right\} ,$$

qui s'identifie de manière évidente avec $\mathrm{SO}(n)$.



Tout point de $\mathscr{H}_+^n$ peut être envoyé, par un élément de ce stabilisateur $\mathrm{SO}(n)$, sur un point de l'hyperbole d'équations $x_2 = \cdots = x_n = 0$ et $-x_0^2 + x_1^2 = -1$. Tout point de cette hyperbole s'écrit $(\cosh t, \sinh t, 0, \ldots, 0)$ pour un t dans $\mathbb{R}$. Ce point peut être envoyé sur le point $(1, 0, \ldots, 0)$ par l'élément

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-2} \end{pmatrix} ,$$

qui appartient à $\mathrm{SO}_0(1,n)$. Donc l'action de $\mathrm{SO}_0(1,n)$ sur $\mathscr{H}_+^n$ est transitive. Par conséquent, l'application orbitale en $(1, 0, \ldots, 0)$ induit un C^∞-difféomorphisme

$$\mathscr{H}_+^n \simeq \mathrm{SO}_0(1,n)/\mathrm{SO}(n) .$$

(6) *L'espace des produits scalaires unimodulaires.* Notons $\mathscr{Q}_n$ l'espace des formes quadratiques réelles q sur $\mathbb{R}^n$, définies positives et dont le déterminant de la forme bilinéaire associée

$$b_q(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big)$$

vaut 1. L'application $q \mapsto b_q$ identifie $\mathscr{Q}_n$ avec une sous-variété C^∞ de codimension 1 de l'espace vectoriel de dimension finie des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n$ (car l'application déterminant sur l'ouvert de cet espace vectoriel formé des formes définies positives est une submersion), donc munit $\mathscr{Q}_n$ d'une structure de variété C^∞.

Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^n)$ agit à droite sur $\mathscr{Q}_n$ par $(g,q) \mapsto q \circ g$. Cette action est évidemment C^∞, car, en passant aux matrices (dans la base canonique), il s'agit tout simplement de l'application C^∞

$$(M_g, B_q) \mapsto {}^tM_g B_q M_g ,$$

où B_q est la matrice de b_q, de sorte que $q(x) = {}^tX B_q X$ si X est le vecteur colonne de x, et où M_g est la matrice de g.

Le stabilisateur du produit scalaire euclidien usuel q_0 est le sous-groupe de Lie plongé $\mathrm{SO}(q_0) \simeq \mathrm{SO}(n)$ de $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Par le théorème de réduction des formes quadratiques définies positives, le groupe $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ agit transitivement sur l'ensemble des formes quadratiques réelles, définies positives, sur $\mathbb{R}^n$, donc $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^n)$ agit transitivement sur $\mathscr{Q}_n$. Par conséquent, l'application orbitale en q_0 induit un C^∞-difféomorphisme

$$\mathscr{Q}_n \simeq \mathrm{SO}(n)\backslash\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

(l'action étant à droite, il s'agit bien du quotient à gauche par $\mathrm{SO}(n)$).

Nous renvoyons à [MnT] pour de nombreux autres exemples d'espaces homogènes, ainsi que [Hel, Ebe2].

1.6 Exercices supplémentaires

Exercice E.16 (Classification des groupes de Lie abéliens) Soit G un groupe de Lie réel abélien connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

(1) Montrer que $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est un revêtement de groupes de Lie, où $\mathfrak{g}$ est munie de sa structure de groupe de Lie additif.

(2) En déduire que le groupe de Lie G est isomorphe à un groupe de Lie $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{S}_1)^m$ où $n, m \in \mathbb{N}$.

Exercice E.17 (1) Déterminer, à isomorphisme près, toutes les algèbres de Lie réelles de dimension 2. Quelles sont celles qui sont nilpotentes ou résolubles ?

(2) Pour chacune d'entre elles, déterminer, à isomorphisme près, les groupes de Lie réels connexes dont l'algèbre de Lie lui est isomorphe.

Exercice E.18 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie, $B : (X, Y) \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, Y)$ sa forme de Killing et

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \{D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \ : \ \forall\, X, Y \in \mathfrak{g}, \ \ D([X, Y]) = [D(X), Y)] + [X, D(Y)]\}$$

la sous-algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ des endomorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$.

(1) Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ des automorphismes d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ est un sous-groupe fermé du groupe orthogonal

$$\mathrm{O}(B) = \{f \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \ : \ \forall\, X, Y \in \mathfrak{g}, \ \ B(f(X), f(Y)) = B(X, Y)\}\ .$$

(2) Montrer que si $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, alors l'exponentielle e^D de l'endomorphisme D de $\mathfrak{g}$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe de Lie plongé de $\mathrm{O}(B)$, d'algèbre de Lie $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

(3) Supposons que $\mathfrak{g}$ soit semi-simple.
(i) Soit $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.
a) Montrer que $D \circ (\mathrm{ad}\, Y) = \mathrm{ad}(D(Y)) + (\mathrm{ad}\, Y) \circ D$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$.
b) Montrer qu'il existe un et un seul $X_D \in \mathfrak{g}$ tel que $B(X_D, Y) = \mathrm{tr}(D \circ \mathrm{ad}\, Y)$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$.
c) Montrer que $B(D(Y), Z) = B([X_D, Y], Z)$ pour tous les $Y, Z \in \mathfrak{g}$.
d) En déduire que $D = \mathrm{ad}\, X_D$.
(ii) En déduire que l'application $X \mapsto \mathrm{ad}\, X$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathfrak{g}$ et $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

(4) Si B est définie négative, montrer que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est un groupe de Lie compact, d'algèbre de Lie semi-simple et isomorphe à $\mathfrak{g}$.

Exercice E.19 Soient G un groupe de Lie réel connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

(i) B est définie négative ; (ii) $\mathrm{Ad}\, G$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ et le centre de G est discret.

Exercice E.20 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie et

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ \forall\, Y \in \mathfrak{g}, \ \ [X, Y] = 0\}$$

son centre. Montrer que les conditions suivantes sur $\mathfrak{g}$ sont équivalentes (nous dirons alors que $\mathfrak{g}$ est *réductive*), et qu'elles sont vérifiées par l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ du groupe de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:

(i) l'algèbre de Lie dérivée $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est semi-simple et $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$;

(ii) il existe un idéal semi-simple $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$;

(iii) tout idéal abélien I de $\mathfrak{g}$ est contenu dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \{0\}$.

Exercice E.21 Le *groupe de Heisenberg* (de dimension 3) est le sous-groupe G de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices triangulaires supérieures unipotentes (c'est-à-dire dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1).

(1) Montrer que G est un sous-groupe de Lie plongé du groupe de Lie réel $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, isomorphe au groupe de Lie dont la variété est $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ et la loi

$$(z,v)\cdot(z',v') = (z+z', v+v'+\mathrm{Im}(z\overline{z'})\,)\ .$$

(2) Montrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est, à isomorphisme près, l'unique algèbre de Lie réelle nilpotente non abélienne de dimension 3.

(3) Montrer que $\mathfrak{g}$ admet une base vectorielle (X,Y,Z) telle que

$$[X,Y] = Z \quad \text{et} \quad [X,Z] = [Y,Z] = 0\ .$$

(4) Montrer que le champ de plans Δ sur G invariant à gauche tel que $\Delta_e = \mathrm{Vect}\{X,Y\}$ n'est pas intégrable. En déduire que le champ de vecteurs Δ' sur $\mathbb{R}^3$ défini par

$$(x_1,x_2,x_3) \mapsto \mathrm{Vect}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$$

n'est pas intégrable.

(5) Montrer que l'application $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0,+\infty[$, qui à (x,y) dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ associe la borne inférieure des longueurs des courbes $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ qui sont continues et C^1 par morceaux et dont les vecteurs vitesses (à droite et à gauche en tout point singulier) appartiennent à Δ' en tout temps $t \in [0,1]$, est une distance dans $\mathbb{R}^3$, et montrer que sa dimension de Hausdorff est 4. Cette distance est appelée une *distance de Carnot-Carathéodory*, voir [Gro2].

Exercice E.22 (1) Soit $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il est conjugué dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ à l'un des trois suivants

$$\left(a_t = \begin{pmatrix} e^{c\,t} & 0 \\ 0 & e^{-c\,t}\end{pmatrix}\right)_{t\in\mathbb{R}},\quad \left(u_t = \begin{pmatrix} 1 & c\,t \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)_{t\in\mathbb{R}},\quad \left(k_t = \begin{pmatrix} \cos(c\,t) & -\sin(c\,t) \\ \sin(c\,t) & \cos(c\,t)\end{pmatrix}\right)_{t\in\mathbb{R}}\ ,$$

où $c \in \mathbb{R}$. Nous supposons dans la suite de cet exercice que $c \neq 0$, et nous dirons que $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est respectivement *hyperbolique*, *parabolique* et *elliptique*.

(2) Soit $Z \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ tel que $g_t = \exp(tZ)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si B est la forme de Killing de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, faire le lien entre le signe de $B(Z,Z)$ et le caractère hyperbolique, parabolique ou elliptique de $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

(3) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{D}_2$ où $\mathbb{D}_2$ est le disque ouvert unité de l'espace euclidien standard $\mathbb{R}^2$. Dessiner $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, indiquer l'image de l'exponentielle et les ensembles de points qui appartiennent à un sous-groupe à un paramètre hyperbolique, parabolique ou elliptique.

(4) Notons $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ le revêtement universel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, et $\widetilde{\exp} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ son application exponentielle. Montrer que si $Z \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ vérifie $B(Z,Z) < 0$, alors l'image de $t \mapsto \widetilde{\exp}(tZ)$ contient le centre de $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$. Existe-t-il des sous-groupes compacts connexes non triviaux dans $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$? Dessiner $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ et indiquer l'image de l'exponentielle $\widetilde{\exp}$.

Exercice E.23 (1) Montrer qu'il existe une action lisse et transitive de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur le cercle $\mathbb{S}_1$. Montrer qu'il n'existe pas d'action lisse non triviale de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur la droite réelle. Montrer que toute action lisse de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur le cercle est triviale ou transitive.

(2) Montrer qu'il n'existe pas d'action lisse et transitive de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur la sphère $\mathbb{S}_2$ (Rappelons que tout champ de vecteurs lisse sur $\mathbb{S}_2$ s'annule. S'il existait une action lisse et transitive de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{S}_2$, montrer que le stabilisateur de tout point contient à la fois un sous-groupe à un paramètre hyperbolique, parabolique et elliptique.)

Exercice E.24 Tous les groupes et algèbres de Lie dans ce problème sont réels. Considérons les sous-groupes suivants de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, où $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ est un paramètre :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \,:\, s \in \mathbb{R} \right\}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,:\, u \in \mathbb{R} \right\},$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^s & u \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \,:\, (s,u) \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad G_c = \left\{ \begin{pmatrix} e^{nc} & u \\ 0 & e^{-nc} \end{pmatrix} \,:\, n \in \mathbb{Z},\ u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Considérons le morphisme de groupes $\rho : G \to (\mathbb{R}, +)$ défini par $\begin{pmatrix} e^s & u \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \mapsto s$.

(1) Soient G' un groupe de Lie et H' un sous-groupe de Lie plongé de G'.

a) Montrer que l'intersection de deux sous-groupes de Lie plongés de G' est un sous-groupe de Lie plongé de G'.

b) Montrer que pour tous les $g \in G'$, les variétés homogènes quotients G'/H' et $G'/(gH'g^{-1})$ sont difféomorphes.

(2) Calculer la forme de Killing de G. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est-elle semi-simple ?

(3) Soit H un sous-groupe fermé non discret de G.

a) Montrer que H est connexe si et seulement s'il existe $g \in G$ tel que gHg^{-1} est égal à G, A ou U.

b) En discutant suivant que le morphisme ρ est injectif ou pas, montrer que H n'est pas connexe si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $g \in G$ tel que gHg^{-1} est égal à G_c.

c) Montrer que les espaces homogènes G/A et G/U ne sont pas compacts.

(4) Soit Γ un sous-groupe discret non trivial de G. En utilisant le morphisme ρ, montrer qu'il existe $g \in G$ et $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ tels que $g\Gamma g^{-1}$ est égal à

$$\Gamma_c = \left\{ \begin{pmatrix} e^{nc} & 0 \\ 0 & e^{-nc} \end{pmatrix} \,:\, n \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{ou} \quad \Gamma_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,:\, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(5) Montrer qu'il n'existe aucune action lisse et transitive du groupe de Lie G sur une surface compacte Σ.

Exercice E.25 (Théorème de Noether) Une 2-forme différentielle ω sur une variété lisse W, qui est non dégénérée en tout point et fermée, est appelée une *forme symplectique* sur W. Une *variété symplectique* (W, ω) est une variété lisse W munie d'une forme symplectique ω. Un *hamiltonien* sur une variété lisse W est une application lisse $H : W \to \mathbb{R}$. Le *champs de vecteurs (hamiltonien)* associé à un hamiltonien H sur W est l'unique champ de vecteurs X_H sur W tel que

$$dH = -i_{X_H}\omega \ .$$

Une action lisse d'un groupe de Lie réel G sur une variété lisse W est dite *hamiltonienne* s'il existe une application linéaire J de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G dans $\mathrm{C}^\infty(W;\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteur $\xi_W : x \mapsto \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp(t\xi)x$ sur W coïncide avec le champs de vecteurs hamiltonien $X_{J(\xi)}$. Notons $\mathbf{J}$ l'application de W dans le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ définie par $\mathbf{J}(x)(\xi) = J(\xi)(x)$.

(1) Soit (W, ω) une variété symplectique, munie d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie G, et soit H un hamiltonien G-invariant sur W. Montrer que $\mathbf{J}$ est invariante par le flot de X_H.

(2) Un système mécanique est soumis à des forces dérivant d'un potentiel invariant par les rotations autour d'un axe Δ. Montrer que l'évolution de ce système préserve le moment cinétique autour de Δ.

Exercice E.26 Soit G un groupe de Lie réel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$.

(1) Soit M une variété lisse munie d'une action lisse $\cdot$ de G. Pour tout X dans $\mathfrak{g}$, appelons *champ de vecteurs (fondamental)* associé à X le champ de vecteurs X_M sur M défini par

$$X_M : x \mapsto \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp(tX) \cdot x \ .$$

a) Montrer que $[X_M, Y_M] = -[X, Y]_M$ pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$.

b) Soient $x \in M$ et $\mathfrak{g}_x$ l'algèbre de Lie du stabilisateur de x dans G. Montrer que l'application $X \mapsto X_M(x)$ induit un isomorphisme linéaire de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x$ dans $T_x(G \cdot x)$.

(2) a) Montrer que l'application[12] $g \mapsto {}^t(\mathrm{Ad}(g^{-1}))$ de G dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$ est une action lisse de G sur $\mathfrak{g}^*$, appelée la *représentation coadjointe* de G. Une orbite de cette action est appelée une *orbite coadjointe* de G. Pour tout X dans $\mathfrak{g}$, notons $X_{\mathfrak{g}}$ et $X_{\mathfrak{g}^*}$ les champs de vecteurs sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ associés à X par les représentations adjointes et coadjointes, respectivement.

b) Montrer que $X_{\mathfrak{g}}(Y) = [X, Y]$ pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$.

c) Montrer que $X_{\mathfrak{g}^*}(\lambda) = -{}^t(\mathrm{ad}\, X)(\lambda)$ pour tous les $X \in \mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathfrak{g}^*$.

d) Soient $\lambda \in \mathfrak{g}^* - \{0\}$ et $\mathfrak{g}_\lambda$ l'algèbre de Lie du stabilisateur G_λ de λ dans la représentation coadjointe de G. Montrer que la forme bilinéaire $\underline{\omega}$ sur $\mathfrak{g}$ définie par $\omega(X, Y) = \lambda([X, Y])$ passe au quotient en une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\lambda$. Montrer que $\underline{\omega}$ induit sur G/G_λ une 2-forme différentielle ω qui est symplectique. [Ainsi, chaque orbite coadjointe est naturellement munie d'une forme symplectique.]

d) Décrire les orbites coadjointes de SO(3).

12. Rappelons que si E, F sont des espaces vectoriels, d'espace vectoriels duaux E^*, F^* respectivement, et si $u : E \to F$ est une application linéaire, alors ${}^tu : F^* \to E^*$ est l'application linéaire $\ell \mapsto \ell \circ u$ duale de u.

Exercice E.27 Soit $n \in \mathbb{N}$. On notera $\mathbb{T}^n$ le groupe de Lie quotient $\mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n$, et $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ le morphisme de projection canonique. On pourra utiliser sans les redémontrer les propriétés suivantes.

- Tout groupe de Lie compact admet une mesure borélienne de probabilité, invariante par translations à gauche et à droite.
- L'application exponentielle de tout groupe de Lie compact connexe est surjective.
- Tout sous-groupe discret Γ du groupe de Lie $(\mathbb{R}^n, +)$, tel que le groupe de Lie $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$ soit compact, est de la forme $\Gamma = \mathbb{Z}u_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}u_n$, où les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des éléments g de $\mathbb{T}^n$ tels que le sous-groupe de $\mathbb{T}^n$ engendré par g soit dense dans $\mathbb{T}^n$.

(1) Montrer que tout groupe de Lie réel compact, connexe, abélien de dimension n est isomorphe à $\mathbb{T}^n$.

Dans toute la suite, G désignera un groupe de Lie réel compact et connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On appelle *tore maximal de* G un sous-groupe de Lie plongé de G connexe, abélien, qui n'est contenu strictement dans aucun sous-groupe de Lie plongé connexe et abélien de G.

(2) Montrer que tout élément de G est contenu dans au moins un tore maximal de G.

(3) Montrer qu'il existe sur $\mathfrak{g}$ au moins un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ qui est invariant par le groupe $\mathrm{Ad}(G)$, c'est-à-dire tel que, pour tous les $g \in G$ et $u, v \in \mathfrak{g}$,

$$\langle u, v \rangle = \langle\, \mathrm{Ad}(g)u, \mathrm{Ad}(g)v \,\rangle\ .$$

(4) On note $\|\,.\,\|$ la norme sur $\mathfrak{g}$ définie par le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Soient $u, v \in \mathfrak{g}$. On considère l'application $\varphi : G \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(g) = \|\,\mathrm{Ad}(g)u - v\,\|^2$. En considérant la différentielle de l'application φ, montrer que si φ admet un minimum en $g = e$, alors on doit avoir $[u, v] = 0$.

(5) En déduire que pour tous les $u, v \in \mathfrak{g}$, il existe $g_0 \in G$ tel que $g_0 \exp(u) g_0^{-1}$ et $\exp(v)$ commutent.

(6) Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$. Montrer qu'il existe $v \in \mathfrak{t}$ tel que $\exp(v)$ engendre un sous-groupe dense de $\mathbf{T}$. En déduire que tout élément de G est conjugué à un élément de $\mathbf{T}$.

(7) Montrer que deux tores maximaux de G sont conjugués dans G.

(8) Exprimer l'espace des tores maximaux de $\mathrm{SU}(2)$ comme un $\mathrm{SU}(2)$-espace homogène, et en déduire qu'il est difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$.

(9) Montrer que si $\mathscr{T}$ est l'espace des tores maximaux du groupe de Lie $\mathrm{SO}(4)$, il existe un revêtement à deux feuillets de $SO(4)-$espaces homogènes :

$$f : \mathscr{G}_2(\mathbb{R}^4) \to \mathscr{T}\ ,$$

où $\mathscr{G}_2(\mathbb{R}^4)$ désigne la variété grassmannienne des 2-plans vectoriels dans $\mathbb{R}^4$.

1.7 Indications pour la résolution des exercices

Schème[13] **E.5** Voir [Pau2], Proposition 4.9 et Exercice E.93.

Schème E.11 Par la propriété (1) de l'application exponentielle (dans la liste des huit propriétés de la partie 1.4.1), ceci découle de la définition du crochet de Lie $[X, Y] = [\overline{X}, \overline{Y}](e)$ de $\mathfrak{g}$ et de l'exercice E.5.

Schème E.12 Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G.

(1) Pour tout $g \in G$, nous avons $g \in \ker \mathrm{Ad}$ si et seulement si $\mathrm{Ad}\, g\ X = X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, si et seulement si $\exp(\mathrm{Ad}\, g\ X) = \exp X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, si et seulement si $g \exp(X) g^{-1} = \exp X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Le résultat découle alors du fait que le groupe de Lie connexe G est engendré par tout voisinage de l'identité, et que l'image de l'exponentielle est un voisinage de l'identité.

(2) Le centre $Z(G)$ de G est un sous-groupe de G fermé, comme intersection de fermés. Par le théorème de Cartan, c'est donc un sous-groupe de Lie plongé du groupe de Lie réel G. Un élément X de $\mathfrak{g}$ appartient à l'algèbre de Lie de $Z(G)$ si et seulement si $\exp(tX)$ appartient à $Z(G)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, si et seulement si $\exp(tX) \exp Y (\exp(tX))^{-1} = \exp Y$ pour tous les $t \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathfrak{g}$, car le groupe de Lie connexe G est engendré par l'image de son exponentielle. Or

$$\exp(tX) \exp Y (\exp(tX))^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(\exp(tX))\ Y) = \exp(e^{\mathrm{ad}(tX)}\ Y)\ .$$

Donc $\exp(tX) \in Z(G)$ si et seulement si $e^{\mathrm{ad}(tX)}\ Y = Y$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, car exp est injective au voisinage de 0. Cette condition est impliquée par le fait que $\mathrm{ad}\, X(Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, et en dérivant en $t = 0$, elle implique que $\mathrm{ad}\, X(Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. Donc $\exp(tX) \in Z(G)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \ker \mathrm{ad}$.

Schème E.16 (1) Pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$, puisque le groupe de Lie G est abélien, l'application $t \mapsto \exp(tX) \exp(tY)$ est un sous-groupe à un paramètre de G, de dérivée en 0 égale à $X + Y$, donc $\exp(tX) \exp(tY) = \exp(t(X + Y))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc en particulier pour $t = 1$. Comme $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$, ceci montre que exp est un morphisme de groupes, qui est lisse, donc un morphisme de groupes de Lie. Par connexité, G est engendré par tout voisinage de l'identité. L'image de l'exponentielle contient un voisinage de l'identité, puisque exp est un difféomorphisme local en 0. Puisque exp est un morphisme de groupes, l'application exp est donc surjective.

Puisque la différentielle de exp en 0 est l'identité, et par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage V de 0 tel que $\exp : V \to \exp(V)$ soit un C^∞-difféomorphisme sur un voisinage ouvert de e dans G. Soit U un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ symétrique par rapport à l'origine tel que $U + U \subset V$. Alors pour tout $y \in G$, la réunion $\exp^{-1}(y \exp(U)) = \coprod_{x \in \exp^{-1}(y)} (x + U)$ est disjointe, et $\exp : (x + U) \to y \exp(U)$ est un C^∞-difféomorphisme pour tout $x \in \exp^{-1}(y)$. Donc exp est un revêtement, qui est un morphisme de groupes de Lie, donc un revêtement de groupes de Lie.

(2) Le noyau de exp est un sous-groupe additif discret de $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^N$, donc à isomorphisme linéaire près, de la forme $\Lambda = \{0\}^n \times \mathbb{Z}^m$ avec $n + m = N$. Par la proposition 1.46, le revêtement de groupes de Lie exp induit un isomorphisme de groupes de Lie de $\mathfrak{g}/\Lambda$ sur G. Le résultat en découle.

13. n.m. (gr. $\sigma\chi\eta\mu\alpha$). Structure d'ensemble d'un processus.

Schème E.18 (1) Nous avons vu dans l'exemple (7) de la partie 1.2 que la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est invariante par tout automorphisme f de $\mathfrak{g}$. [Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, nous avons $\mathrm{ad}(f(X)) = f \circ \mathrm{ad}\, X \circ f^{-1}$, car pour tout $Y \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ad}(f(X))Y = [f(X), Y] = f([X, f^{-1}(Y)]) = f \circ \mathrm{ad}\, X \circ f^{-1}(Y) \ .$$

Donc $\mathrm{ad}(f(X)) \circ \mathrm{ad}(f(Y)) = f \circ \mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, Y \circ f^{-1}$ pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$, et le résultat découle des propriétés de la trace.] Donc $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est contenu dans le groupe orthogonal de la forme bilinéaire symétrique B. De plus, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, par continuité du crochet de Lie (qui est bilinéaire en dimension finie), comme intersection des fermés $\{f \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \ : \ f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]\}$ lorsque X et Y parcourent $\mathfrak{g}$.

(2) Par le théorème de Cartan et la question (1), $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe de Lie plongé de $\mathrm{O}(B)$. Rappelons que l'application exponentielle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dans le groupe de Lie $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est l'exponentielle des endomorphismes. Pour tout $D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, si $e^{t\,D}$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors en dérivant en $t = 0$ l'équation $[e^{tD}(X), e^{tD}(Y)] = e^{tD}([X, Y])$, nous obtenons que D est une dérivation. Réciproquement, si D est une dérivation, alors e^D est un automorphisme d'algèbres de Lie, car pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$, nous avons

$$\begin{aligned} e^D[X, Y] &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} D^n([X, Y]) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [D^k(X), D^{n-k}(Y)] \\ &= \sum_{k,\, \ell \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!\, \ell!} \, [D^k(X), D^\ell(Y)] = [e^D X, e^D Y] \ . \end{aligned}$$

Le résultat en découle.

(3) Le noyau de la représentation adjointe $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, étant le centre de $\mathfrak{g}$ donc un idéal abélien de $\mathfrak{g}$, est trivial, puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Par la formule de Jacobi (voir l'exemple (7) de la partie 1.2), la représentation adjointe ad est un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Il suffit donc pour obtenir le résultat final de la partie (3) de montrer que $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ est surjective.

Soit $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Par le critère de semi-simplicité de Cartan, la forme de Killing B est non dégénérée. L'application $Y \mapsto \mathrm{tr}(D \circ \mathrm{ad}\, Y)$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. Donc il existe $X_D \in \mathfrak{g}$ tel que $B(X_D, Y) = \mathrm{tr}(D \circ \mathrm{ad}\, Y)$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. Montrons que $D = \mathrm{ad}\, X_D$. Puisque B est non dégénérée, et $(\mathrm{ad}\, X_D)(Y) = [X_D, Y]$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, il suffit de montrer que $B(D(Y), Z) = B([X_D, Y], Z)$ pour tout $Z \in \mathfrak{g}$.

Puisque D est une dérivation, $D([Y, Z]) = [D(Y), Z] + [Y, D(Z)]$, donc

$$D \circ (\mathrm{ad}\, Y) = \mathrm{ad}(D(Y)) + (\mathrm{ad}\, Y) \circ D \ .$$

D'où, en appliquant l'identité de Jacobi pour la cinquième égalité et la définition de X_D pour la sixième égalité,

$$\begin{aligned} B(D(Y), Z) &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(D(Y)) \circ \mathrm{ad}\, Z) = \mathrm{tr}(D \circ \mathrm{ad}\, Y \circ \mathrm{ad}\, Z) - \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, Y \circ D \circ \mathrm{ad}\, Z) \\ &= \mathrm{tr}(D \circ \mathrm{ad}\, Y \circ \mathrm{ad}\, Z) - \mathrm{tr}(D \circ \mathrm{ad}\, Z \circ \mathrm{ad}\, Y) = \mathrm{tr}(D \circ [\mathrm{ad}\, Y, \mathrm{ad}\, Z]) \\ &= \mathrm{tr}(D \circ \mathrm{ad}[Y, Z]) = B(X_D, [Y, Z]) = B([X_D, Y], Z) \ , \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. Rappelons que la dernière égalité est vraie car la forme de Killing est ad-alternée : par l'identité de Jacobi, pour tous les $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad}[Y,Z]) &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y \circ \operatorname{ad} Z) - \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Z \circ \operatorname{ad} Y) \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y \circ \operatorname{ad} Z) - \operatorname{tr}(\operatorname{ad} Y \circ \operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Z) \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}[X,Y] \circ \operatorname{ad} Z)\ .\end{aligned}$$

(4) Puisque B est définie négative, le groupe de Lie $\mathrm{O}(B)$ est compact. Par la question (2), $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe de Lie plongé, fermé dans un compact, donc compact.

Par le critère de semi-simplicité de Cartan, puisque B est non dégénérée, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Par la question (3), l'application $X \mapsto \operatorname{ad} X$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathfrak{g}$ et $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Par la question (2), la sous-algèbre de Lie $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe de Lie plongé $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ du groupe de Lie $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, et le résultat en découle.

Schème E.19 • Montrons que (i) implique (ii).

Puisque B est définie négative, $\mathfrak{g}$ est semi-simple par le critère de semi-simplicité de Cartan. En particulier son centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est nul. Donc le centre de G, qui est un sous-groupe de Lie plongé dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ par l'exercice E.12 (2), est discret. Comme le noyau de Ad est égal au centre de G par connexité de G (voir l'exercice E.12 (1)), $\operatorname{Ad} G$ est un sous-groupe de Lie immergé connexe de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Par la question (3) de l'exercice E.18, l'algèbre de Lie $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ de $\operatorname{Ad} G$ est égale à $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, qui est l'algèbre de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ par la question (2) de l'exercice E.18. Donc $\operatorname{Ad} G$ est la composante neutre de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, et en particulier est fermé. Par la question (4) de l'exercice E.18, le groupe de Lie $\operatorname{Ad} G$ est donc compact.

• Montrons que (ii) implique (i).

Puisque $\mathrm{Ad}(G)$ est compact, considérons un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ qui est $\mathrm{Ad}(G)$-invariant (en moyennant un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ par une mesure de Haar de $\mathrm{Ad}(G)$). Alors pour tout $X \in \mathfrak{g}$, en dérivant, $\operatorname{ad} X$ est antisymétrique pour ce produit scalaire, donc admet une matrice antisymétrique $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ dans une base orthonormée de $\mathfrak{g}$. Donc

$$B(X,X) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} X) = \sum_{i,j} a_{ij}a_{ji} = -\sum_{i,j} a_{ij}^2 \leq 0\ ,$$

avec égalité si et seulement si $\operatorname{ad} X = 0$, donc si $X = 0$ car le centre de $\mathfrak{g}$ est nul, puisque celui de G est discret.

Schème E.20 Il est immédiat que (i) implique (ii), car l'algèbre dérivée est un idéal.

Montrons que (ii) implique (iii). Soit I un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. Notons

$$J = \{h \in \mathfrak{h}\ :\ \exists\ z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}),\ z + h \in I\}\ .$$

Montrons que J est un idéal abélien de $\mathfrak{h}$. Pour tout $h \in J$, soit $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ tel que $z + h$ appartienne à l'idéal abélien I. Puisque z est central, pour tout $h' \in \mathfrak{h}$, nous avons $[h, h'] = [h + z, h'] \in I \cap \mathfrak{h} \subset J$, donc J est un idéal. Si $h' \in J$, soit $z' \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ tel que $z' + h' \in I$, alors $[h, h'] = [h + z, h' + z'] = 0$, donc J est abélien.

Maintenant, puisque $\mathfrak{h}$ est semi-simple, nous avons $J = 0$, donc I est contenu dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ par définition de J : pour tout $x \in I$, en écrivant $x = z + x_{\mathfrak{h}}$ où $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et $x_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}$, nous avons $x_{\mathfrak{h}} \in J$, donc $x_{\mathfrak{h}} = 0$ d'où $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Puisque tout élément de $\mathfrak{g}$ s'écrit comme somme d'un élément de $\mathfrak{h}$ et d'un élément central, nous avons $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, donc $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{h} = \{0\}$.

Montrons enfin que (iii) implique (i). Soit $\mathfrak{h}$ un sous-espace vectoriel contenant $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$. Pour tous les $g \in \mathfrak{g}$ et $h \in \mathfrak{h}$, nous avons $[g,h] \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, donc $\mathfrak{h}$ est un idéal. Tout idéal de $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, car tout élément de $\mathfrak{g}$ s'écrit comme somme d'un élément de $\mathfrak{h}$ et d'un élément qui commute avec $\mathfrak{h}$. Donc tout idéal abélien est contenu dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{h} = \{0\}$, d'où $\mathfrak{h}$ est semi-simple. Enfin, puisque $\mathfrak{h}$ est semi-simple, $\mathfrak{h} = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, donc $\mathfrak{h} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

Schème E.24 (1) Par le théorème de Cartan, un sous-groupe de G' est un sous-groupe de Lie plongé si et seulement s'il est fermé.

a) Le résultat découle du fait que l'intersection de deux sous-groupes fermés est encore un sous-groupe fermé.

Une démonstration qui évite d'utiliser le théorème de Cartan est la suivante. Soient H' et H'' deux sous-groupes de Lie plongés de G'. Le groupe H' agit de manière lisse sur la variété quotient lisse G'/H'', donc le stabilisateur du point eH'', qui est $H' \cap H''$, est un sous-groupe de Lie plongé, par le lemme 1.58.

b) Par les propriétés des espaces homogènes, l'application lisse $x \mapsto gxg^{-1}$ de G' dans G' induit par passage au quotient une application lisse $\psi_g : G'/H' \to G'/gH'g^{-1}$, qui est un C^∞-difféomorphisme, car d'inverse $\psi_{g^{-1}}$.

(2) Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G (qui est un sous-groupe fermé, donc un sous-groupe de Lie plongé, de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$). C'est le sous-espace vectoriel $\left\{\begin{pmatrix} s & u \\ 0 & -s \end{pmatrix} \ : s,u \in \mathbb{R}\right\}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Il admet pour base $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $X = \begin{pmatrix} s & u \\ 0 & -s \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} s' & u' \\ 0 & -s' \end{pmatrix}$, alors $\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} X'(e_1) = -4\,s\,u'\,e_2$ et $\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} X'(e_2) = -4\,s\,s'\,e_2$. Donc la forme de Killing de G est $B(X,X') = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} X') = -4\,s\,s'$.

Cette forme de Killing est dégénérée, donc $\mathfrak{g}$ n'est pas semi-simple. Une autre manière de montrer ceci est de remarquer que l'algèbre de Lie de U est un idéal abélien non trivial de $\mathfrak{g}$.

(3) Les sous-groupes G, A, U, G_c sont clairement fermés, donc sont des sous-groupes de Lie plongés de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ par le théorème de Cartan. Les espaces G, A et U sont clairement connexes et G_c est clairement non connexe (homéomorphes à $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ respectivement). Soit H un sous-groupe fermé non discret de G, donc un sous-groupe de Lie plongé de dimension non nulle, et notons H_0 sa composante neutre. Comme G est de dimension 2, la dimension de H est 1 ou 2.

Si H est de dimension 2, alors puisque l'application exponentielle est un difféomorphisme local en 0, le sous-groupe H est ouvert dans G. Tout sous-groupe ouvert est fermé, car son complémentaire est ouvert comme union des classes à gauche non triviales, qui sont ouvertes. Le groupe H coïncide alors avec G, par connexité de G.

Supposons donc H de dimension 1. Pour tous les $u \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}-\{0\}$, si $g = \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{2s} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, nous avons

$$g\begin{pmatrix} s & u \\ 0 & -s \end{pmatrix}g^{-1} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix}.$$

L'algèbre de Lie de U est $\left\{\begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ : \ u \in \mathbb{R}\right\}$.

Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H n'est pas contenue dans celle de U, alors elle contient un élément $X = \begin{pmatrix} s & u \\ 0 & -s \end{pmatrix}$ où $s \neq 0$. Nous avons $H_0 = \{\exp(tX) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ par dimension et connexité. Avec g comme ci-dessus, nous avons donc $gH_0g^{-1} = \{\exp(tgXg^{-1}) \ : \ t \in \mathbb{R}\} = \{\exp\left(t\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix}\right) \ : \ t \in \mathbb{R}\} = A$. Comme un groupe de Lie normalise sa composante neutre et puisque A est égal à son normalisateur dans G, nous avons donc $gHg^{-1} = A$.

Supposons donc que $\mathfrak{h}$ est contenue dans l'algèbre de Lie de U, donc lui est égale par dimension. Alors $H_0 = U$ par connexité de U. En particulier, si H est connexe alors $H = U$. L'image de H par ρ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Comme H est fermé, contient U et est différent de G, ce sous-groupe $\rho(H)$ ne peut être dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $\rho(H) = c\mathbb{Z}$. Le groupe H est alors égal à U si $c = 0$ ou au groupe G_c si $c \neq 0$. Ceci démontre a) et b).

c) Les applications de A dans G/U et de U dans G/A définies par $g \mapsto gU$ et $g \mapsto gA$ respectivement sont continues, bijectives et propres, donc des homéomorphismes. Comme $\mathbb{R}$ n'est pas compact, le résultat s'en déduit.

(4) Supposons tout d'abord que la restriction de ρ à Γ soit injective. Alors Γ est abélien car $(\mathbb{R}, +)$ l'est, constitué d'éléments conjugués dans G à des matrices diagonales, car pour tous les $u \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R} - \{0\}$, si $g = \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{e^s - e^{-s}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, nous avons

$$g\begin{pmatrix} e^s & u \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}g^{-1} = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les éléments de Γ sont simultanément conjugables dans G à des matrices diagonales, et Γ est conjugable dans G à un sous-groupe discret de A. Il est immédiat que tout sous-groupe discret non trivial de A (qui est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$) est de la forme Γ_c pour un certain c réel.

Supposons maintenant que la restriction de ρ à Γ ne soit pas injective.

Montrons que $\rho(\Gamma)$ est le sous-groupe trivial de $\mathbb{R}$. Sinon, quitte à conjuguer Γ dans G (en utilisant un élément g comme ci-dessus et le fait que U est distingué dans G), il existe dans Γ des matrices de la forme $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u \neq 0$ et $\gamma_2 = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}$, avec $s \neq 0$. Comme $\gamma_2^n \gamma_1 \gamma_2^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & e^{2ns}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on obtient une contradiction avec le fait que Γ est discret en faisant tendre n vers $+\infty$ si $s < 0$ et vers $-\infty$ sinon.

Finalement, puisque $\rho(\Gamma) = \{0\}$, le sous-groupe Γ est contenu dans le noyau de ρ, donc est un sous-groupe discret de U. Il est immédiat que tout sous-groupe discret non trivial de U (qui est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$) est de la forme Γ_U, quitte à conjuguer par un élément de A.

(5) Si le groupe de Lie G agit de manière lisse et transitive sur une surface Σ compacte, alors pour tout point $x \in \Sigma$, le stabilisateur H de x dans G est un sous-groupe de Lie plongé, et l'application orbitale en x induit un difféomorphisme de l'espace homogène G/H dans la variété Σ. Comme G est de dimension 2 et puisque la dimension de G/H est égale à la dimension de G moins celle de H, le sous-groupe de Lie plongé H est de

dimension 0, c'est-à-dire discret par les propriétés de l'application exponentielle. Puisque Σ est compacte et comme G n'est pas compact, le groupe H est non trivial. Par la question précédente, quitte à conjuguer en utilisant la question (1) b), nous pouvons supposer que $H = \Gamma_c$ ou $H = \Gamma_U$. Or aucun des espaces G/Γ_c ou G/Γ_U n'est compact, car ils admettent une application continue surjective sur les espaces G/A et G/U respectivement, qui sont non compacts par la question (3) c).

Schème E.27 (1) Considérons H un groupe de Lie compact, abélien et connexe de dimension n, et désignons par $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. Le groupe de Lie H est isomorphe au groupe de Lie quotient de son revêtement universel $\widetilde{H}$ par un sous-groupe discret Γ contenu dans le centre de $\widetilde{H}$. L'algèbre $\mathfrak{h}$ est abélienne de dimension n, et il existe à isomorphisme près une seule algèbre de Lie abélienne de dimension n. Par le théorème de classification des groupes de Lie par leurs algèbres de Lie, il existe donc, à isomorphisme près, un unique groupe de Lie connexe simplement connexe de dimension n dont l'algèbre de Lie est abélienne. On en déduit que $\widetilde{H}$ est isomorphe au groupe de Lie $(\mathbb{R}^n, +)$, et Γ étant discret et cocompact, il est de la forme $\Gamma = \mathbb{Z}u_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}u_n$, où $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Il existe une transformation linéaire inversible A envoyant $(u_1, \ldots, u_n)$ sur la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Cette transformation passe au quotient en un isomorphisme de groupes de Lie $\overline{A} : H \to \mathbb{T}^n$.

(2) Soit $g \in G$. Comme l'application exponentielle de G est surjective, nous pouvons écrire $g = \exp(v)$, avec $v \in \mathfrak{g}$. Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des sous-algèbres abéliennes de $\mathfrak{g}$ contenant v, et $\mathfrak{t}$ un élément de $\mathscr{A}$ dont la dimension est maximale. Appelons $\mathbf{T}$ le sous-groupe de Lie connexe immergé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$. Ce groupe est abélien car $\mathfrak{t}$ l'est. Si $\mathbf{T}'$ est un sous-groupe de Lie connexe abélien de G contenant $\mathbf{T}$, et si $\mathfrak{t}'$ est son algèbre de Lie, alors $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}'$. Mais comme $\mathfrak{t}'$ est abélienne, donc dans $\mathscr{A}$, sa dimension ne peut excéder celle de $\mathfrak{t}$, d'où l'égalité $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$, puis $\mathbf{T} = \mathbf{T}'$. En particulier, en prenant pour $\mathbf{T}'$ l'adhérence $\overline{\mathbf{T}}$ de $\mathbf{T}$ dans G, qui est un sous-groupe fermé de G, donc un sous-groupe de Lie plongé par le théorème de Cartan, qui est connexe (car adhérence d'un connexe) et abélien (par continuité du produit), nous en déduisons que $\mathbf{T}$ est fermé, donc un sous-groupe de Lie plongé. On conclut que $\mathbf{T}$ est un tore maximal de G qui contient g.

(3) Soit b un produit scalaire sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit μ une mesure de probabilité bi-invariante sur G. Pour u et v dans $\mathfrak{g}$, posons

$$\langle u, v\rangle = \int_G b(\mathrm{Ad}(g)u, \mathrm{Ad}(g)v)\ d\mu(g)\ .$$

Il est clair que $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire symétrique, et si $u \neq 0$, puisque $b(\mathrm{Ad}(g)u, \mathrm{Ad}(g)u)\rangle 0$ pour tout $g \in G$, nous avons $\langle u, u\rangle > 0$. Ceci montre que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire. Pour montrer qu'il est $\mathrm{Ad}(G)$-invariant, considérons $g_0 \in G$ et posons $\psi : g \mapsto b(\mathrm{Ad}(g)u, \mathrm{Ad}(g)v)$. Écrivons alors, puisque Ad est un morphisme de groupes,

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Ad}(g_0)u, \mathrm{Ad}(g_0)v\,\rangle &= \int_G \psi(gg_0)\ d\mu(g) = \int_G \psi(g)(R_{g_0})_*\ d\mu(g)\\ &= \int_G \psi(g)\ d\mu(g) = \langle u, v\rangle\ .\end{aligned}$$

(4) Comme l'application tangente de l'application Ad en e est l'application ad, nous avons, pour tout $w \in \mathfrak{g}$,

$$T_e\varphi(w) = 2\langle [w,u], u-v\rangle \ . \qquad (\cdot 13 \cdot)$$

Par ailleurs, en différentiant en e l'égalité

$$\langle \mathrm{Ad}(g)u, \mathrm{Ad}(g)v\rangle = \langle u, v\rangle \ ,$$

nous obtenons

$$\langle [w,u], v\rangle = -\langle u, [w,v]\rangle$$

pour tout triplet u, v, w de $\mathfrak{g}$. Par la formule $(\cdot 13 \cdot)$, nous avons $T_e\varphi(w) = -2\langle w, [u,v]\rangle$. Nous en concluons que si φ admet un minimum en e, alors $[u,v]$ est orthogonal, pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, à tout vecteur de $\mathfrak{g}$, donc $[u,v] = 0$.

(5) Par la compacité de G, la fonction $g \mapsto \|\mathrm{Ad}(g)v - u\|^2$ atteint son minimum en un point $g_0 \in G$. Nous déduisons de l'égalité

$$\|\mathrm{Ad}(g_0)\,\mathrm{Ad}(g)v - u\|^2 = \|\mathrm{Ad}(g)v - \mathrm{Ad}(g_0^{-1})u\|^2$$

que $g \mapsto \|\mathrm{Ad}(g)v - \mathrm{Ad}(g_0^{-1})u\|^2$ admet un minimum en e. La question précédente assure que $[\mathrm{Ad}(g_0^{-1})u, v] = 0$.

(6) D'après la première question, $\mathbf{T}$ est isomorphe en tant que groupe de Lie à un tore $\mathbb{T}^m$. Aussi, d'après les points admis, il existe un élément g de $\mathbf{T}$ qui engendre un sous-groupe de dense de $\mathbf{T}$. Par la surjectivité de l'exponentielle sur le groupe compact $\mathbf{T}$, nous pouvons écrire $g = \exp(v)$ pour un certain $v \in \mathfrak{t}$.

Tout élément de G s'écrit $\exp(u)$ pour un certain vecteur u de $\mathfrak{g}$. Nous savons par la question précédente qu'il existe $g_0 \in \mathfrak{g}$ tel que $[\mathrm{Ad}(g_0^{-1})u, v] = 0$. Appelons $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie (abélienne) engendrée par $\mathrm{Ad}(g_0^{-1})u$ et v, et notons H le sous-groupe de Lie connexe immergé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Appelons $\overline{H}$ l'adhérence de l'image de H dans G. Il s'agit d'un sous-groupe de Lie plongé (car fermé, par le théorème de Cartan), connexe et abélien. Comme $\exp(v)$ est dense dans $\mathbf{T}$, nous avons l'inclusion $\mathbf{T} \subset \overline{H}$, mais comme $\mathbf{T}$ est un tore maximal, nous avons en fait égalité $\mathbf{T} = \overline{H}$. Par conséquent, $\exp(\mathrm{Ad}(g_0^{-1})u) = g_0^{-1}\exp(u)g_0$ appartient à $\mathbf{T}$.

(7) Considérons deux tores maximaux $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$. Choisissons $g \in \mathbf{T}$ qui engendre un sous-groupe dense H de $\mathbf{T}$ et $g' \in \mathbf{T}'$ qui engendre un sous-groupe dense H' de $\mathbf{T}'$. Par la question précédente, il existe $g_0 \in G$ tel que $g_0 g g_0^{-1} \in \mathbf{T}'$. Alors $g_0 H g_0^{-1} \subset \mathbf{T}'$ et comme $\mathbf{T}'$ est fermé,

$$g_0 \mathbf{T} g_0^{-1} \subset \mathbf{T}' \ ,$$

ou encore

$$\mathbf{T} \subset g_0^{-1}\mathbf{T}' g_0 \ .$$

Mais $g_0^{-1}\mathbf{T}' g_0$ est un sous-groupe de Lie abélien connexe de G, comme image d'un sous-groupe de Lie abélien connexe de G par un automorphisme de G. Par la maximalité de $\mathbf{T}$, nous avons

$$\mathbf{T} = g_0^{-1}\mathbf{T}' g_0 \ .$$

(8) Tout élément de SU(2) est conjugué dans SU(2) à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \ .$$

Deux éléments diagonalisables qui commutent devant être simultanément diagonalisables, le sous-groupe de Lie plongé

$$\mathbf{T} = \{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \ : \ \theta \in \mathbb{R} \}$$

est un tore maximal de SU(2), et tout tore maximal est conjugué à $\mathbf{T}$, par la question (7).

Comme $\mathbf{T}$ est un groupe à un paramètre, tout élément qui le normalise le centralise. Or $\mathbf{T}$ est son propre centralisateur. L'action par conjugaison de SU(2) sur l'ensemble des tores maximaux de SU(2), qui est transitive et dont le stabilisateur du tore maximal $\mathbf{T}$ est $\mathbf{T}$, induit donc une bijection entre l'ensemble des tores maximaux de SU(2) et l'espace homogène SU(2)/$\mathbf{T}$. Il est isomorphe en tant que SU(2)-espace homogène à l'espace des droites vectorielles complexes de $\mathbb{C}^2$, soit $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Ce dernier espace est difféomorphe à $\mathbb{S}_2$.

(9) Tout élément de SO(4) est conjugué dans SO(4) à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} r_\theta & 0 \\ 0 & r_\phi \end{pmatrix} ,$$

où pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la notation r_θ désigne la matrice de rotation

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

Nous en déduisons que

$$\mathbf{T} = \{ \begin{pmatrix} r_\theta & 0 \\ 0 & r_\phi \end{pmatrix} \mid (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 \}$$

est un tore maximal. Cette fois-ci, le normalisateur de $\mathbf{T}$ dans SO(4) est le sous-groupe N engendré par $\mathbf{T}$ et la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Comme ci-dessus, l'espace des tores maximaux de SO(4) est l'espace homogène SO(4)/N.

Pour conclure, nous constatons que $\mathbf{T}$ est le stabilisateur dans SO(4) d'un 2-plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$, l'action de SO(4) étant par ailleurs transitive sur ces 2-plans. Par conséquent SO(4)/$\mathbf{T}$ s'identifie à la variété grassmannienne $\mathscr{G}_2(\mathbb{R}^4)$. Par ailleurs, le groupe $N/\mathbf{T}$ est de cardinal 2. La projection

$$\mathrm{SO}(4)/\mathbf{T} \to \mathrm{SO}(4)/N$$

est une fibration de fibre $N/\mathbf{T}$, donc un revêtement à deux feuillets.

2 Fibrés et connexions

Les espaces fibrés (en commençant par le fibré tangent) interviennent à de multiples occasions en géométrie différentielle (et en physique théorique). Aussi est-il nécessaire de leur consacrer un chapitre. Mais ils resteront pour nous un outil, et nous renvoyons par exemple à [Hus, Ati, Kar] pour une étude des fibrés pour eux-même. Nous reprenons les conventions sur la régularité $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$ données dans le préambule.

2.1 Fibrations

Soit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$. Une *fibration* (ou *fibré localement trivial)* de classe C^r est une application $p : E \to B$ de classe C^r entre deux variétés de classe C^r, de sorte que pour tout b dans B, il existe une variété F non vide de classe C^r, un voisinage ouvert U de b, et un C^r-difféomorphisme $\phi : p^{-1}(U) \to U \times F$, tels que $\mathrm{pr}_1 \circ \phi = p_{|p^{-1}(U)}$, où $\mathrm{pr}_1 : U \times F \to U$ est la première projection $(x, y) \to x$, c'est-à-dire tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\ & {}_{p}\searrow \quad \swarrow_{\mathrm{pr}_1} & \\ & U & \end{array} .$$

On dit que B est la *base*, E l'*espace total*, $p^{-1}(b)$ la *fibre* au-dessus de b, U un *ouvert distingué* ou *voisinage ouvert distingué* de b, ϕ une *trivialisation locale* de p au-dessus de U. Lorsque F est fixé, et ne dépend pas de b, on parle de *fibration de fibre* F. Par abus, nous désignerons souvent par son espace total E la fibration p, l'application p étant sous-entendue. Par définition, toute fibration est surjective.

Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ des fibrations de classe C^r. Un *morphisme* C^r (de fibrations) de p dans p' est un couple d'applications (f, g) de classe C^r tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ {}_{p}\downarrow & & \downarrow{}_{p'} \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array} .$$

Un *isomorphisme* C^r *(de fibrations)* de p dans p' est un morphisme (f, g) de p dans p' tel qu'il existe un morphisme (f', g') de p' dans p qui vérifie $g \circ g' = \mathrm{id}, g' \circ g = \mathrm{id}, f \circ f' = \mathrm{id}, f' \circ f = \mathrm{id}$. Deux fibrations sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre elles. Le couple $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$ est un morphisme de la fibration p dans elle-même, appelé le *morphisme identité*. Si $(f, \overline{f})$ et $(g, \overline{g})$ sont deux morphismes de p dans p' et de p' dans p'' respectivement, alors le couple $(g \circ f, \overline{g} \circ \overline{f})$ est un morphisme de fibrations de p dans p'', appelé la *composition* de $(f, \overline{f})$ et $(g, \overline{g})$. Ainsi, la collection des fibrations C^r et des ensembles de morphismes de fibrations C^r entre deux fibrations C^r est une catégorie.

Lorsque $B = B'$, un *morphisme au-dessus de l'identité* (ou *morphisme sur la base* B) de p dans p' est une application $f : E \to E'$ telle que (f, id) soit un morphisme de fibrations, et de même pour les isomorphismes. Le contexte indique en général clairement si nous parlons de morphisme ou de morphisme au-dessus de l'identité.

Une *section* d'une fibration $p : E \to B$ de classe C^r est une application s de B dans E telle que $p \circ s = \mathrm{id}_B$. Pour $r' \leq r$, nous pouvons parler de section $\mathrm{C}^{r'}$. Une telle section continue globale (c'est-à-dire définie sur tout B) n'existe en général pas. Nous noterons $\Gamma(p)$, et par abus $\Gamma(E)$, l'ensemble des sections C^r de p.

Exemples et remarques. (1) **(Fibrations triviales et trivialisables)** Si M et F sont deux variétés C^r avec F non vide, la première projection $\mathrm{pr}_1 : M \times F \to M$ de la variété produit $M \times F$ dans M est une fibration de fibre F, de base M, dite *triviale*. Toute fibration isomorphe à une fibration triviale est dite *trivialisable*. Une fibration de classe C^r trivialisable admet beaucoup de sections globales C^r : pour tout y dans F, l'application $x \mapsto (x, y)$ est une section globale C^r de $\mathrm{pr}_1 : M \times F \to M$. L'application de $\mathrm{C}^r(M; F)$ dans $\Gamma(\mathrm{pr}_1)$ définie par

$$f \mapsto \{x \mapsto (x, f(x))\}$$

est une bijection.

Par exemple, si $p : E \to B$ est une fibration, et si U un ouvert distingué de B, alors la restriction de p à $p^{-1}(U)$ est une fibration trivialisable. Donc une fibration (localement triviale) admet de nombreuses sections locales (c'est-à-dire définies sur un voisinage suffisamment petit de tout point).

Par exemple, l'application $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to]\,0, +\infty\,[$ définie par

$$(x_0, \ldots, x_n) \mapsto x_0^2 + \cdots + x_n^2$$

est une fibration analytique réelle, de fibre $\mathbb{S}_n$, qui est trivialisable.

(2) **(Revêtements)** Les revêtements sont les fibrations de fibres discrètes.

(3) **(Fibrations et submersions)** Il est immédiat qu'une fibration C^r pour $r \geq 1$ est une submersion surjective. En particulier, par le théorème de forme normale des submersions, toute fibre est une sous-variété C^r de l'espace total, de dimension $n - p$ si l'espace total est de dimension n et la base de dimension p. Toute submersion est localement (au sens d'au voisinage (convenable) de tout point de l'ensemble de départ) une fibration, par ce même théorème. Mais il existe des submersions qui ne sont pas des fibrations. Par exemple, l'application $x \mapsto x^3 - 3x$ de $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$ dans $\mathbb{R}$ est une submersion surjective, qui n'est pas une fibration (car le cardinal des fibres est fini et non localement constant). Mais nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.1 (Théorème de fibration d'Ehresmann) *Une submersion surjective propre de classe* C^∞ *est une fibration de classe* C^∞.

Rappelons qu'une application entre deux espaces topologiques localement compacts est *propre* si l'image réciproque de tout compact est compact. En particulier, une submersion surjective de classe C^∞ d'une variété compacte M de classe C^∞ sur une variété N de classe C^∞ est une fibration de classe C^∞. L'hypothèse de régularité C^∞ dans le théorème précédent peut être affaiblie en C^2 (voir [Ehr, §1]).

Démonstration. Soient M et N deux variétés de classe C^∞, de dimensions m et n respectivement, et $f : M \to N$ une submersion surjective de classe C^∞.

Lemme 2.2 *Pour tout champ de vecteurs Y de classe C^∞ sur N, il existe au moins un champ de vecteurs X de classe C^∞ sur M tel que*

$$\forall\, x \in M, \qquad T_x f(X(x)) = Y(f(x))\ .$$

Soient $(\phi_{X,t})$ le flot local du champ de vecteurs X et $(\phi_{Y,t})$ celui de Y. Pour tout x_0 dans X, si (x, t) est suffisamment proche de $(x_0, 0)$, alors

$$f \circ \phi_{X,t}(x) = \phi_{Y,t} \circ f(x)\ .$$

Démonstration. Remarquons que $m \geq n$. Si $M = \mathbb{R}^m, N = \mathbb{R}^n$ et π est la submersion standard $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$, pour tout champ de vecteurs $(y_1, \ldots, y_n) \mapsto Z(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^n Z_i(y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_i}$ sur N, avec $Z_i \in \mathrm{C}^\infty(N; \mathbb{R})$, le champ de vecteurs $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto \widetilde{Z}(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^n Z_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x^i}$ sur M est C^∞ et vérifie que $d\pi_x(\widetilde{Z}(x)) = Z(\pi(x))$, car π est linéaire.

Montrons maintenant que pour tout x dans M, il existe un voisinage ouvert U_x de x et un champ de vecteurs X_x de classe C^∞ sur U_x tel que $T_y f(X_x(y)) = Y(f(y))$ pour tout y dans U_x.

En effet, par le théorème de forme normale des submersions, pour tout x dans M, il existe une carte locale (U_x, φ) en x avec $\varphi(U_x) = \mathbb{R}^m$ et une carte locale (V, ψ) en $f(x)$ avec $\psi(V) = \mathbb{R}^n$ telle que $f(U_x) \subset V$ et $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \pi$. Alors le champ de vecteurs $X_x = \varphi^*(\ \widetilde{(\psi^{-1})^*(Y_{|V})}\ )$ convient. En effet, pour tout y dans U_x, comme $T_{f(y)}\psi$ est bijective, il suffit de montrer que $T_{f(y)}\psi(T_y f(X_x(y))) = T_{f(y)}\psi(Y(f(y)))$. Or le premier membre, par la définition de l'image réciproque par φ du champ de vecteurs $\widetilde{(\psi^{-1})^*(Y_{|V})}$ et le théorème de dérivation des fonctions composées, vaut $T_{\varphi(y)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\ \widetilde{(\psi^{-1})^*(Y_{|V})}\ (\varphi(y)))$, donc par définition de $Z \mapsto \widetilde{Z}$, ceci vaut $(\psi^{-1})^*(Y_{|V})(\pi(\varphi(y))) = (\psi^{-1})^*(Y_{|V})(\psi \circ f(y))$, et par définition de l'image réciproque d'un champ de vecteurs, le résultat en découle.

Enfin, soit $(\varphi_x)_{x \in M}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement ouvert $(U_x)_{x \in M}$. Posons $X = \sum_{x \in M} \varphi_x X_x$, qui est un champ de vecteurs C^∞, car cette somme est finie au voisinage de tout point. Par linéarité des applications tangentes, par le fait que le support de φ_x soit contenu dans U_x, et par le fait que la somme de la famille $(\varphi_x)_{x \in M}$ vaille 1, nous avons donc, pour tout y dans M,

$$T_y f(X(y)) = \sum_{x \in M} \varphi_x(y)\ T_y f(X_x(y)) = \sum_{x \in M} \varphi_x(y)\ Y(f(y)) = Y(f(y))\ ,$$

le premier point qu'il fallait démontrer.

Considérons les courbes $t \mapsto f \circ \phi_{X,t}(x)$ et $t \mapsto \phi_{Y,t} \circ f(x)$, qui sont de classe C^∞. Leurs valeurs en $t = 0$ sont égales, et elles vérifient, par le théorème de dérivation des fonctions composées, la définition du flot local, et ce qui précède :

$$\frac{d}{dt}\ f \circ \phi_{X,t}(x) = T_{\phi_{X,t}(x)} f(X(\phi_{X,t}(x))) = Y(f \circ \phi_{X,t}(x))\ ,$$

$$\frac{d}{dt}\ \phi_{Y,t} \circ f(x) = Y(\phi_{Y,t} \circ f(x))\ .$$

Deux fonctions qui vérifient la même équation différentielle du premier ordre et coïncident en un point sont égales, au moins au voisinage de ce point, ce qui conclut. □

Soient y_0 dans N, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $T_{y_0}N$, (U, φ) une carte locale en y_0, Z_i le champ de vecteurs constant égal à $T_{y_0}\varphi(e_i)$ sur $\varphi(U)$, σ une fonction C^∞ sur $\varphi(U)$, valant 1 au voisinage de $\varphi(y_0)$ et de support contenu dans $\varphi(U)$. Posons $Y_i = \varphi^*(\sigma\ Z_i)$, prolongé par 0 en dehors de U. Alors $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des champs de vecteurs de classe C^∞ sur N, tels que $Y_i(y_0) = e_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Si $\phi_{Y_i,t}$ est le flot local de Y_i, montrons que l'application

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \phi_{Y_1,t_1} \circ \cdots \circ \phi_{Y_n,t_n}(y_0)$$

est un C^∞-difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ sur un voisinage ouvert de y_0 dans N.

Par le théorème d'inversion locale, il suffit de montrer que la différentielle en $(0,\dots,0)$ de l'application $(t_1,\dots,t_n)\mapsto \phi_{Y_1,t_1}\circ\cdots\circ\phi_{Y_n,t_n}(y_0)$, qui est de classe C^∞, est inversible. Or, par le théorème de dérivation des fonctions composées, par l'équation différentielle vérifiée par le flot d'un champ de vecteurs, et comme $\phi_{Y_i,0}=\mathrm{id}$, la différentielle de cette application envoie la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sur $(Y_1(y_0),\dots,Y_n(y_0))$, c'est-à-dire sur la base $(e_1,\dots,e_n)$ de $T_{y_0}N$, donc elle est inversible.

Pour conclure, soient y_0 dans N et $F=f^{-1}(y_0)$, qui est une sous-variété compacte de M car f est une submersion C^∞ propre. Par ce qui précède, notons U un voisinage de y_0 dans N, $Y_1,\dots,Y_n$ des champs de vecteurs sur N tels que $\theta:(t_1,\dots,t_n)\mapsto\phi_{Y_1,t_1}\circ\cdots\circ\phi_{Y_n,t_n}(y_0)$ soit un difféomorphisme local en 0, et $X_1,\dots,X_n$ des champs de vecteurs C^∞ sur M tels que $T_xf(X_i(x))=Y_i(f(x))$ pour tout x dans X. Par compacité de F, il existe $\epsilon>0$ tel que le flot local $\phi_{X_i,t}$ du champ de vecteurs X_i soit défini au moins sur le temps $]-\epsilon,\epsilon[$ en tout point de F, donc sur un voisinage de F quitte à réduire ϵ, et pour tout i. Posons $\varphi':F\times]-\epsilon,\epsilon[^n\to M$ définie (quitte à réduire ϵ) par $(x,(t_1,\dots,t_n))\mapsto\phi_{X_1,t_1}\circ\cdots\circ\phi_{X_n,t_n}(x)$, qui est C^∞. Notons $\varphi:F\times U\to M$ l'application définie, quitte à réduire U, par $\varphi(x,y)=\varphi'(x,\theta^{-1}(y))$. Par le lemme 2.2,

$$f\circ\phi_{X_1,t_1}\circ\cdots\circ\phi_{X_n,t_n}(x)=\phi_{Y_1,t_1}\circ\cdots\circ\phi_{Y_n,t_n}(f(x))\ ,$$

donc $f\circ\varphi(x,y)=y$. Pour montrer que φ est un C^∞-difféomorphisme sur un voisinage de F dans M quitte à réduire U, il suffit de montrer que φ' l'est quitte à réduire ϵ. Or, quitte à réduire les domaines,

$$u\mapsto(\phi_{X_n,\,\mathrm{pr}_n\circ\theta^{-1}\circ f(u)}{}^{-1}\circ\cdots\circ\phi_{X_1,\,\mathrm{pr}_1\circ\theta^{-1}\circ f(u)}{}^{-1}(u),\theta^{-1}\circ f(u))$$

est une application C^∞, inverse de φ'.

Nous avons donc montré l'existence de trivialisations locales au-dessus d'un voisinage de chaque point de N, par surjectivité, d'où le résultat. □

(4) **(Espaces homogènes)** Les espaces homogènes donnent des exemples importants de fibrations.

Théorème 2.3 *Soit M une variété C^∞ (respectivement analytique complexe), munie d'une action (à gauche) lisse, libre et propre d'un groupe de Lie réel (respectivement complexe) G. Munissons l'espace topologique quotient $G\backslash M$ de son unique structure de variété C^∞ (respectivement analytique complexe) telle que la projection canonique $\pi:M\to G\backslash M$ soit une submersion C^∞ (respectivement analytique complexe). Alors π est une fibration C^∞ (respectivement analytique complexe) de fibre G.*

Démonstration. Montrons que pour tout ouvert V de $G\backslash M$, pour toute section $\sigma:V\to M$ de classe C^∞ (respectivement analytique complexe) de π, l'application $\theta:V\times G\to\pi^{-1}(V)$ définie par $(x,g)\mapsto g\,\sigma(x)$ est un difféomorphisme de classe C^∞ (respectivement analytique complexe). Il est alors immédiat de voir que θ^{-1} rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc}\pi^{-1}(V) & \xrightarrow{\theta^{-1}} & V\times G\\ & \pi\searrow \quad \swarrow\mathrm{pr}_1 & \\ & V & \end{array}\ ,$$

donc est une trivialisation de π au-dessus de V. Ceci conclut, par l'existence locale de sections impliquée par la propriété de submersion surjective.

L'application θ est clairement C^∞, surjective par construction, et injective car l'action est libre. Puisque toute submersion bijective est un difféomorphisme, il suffit de montrer que θ est une submersion en tout $(x, g) \in V \times G$. Puisque θ est équivariante (car $\theta(x, g'g) = g'\theta(x, g)$ pour tout $g' \in G$) et puisque les actions à gauche de tout élément g' de G sont des difféomorphismes, il suffit de montrer que $T_{(x,e)}\theta$ est surjective.

En notant pr_1 et pr_2 les projections sur les premier et second facteurs de $T_{(x,e)}(V \times G) = T_xV \times T_eG$, nous avons $T_{(x,e)}\theta = T_e\varphi_{\sigma(x)} \circ \mathrm{pr}_2 + T_x\sigma \circ \mathrm{pr}_1$. Puisque π est une submersion et σ une section de π, nous avons $T_{\sigma(x)}M = T_{\sigma(x)}(\pi^{-1}(x)) \oplus T_x\sigma(T_xV)$. Le résultat découle donc du fait que l'application $\varphi_{\sigma(x)} : G \to G \cdot \sigma(x) = \pi^{-1}(x)$ est une submersion, par le théorème 1.62 (3), qui s'applique car $G_x = \{e\}$ puisque l'action est libre, et puisque l'orbite $G \cdot \sigma(x)$ est localement fermée, comme démontré dans la démonstration du théorème 1.64. □

La démonstration du théorème 2.3 montre aussi le résultat suivant, disant qu'un fibré principal (voir la définition dans la partie 1.5.1) est trivialisable si et seulement s'il admet une section globale lisse.

Proposition 2.4 *Soient M une variété C^∞ (respectivement analytique complexe), munie d'une action à droite lisse, libre et propre d'un groupe de Lie réel (respectivement complexe) G, et $\pi : M \to M/G$ la projection canonique. Alors la fibration π est trivialisable si et seulement si elle admet une section $\sigma : M/G \to M$ de classe C^∞ (respectivement analytique complexe).* □

En particulier, soient G un groupe de Lie réel (respectivement complexe), H un sous-groupe de Lie plongé de G, et $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Munissons G/H de son unique structure de variété C^∞ (respectivement analytique complexe), telle que π soit une submersion C^∞ (respectivement analytique complexe), voir le théorème 1.60. Le théorème précédent, appliqué à l'action (à gauche) par translations à droite de H sur G, qui est libre et propre, montre le résultat suivant.

Corollaire 2.5 *Soit H un sous-groupe de Lie plongé d'un groupe de Lie réel (respectivement complexe) G. Alors la projection canonique $\pi : G \to G/H$ est une fibration C^∞ (respectivement analytique complexe) de fibre H.* □

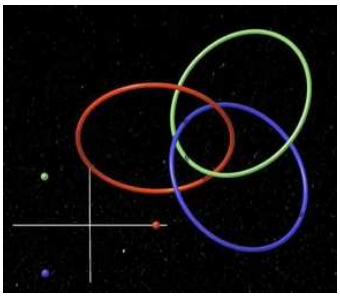
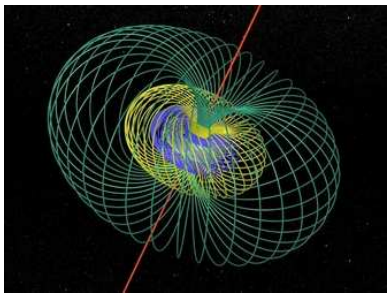
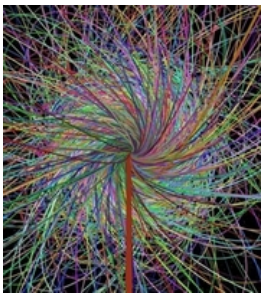
Exemples : (Fibrations de Hopf) Pour tout entier $n \geq 1$, soient M la sphère $\mathbb{S}_{2n+1} = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ |z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ de dimension $2n+1$ et G le groupe de Lie réel $\mathbb{S}_1$, qui agit sur M par multiplication terme à terme

$$z \cdot (z_0, \ldots, z_n) = (zz_0, \ldots, zz_n) \ .$$

Cette action est lisse et libre. Elle est propre car M et G sont compacts. De plus, la projection canonique de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ induit par passage au quotient un difféomorphisme C^∞ de la variété quotient $\mathbb{S}_1 \backslash \mathbb{S}_{2n+1}$ dans l'espace projectif complexe de dimension n

$$\mathbb{S}_1 \backslash \mathbb{S}_{2n+1} \simeq \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \ .$$

En particulier, la projection canonique $\pi : \mathbb{S}_{2n+1} \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est une fibration C^∞ de fibre $\mathbb{S}_1$.

En prenant $n = 1$, étant donné que la droite projective complexe $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est C^∞-difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$, nous obtenons que la sphère $\mathbb{S}_3$ fibre sur la sphère $\mathbb{S}_2$ de fibre le cercle $\mathbb{S}_1$. Pour une magnifique illustration graphique de ce fait, dont sont extraits les dessins ci-dessus, nous recommendons fortement la consultation des chapitres 7 et 8 du film de vulgarisation scientifique "Dimensions" [AGL], disponible librement sur

www.dimensions-math.org

Les deux cercles dans $\mathbb{S}_3$ d'équations $z_0 = 0$ et $z_1 = 0$ respectivement sont des fibres de la fibration de Hopf. Pour tout $a \in]0, 1[$, la partie

$$T_a = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C} \ : \ |z_0| = a, |z_1| = \sqrt{1 - a^2}\ \}$$

de $\mathbb{S}_3$ est C^∞-difféomorphe au tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$, et est réunion de fibres de la fibration de Hopf (voir le dessin du milieu ci-dessus). Le dessin utilise la projection stéréographique $\mathbb{S}_3 - \{(1, 0)\} \to \mathbb{R}^3$ de pôle $(1, 0) \in \mathbb{C}^2$ et $\mathbb{S}_2 - \{(1, 0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ de pôle $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, et représente pour tout point x de $\mathbb{R}^2$ (comme l'un des trois points du dessin de gauche ci-dessus) le cercle au-dessus de x dans la fibration de Hopf (comme l'un des trois cercles du dessin de gauche ci-dessus).

(5) **(Fibrations plates)** Soient M et F deux variétés C^r où M est connexe, et $f : \widetilde{M} \to M$ un revêtement galoisien C^r de M, de groupe des automorphismes de revêtements Γ (par exemple un revêtement universel de M, auquel cas Γ est un groupe fondamental de M). Soit $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}_r(F)$ un morphisme de groupes quelconque du groupe Γ dans le groupe des difféomorphismes de classe C^r de F. L'action diagonale de Γ sur $\widetilde{M} \times F$, définie par

$$\gamma(x, y) = \big(\gamma x, \rho(\gamma)(y)\big)\ ,$$

est propre et libre, car elle l'est sur le premier facteur, et est une action par C^r-difféomorphismes. L'application de $\widetilde{M} \times F$ dans M définie par $(x, y) \mapsto f(x)$ passe au quotient en une application lisse $p = p_{f,\rho} : \Gamma\backslash(\widetilde{M} \times F) \to M$ de la variété C^r quotient $\Gamma\backslash(\widetilde{M} \times F)$ dans M.

Proposition 2.6 *L'application $p = p_{f,\rho}$ est une fibration C^r sur M de fibre F.*

Démonstration. Puisque f est galoisien, pour tout $b \in M$, il existe un voisinage ouvert U de b dans M et un ouvert V dans $\widetilde{M}$ tel que $f_{|V} : V \to U$ soit un difféomorphisme et $f^{-1}(U) = \coprod_{\gamma\in\Gamma} \gamma V$. La projection canonique de $\widetilde{M} \times F$ dans $\Gamma\backslash(\widetilde{M} \times F)$ donne donc par restriction un C^r-difféomorphisme $\phi : V \times F \to p^{-1}(U)$. Donc $(f_{|V} \times \mathrm{id}_F) \circ \phi^{-1} : p^{-1}(U) \to$

$U \times F$ est une trivialisation locale C^r de p au-dessus de U, et $p : \Gamma\backslash(\widetilde{M} \times F) \to M$ est une fibration C^r de fibre F. $\square$

Par exemple, si ρ est le morphisme de groupes trivial, il est immédiat de voir que la fibration $p_{f,\rho}$ est trivialisable.

2.2 Fibrés vectoriels

Pour parler comme un physicien, un fibré vectoriel est un *champ d'espaces vectoriels* $b \mapsto \xi_b$ dépendant de manière lisse d'un point b variant dans un espace lisse de paramètres. Et la plupart des opérations que l'on peut faire sur les espaces vectoriels, on peut les faire sur les champs d'espaces vectoriels.

2.2.1 Définitions et exemples

Soient $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si $r = \omega_{\mathbb{C}}$. Un *fibré vectoriel* réel (respectivement complexe) ξ de classe C^r est la donnée d'une fibration $p : E \to B$ de classe C^r entre deux variétés de classe C^r et, pour tout b dans B, d'une structure d'espace vectoriel réel (respectivement complexe) ξ_b sur $p^{-1}(b)$, de sorte que, pour tout b dans B, il existe un voisinage ouvert U de b, un espace vectoriel réel (respectivement complexe) F de dimension finie, et une trivialisation locale $\phi : p^{-1}(U) \to U \times F$ de ξ au-dessus de U, telle que $\mathrm{pr}_2 \circ \phi_{|p^{-1}(y)} : \xi_y \to F$ soit un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire pour tout y dans U.

Lorsque $r = \omega_{\mathbb{C}}$, nous ne considèrerons que des fibrés vectoriels complexes (ce qui est nécessaire pour que la définition ait un sens). Nous dirons que p est la *projection* du fibré vectoriel ξ, qu'un tel U est un *ouvert distingué* ou un *voisinage ouvert distingué* de b du fibré vectoriel ξ, et qu'un tel ϕ est une *trivialisation locale* du fibré vectoriel ξ au-dessus de U. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $b \in B$ la dimension de ξ_b soit n, nous dirons que ξ est un fibré vectoriel *de rang* n.

Soient ξ et ξ' des fibrés vectoriels réels (resp. complexes) de classe C^r, de projections $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ respectivement. Un *morphisme* C^r *(de fibrés vectoriels)* de ξ dans ξ' est un morphisme de fibrations (f, g) de p dans p'

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array} ,$$

tel que, pour tout b dans B, l'application f induise un morphisme d'espaces vectoriels réels (respectivement complexes) de ξ_b dans $\xi'_{g(b)}$. Une application $f : E \to E'$ est un *morphisme* C^r *(de fibrés vectoriels) au-dessus de l'identité* de ξ dans ξ' si $B = B'$ et si (f, id) est un morphisme C^r de fibrés vectoriels.

Le morphisme identité $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$ de la fibration p est un morphisme du fibré vectoriel ξ dans lui-même. Si (f', g') est un morphisme de fibrés vectoriels de ξ' dans un fibré vectoriel ξ'', alors la composition $(f' \circ f, g' \circ g)$ des morphismes de fibrations (f, g) et (f', g') est un morphisme de fibrés vectoriels de ξ dans ξ''. Ainsi, la collection des fibrés vectoriels C^r et des ensembles de morphismes de fibrés vectoriels C^r entre deux fibrés vectoriels C^r est une catégorie.

Nous noterons $\Gamma(\xi)$, et par abus $\Gamma(E)$, l'ensemble des sections C^r de p. Muni de l'addition point par point $\sigma + \sigma' : x \mapsto \sigma(x) + \sigma'(x)$ et de la multiplication externe point par point $f\sigma : x \mapsto f(x)\sigma(x)$ par une application $f \in \mathrm{C}^r(B;\mathbb{K})$ de $\sigma \in \Gamma(\xi)$, l'ensemble $\Gamma(\xi)$ est un $\mathrm{C}^r(B;\mathbb{K})$-module.

Remarque. Un fibré vectoriel réel C^r de rang n est une fibration C^r de fibre la variété $\mathbb{R}^n$. Mais une fibration de fibre la variété $\mathbb{R}^n$ n'admet pas toujours de structure de fibré vectoriel (compatible avec celle de fibration). Pour comprendre ceci (sans donner d'exemple), regardons la contruction suivante. Le groupe $\mathbb{Z}$ agit librement et proprement par difféomorphismes analytiques réels sur $\mathbb{R}^2$, l'action de 1 étant $(x, y) \mapsto (x + 1, \sinh y)$. Soit M la variété quotient analytique réelle $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}^2$. L'application analytique réelle $(x, y) \mapsto x$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ induit par passage au quotient une fibration analytique réelle $M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}_1$, de fibre $\mathbb{R}$. Si l'on munit, pour tout $\theta \in [0, 1[$, la fibre au-dessus de $\theta + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de la structure d'espace vectoriel définie par $\{\theta\} \times \mathbb{R}$, cette fibration n'est pas un fibré vectoriel (car les structures d'espace vectoriel ne varient pas continûment).

Exemples. (1) **(Fibrés vectoriels triviales et trivialisables)** Soient $n \in \mathbb{N}$, M une variété C^r et V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si $r = \omega_{\mathbb{C}}$. Pour tout $x \in M$, munissons $\{x\} \times V$ de l'unique structure d'espace vectoriel rendant linéaire la bijection $v \mapsto (x, v)$ de V dans $\{x\} \times V$. Alors la première projection $\mathrm{pr}_1 : M \times V \to M$ de la variété produit $M \times V$ dans M est un fibré vectoriel réel (respectivement complexe), de base M et de rang n, dit *trivial*.

Tout fibré vectoriel isomorphe à un fibré vectoriel trivial est dit *trivialisable*.

Il est immédiat de montrer qu'un fibré vectoriel ξ de rang n, d'application $p : E \to B$, est trivialisable si et seulement s'il admet des sections C^r globales (c'est-à-dire définies sur toute la base B) $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ telles que, pour tout $b \in B$, les éléments $\sigma_1(b), \ldots, \sigma_n(b)$ de l'espace vectoriel ξ_b soient linéairement indépendants (ou, de manière équivalente, forment une base de ξ_b). En particulier, un fibré vectoriel de rang 1 est trivialisable si et seulement s'il admet une section ne s'annulant pas.

Le $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K})$-module $\Gamma(\xi)$ des sections C^r d'un fibré vectoriel trivialisable ξ de rang n est donc un $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K})$-module libre de rang n (de base n'importe quel $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ comme ci-dessus).

Notons que si M est une variété C^r, si $n \in \mathbb{N}$ et si $\xi_{\mathbb{K}^n}$ est le fibré vectoriel trivial sur M de fibre $\mathbb{K}^n$, alors l'espace vectoriel $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K}^n)$ est identifié avec l'espace vectoriel $\Gamma(\xi_{\mathbb{K}^n})$ par l'application $f \mapsto \{x \mapsto (x, f(x))\}$:

$$\Gamma(\xi_{\mathbb{K}^n}) = \mathrm{C}^r(M;\mathbb{K}^n) \ .$$

(2) **(Fibré vectoriel tangent)** Si M est une variété réelle (respectivement complexe) de classe C^{r+1} de dimension n, alors son fibré tangent $\pi : TM \to M$ est un fibré vectoriel réel (respectivement complexe) de classe C^r de rang n.

En effet, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), si $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ est un atlas de cartes locales de M, alors $(TU_i, T\varphi_i)_{i\in I}$ est un atlas de cartes locales de TM et l'application de TU_i dans $U_i \times \mathbb{K}^n$ définie, en notant pr_2 la projection sur le second facteur de $T\varphi_i(TU_i) = \varphi_i(U_i) \times \mathbb{K}^n$, par

$$v \mapsto \big(\pi(v), \mathrm{pr}_2 \circ T\varphi_i(v)\big) \ ,$$

est une trivialisation locale de π au-dessus de l'ouvert U_i de M, par la linéarité sur les fibres des applications tangentes. Le fait qu'au-dessus de tout domaine de carte locale de M, le fibré tangent soit trivialisable, est remarquable. Il servira plus loin.

Si $f : M \to N$ est une application C^{r+1}, alors (Tf, f) est un morphisme de fibrés vectoriels de TM sur TN : le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ {\scriptstyle \pi_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_N} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} .$$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), le $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K})$-module $\Gamma(TM)$ des sections C^r du fibré tangent de M est le module des champs de vecteurs C^r sur M.

(3) **(Variété parallélisable)** Une variété de classe C^{r+1} est dite *parallélisable* si son fibré tangent est trivialisable. Le $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K})$-module $\Gamma(TM)$ des champs de vecteurs C^r sur une variété parallélisable M de classe C^{r+1} et de dimension n est donc un $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K})$-module libre de rang n.

Toute variété est localement parallélisable : si U est un domaine de carte locale de M, alors son fibré tangent TU est trivialisable ; en particulier le $\mathrm{C}^r(U;\mathbb{K})$-module $\Gamma(TU)$ des champs de vecteurs C^r sur U est un $\mathrm{C}^r(U;\mathbb{K})$-module libre de rang n.

Tout groupe de Lie est parallélisable. En effet, si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de son algèbre de Lie, alors les sections $\sigma_i : g \mapsto T_e L_g(X_i)$ (globalement définies) de son fibré tangent sont linéairement indépendantes en tout point. En particulier, le fibré tangent du cercle est trivialisable (un isomorphimse de fibrés vectoriels explicite de $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$ dans $T\mathbb{S}_1$ est donné par $(e^{i\theta}, t) \mapsto it\, e^{i\theta}$).

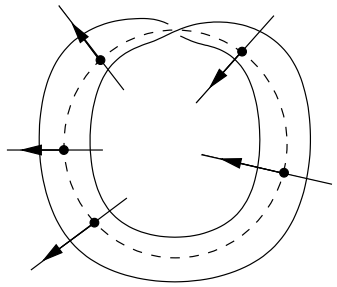
(4) **(Fibré vectoriel tautologique)** Soient V un espace vectoriel réel (respectivement complexe) de dimension finie n et $k \in \{0, \ldots, n\}$. Notons

$$\tau_k(V) = \{(x, v) \in \mathscr{G}_k(V) \times V \ : \ v \in x\}$$

et $\pi : \tau_k(V) \to \mathscr{G}_k(V)$ la restriction à $\tau_k(V)$ de la première projection de $\mathscr{G}_k(V) \times V$ dans $\mathscr{G}_k(V)$. Toute fibre de π admet une structure évidente d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$: pour tout $x \in \mathscr{G}_k(V)$, munissons $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times x$ de l'unique structure d'espace vectoriel réel (respectivement complexe) rendant linéaire la bijection de x dans $\pi^{-1}(x)$ définie par $v \mapsto (x, v)$. Alors ces données définissent un fibré vectoriel réel (respectivement complexe) de rang k sur $\mathscr{G}_k(V)$, dit *tautologique*.

Par exemple, le fibré tautologique sur l'espace projectif réel (respectivement complexe) est un fibré vectoriel en droites réelles (respectivement complexes).

Si $n \geq 1$, le fibré tautologique de l'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{G}_1(\mathbb{R}^{n+1})$ n'est pas trivial. En effet, toute section σ de ce fibré est une application de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$ de la forme $\mathbb{R}x \mapsto (\mathbb{R}x, t(x)x)$ où $t : \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}$ est une application continue telle que $-t(-x) = t(x)$, et par connexité par arc de $\mathbb{S}_n$, l'application t s'annule. En particulier, si $n = 1$, le fibré tautologique de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}_1$ est non trivial. Son espace total est le *ruban de Möbius*.



(5) **(Fibré vectoriel plat)** Soient M une variété C^r connexe, F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n, $f : \widetilde{M} \to M$ un revêtement galoisien de M, de groupe des automorphismes de revêtements Γ (par exemple un revêtement universel de M, auquel cas Γ est un groupe fondamental de M), et $\rho : \Gamma \to \mathrm{GL}(F)$ un morphisme de groupes quelconque du groupe Γ dans le groupe des automorphismes linéaires de F. Soit $p = p_{f,\rho} : \Gamma\backslash(\widetilde{M} \times F) \to M$ la fibration plate associée à f, ρ (voir l'exemple (5) de la partie 2.1 précédente). Pour tout $x \in M$, fixons $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ tel que $f(\widetilde{x}) = x$. La projection canonique de $\widetilde{M} \times F$ dans $\Gamma\backslash(\widetilde{M} \times F)$ induit par restriction une bijection de $\{\widetilde{x}\} \times F$ dans la fibre $p^{-1}(x)$, ce qui permet de munir cette fibre d'une structure d'espace vectoriel.

Proposition 2.7 *La donnée de l'application $p_{f,\rho}$ et de ces structures d'espaces vectoriels sur les fibres de $p_{f,\rho}$ est un fibré vectoriel sur M de rang n.*

Lorsque $f : \widetilde{M} \to M$ est un revêtement universel de M, ce fibré vectoriel est noté ξ_ρ et appelé le *fibré plat de monodromie* ρ, pour des raisons que nous verrons plus tard.

Démonstration. Puisque Γ agit par automorphismes linéaires sur F, il est facile de vérifier que cette structure vectorielle sur $p^{-1}(x)$ ne dépend pas du choix de la préimage $\widetilde{x}$ de x par f. Il est alors facile de vérifier que les trivialisations locales de la fibration $p_{f,\rho}$ construites dans la démonstration de la proposition 2.6 sont des trivialisations locales de fibrés vectoriels. □

(6) **(Fibration grassmannienne)** Soit ξ un fibré vectoriel C^r de rang n (réel ou complexe) de projection $p : E \to B$, et k un élément de $\{1, \ldots, n\}$. Notons $\mathscr{G}_k E$ l'ensemble somme disjointe $\coprod_{b \in B} \mathscr{G}_k(E_b)$ des variétés grassmanniennes de rang k des fibres de p, et $\mathscr{G}_k p : \mathscr{G}_k E \to B$ l'application qui à un élément de $\mathscr{G}_k(E_b)$ associe b. Cette application admet alors une unique structure de fibration C^r telle que, pour tout inverse de trivialisation locale $h : U \times \mathbb{K}^n \to p^{-1}(U)$ de p au dessus d'un ouvert U de B, l'application $U \times \mathscr{G}_k(\mathbb{K}^n) \to (\mathscr{G}_k p)^{-1}(U)$ définie par $(x, A) \mapsto h(\{x\} \times A)$ soit l'inverse d'une trivialisation locale de $\mathscr{G}_k p : \mathscr{G}_k E \to B$ au dessus de U. Cette fibration (ou par abus la variété $\mathscr{G}_k E$) s'appelle la *fibration grassmannienne de rang k de E* ou *fibré des k-plans* de E. En particulier, si $k = 1$, alors la fibration grassmanienne de rang 1 de E est notée $\mathbb{P}(p) : \mathbb{P}(E) \to B$, et appelée la *fibration projective* (ou fibré projectif) de E.

Si le couple $(f, \overline{f})$ est un morphisme de fibrés vectoriels C^r d'un fibré vectoriel ξ de projection $p : E \to B$ sur un fibré vectoriel ξ' de projection $p' : E' \to B'$, et si f est injective en restriction à chaque fibre de ξ, alors le couple $(\mathscr{G}_k f : A \mapsto f(A), \overline{f})$ est un morphisme de fibrations de $\mathscr{G}_k p : \mathscr{G}_k E \to B$ dans $\mathscr{G}_k p' : \mathscr{G}_k E' \to B$. Ainsi, par des vérifications immédiates, nous venons de définir un foncteur de la catégorie des fibrés vectoriels et des morphismes de fibrés vectoriels injectifs sur les fibres dans la catégorie des fibrations.

Si M est une variété C^{r+1}, alors nous appellerons *fibration grassmannienne* de rang k de M, ou *fibré des k-plans tangents* de M, la fibration grassmannienne $\mathscr{G}_k\pi : \mathscr{G}_k(TM) \to M$ de rang k du fibré tangent $\pi : TM \to M$ de M, qui est de classe C^r. Ainsi, le fibré des droites tangentes de M est le fibré projectif du fibré tangent de M. Si $s \in \mathbb{N}$ vérifie $s \leq r$, nous appellerons *champs de k-plans* sur M de classe C^k toute section de classe C^k de la fibration grassmannienne de rang k de M.

Remarque 2.8 Il est facile de voir que si $s = r$ vaut ∞ ou $\omega_{\mathbb{C}}$, cette définition coïncide avec celle donnée avant l'énoncé du théorème de Frobénius 1.40.

Par exemple, si $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, si ξ est le fibré vectoriel trivial de fibre $\mathbb{K}^n$ et de base B, alors la fibration grassmannienne de rang k de ξ est isomorphe à la fibration triviale $\mathrm{pr}_1 : B \times \mathscr{G}_k(\mathbb{K}^n) \to B$. En particulier, si M est un ouvert de $\mathbb{K}^n$, comme le fibré tangent TM de M s'identifie avec $M \times \mathbb{K}^n$, alors la fibration grassmannienne de rang k de TM est isomorphe à la fibration triviale $\mathrm{pr}_1 : M \times \mathscr{G}_k(\mathbb{K}^n) \to M$. Plus généralement, la fibration grassmannienne de rang k d'une variété parallélisable est trivialisable.

2.2.2 Sous-fibrés et fibrés quotient

Soient $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$ et $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si $r = \omega_{\mathbb{C}}$. Sauf mention explicite du contraire, tous les fibrés vectoriels dans cette partie sont des fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ de classe C^r sur une même base B, et les morphismes de fibrés vectoriels sont des morphismes au-dessus de l'identité.

Soit ξ un fibré vectoriel, de projection $p : E \to B$. Un *sous-fibré vectoriel* de ξ est une partie E' de E telle que

- $p^{-1}(b) \cap E'$ est un sous-espace vectoriel de ξ_b pour tout $b \in B$,
- pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b, une trivialisation locale $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ de ξ au-dessus de U et un sous-espace vectoriel F' de F tel que $\varphi(E' \cap p^{-1}(U)) = U \times F'$.

Il découle de cette définition que E' est une sous-variété fermée de E, et que la donnée de l'application $p' = p_{|E'}$ et de la structure d'espace vectoriel induite sur chaque fibre $(p')^{-1}(b)$ par celle de ξ_b est un fibré vectoriel ξ' sur B. De plus, l'inclusion i de E' dans E est un morphisme de fibrés vectoriels. Sauf mention explicite du contraire, tout sous-fibré vectoriel d'un fibré vectoriel est muni de cette structure de fibré vectoriel.

Soit ξ' un sous-fibré vectoriel de ξ de projection $p' : E' \to B$, et $i : E' \to E$ l'injection canonique $(x \mapsto x)$. Notons E'' la réunion disjointe des espaces vectoriels quotients ξ_b/ξ'_b lorsque b parcourt B, et $p'' : E'' \to B$ l'application valant b sur ξ_b/ξ'_b pour tout $b \in B$. Pour toute trivialisation locale $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ de ξ au-dessus d'un ouvert U et tout sous-espace vectoriel F' de F tel que $\varphi((p')^{-1}(U)) = U \times F'$, l'application $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi : \xi_b \to F$ induit par passage au quotient un isomorphisme d'espaces vectoriels $\overline{\varphi}_b : \xi_b/\xi'_b \to F/F'$, et nous noterons $\overline{\varphi} : (p'')^{-1}(U) \to U \times (F/F')$ l'application valant $x \mapsto (b, \overline{\varphi}_b(x))$ sur chaque ξ_b/ξ'_b où $b \in U$.

La donnée ξ'' de l'application p'' et de la structure d'espace vectoriel quotient sur chaque fibre de p'' admet une et une seule structure de fibré vectoriel telle que, pour toute trivialisation locale $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ de p au-dessus d'un ouvert U et tout sous-espace vectoriel F' de F tel que $\varphi((p')^{-1}(U)) = U \times F'$, l'application $\overline{\varphi}$ de $(p'')^{-1}(U)$ dans

$U \times (F/F')$ soit une trivialisation locale de ξ'' au-dessus de U. Ce fibré vectoriel est appelé le *fibré vectoriel quotient* de ξ par ξ', et noté ξ/ξ'.

Soient $m \geq 2$, $\xi_0, \xi_1 \ldots, \xi_m$ des fibrés vectoriels, et $f_i : \xi_{i-1} \to \xi_i$ un morphisme de fibrés vectoriels pour $1 \leq i \leq m$. Nous dirons que la suite

$$\xi_0 \xrightarrow{f_1} \xi_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_m} \xi_m$$

est une *suite exacte de fibrés vectoriels*, si pour tout $b \in B$, la suite

$$\xi_{0,b} \xrightarrow{f_{1|\xi_{0,b}}} \xi_{1,b} \xrightarrow{f_{2|\xi_{1,b}}} \ldots \xrightarrow{f_{m|\xi_{m-1,b}}} \xi_{m,b}$$

est une suite exacte d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Exemples. (1) Le fibré tautologique de $\mathscr{G}_k(V)$ est un sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel trivial $\mathrm{pr}_1 : \mathscr{G}_k(V) \times V \to \mathscr{G}_k(V)$.

(2) Si N est une sous-variété C^{r+1} d'une variété M de classe $\mathrm{C}^{\mathrm{r}+1}$, alors le fibré tangent de N est un sous-fibré vectoriel du fibré tangent de M restreint à N (voir l'exemple (2) suivant la proposition 2.18 pour une définition des fibrés restreints à une sous-variété de la base).

(3) Soit ξ' un fibré vectoriel, de projection $p : E' \to B'$ (où nous ne supposons pas $B' = B$). Soient $k \in \mathbb{N}$ et (ϕ, f) un morphisme de fibrés vectoriels de ξ dans ξ', tels que f soit un homéomorphisme et, pour tout $x \in B$, l'application linéaire $\phi_x = \phi_{|\xi_x} : \xi_x \to \xi'_{f(x)}$ soit de rang k. Nous renvoyons à [Die2, 16.17.5] pour une démonstration des affirmations qui suivent.

- La partie $K = \bigcup_{x \in B} \ker \phi_x$ est un sous-fibré vectoriel de ξ, appelé le *noyau* de ϕ, et noté $\ker \phi$.
- De même, $I = \bigcup_{x \in B} \operatorname{im} \phi_x$ est un sous-fibré vectoriel de ξ', appelé l'*image* de ϕ, et noté $\operatorname{im} \phi$. Si ξ est de rang n, alors $\ker \phi$ et $\operatorname{im} \phi$ sont de rang $n - k$ et k.
- L'application ϕ induit un isomorphisme de fibrés vectoriels au-dessus de f entre le fibré vectoriel quotient $\xi/\ker \phi$ et $\operatorname{im} \phi$.

2.2.3 Opérations sur les fibrés vectoriels

Soient $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$ et $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si $r = \omega_{\mathbb{C}}$. Sauf mention explicite du contraire, tous les fibrés vectoriels dans cette partie sont des fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ de classe C^r sur une même base B, et les morphismes de fibrés vectoriels sont des morphismes au-dessus de l'identité.

• Rappels d'algèbre multilinéaire.

Soit K un corps commutatif. Tous les espaces vectoriels et applications linéaires et multilinéaires dans ces rappels sont définis sur K.

Soient $m \geq 1$ un entier et $E_0, E_1, \ldots, E_m, F_0, F_1, \ldots, F_m$ des espaces vectoriels de dimension finie. Notons $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_m; E_0)$ l'espace vectoriel des applications multilinéaires de $E_1 \times \cdots \times E_m$ dans E_0. Si $u_0 \in \mathscr{L}(E_0; F_0)$ et $u_i \in \mathscr{L}(F_i; E_i)$ pour $1 \leq i \leq m$ sont des applications linéaires, alors l'application de $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_m; E_0)$ dans $\mathscr{L}(F_1, \ldots, F_m; F_0)$

définie par $u \mapsto \{(x_1, \dots, x_m) \mapsto u_0 \circ u(u_1(x_1), \dots, u_m(x_m))\}$ est linéaire, et un isomorphisme linéaire si les u_i le sont. Si $1 \leq s < m$, nous identifierons $\mathscr{L}(E_1, \dots, E_m; E_0)$ et $\mathscr{L}(E_1, \dots, E_s; \mathscr{L}(E_{s+1}, \dots, E_m; E_0))$ par

$$u \mapsto \big\{(x_1, \dots, x_s) \mapsto \{(x_{s+1}, \dots, x_m) \mapsto u(x_1, \dots, x_m)\}\big\} .$$

Nous noterons $E_0^* = \mathscr{L}(E_0; K)$ l'espace vectoriel dual des formes linéaires sur E_0. Nous identifions E_0 avec son bidual E_0^{**} par l'application $x \mapsto \{\ell \mapsto \ell(x)\}$. Si $u : E_0 \to F_0$ est une application linéaire, nous notons ${}^t u : F_0^* \to E_0^*$ son application linéaire duale définie par $\ell \mapsto \ell \circ u$, qui est inversible si u l'est, avec $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.

Le *produit tensoriel* des espaces vectoriels $E_1, \dots, E_m$, noté $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$, est l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E_1^*, \dots, E_m^*; K)$ des formes multilinéaires sur $E_1^* \times \cdots \times E_m^*$. Si $(x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, notons $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$ l'élément de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ défini par

$$(\ell_1, \dots, \ell_m) \mapsto \prod_{i=1}^m \ell_i(x_i) .$$

Un tel élément de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ est parfois appelé un *tenseur pur*. Notons que pour tous les $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ dans K, nous avons

$$(\lambda_1 x_1) \otimes \cdots \otimes (\lambda_m x_m) = \lambda_1 \dots \lambda_m \, x_1 \otimes \cdots \otimes x_m .$$

Tout élément de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ est une somme finie de tenseurs purs.

Nous appellerons *puissance tensorielle m-ème*, et noterons $E^{\otimes m}$, le produit tensoriel de m copies de E. Posons $E^{\otimes 0} = K$ et remarquons que, par l'identification du bidual de E et de E, nous avons $E^{\otimes 1} = E$. Le produit tensoriel vérifie les propriétés suivantes.

1. **(Fonctorialité)** Pour tout $(u_i)_{1 \leq i \leq m} \in \prod_{i=1}^m \mathscr{L}(E_i; F_i)$, il existe une et une seule application linéaire $u_1 \otimes \cdots \otimes u_m : E_1 \otimes \cdots \otimes E_m \to F_1 \otimes \cdots \otimes F_m$ telle que, pour tout $(e_1, \dots, e_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, nous ayons

   $$u_1 \otimes \cdots \otimes u_m(e_1 \otimes \cdots \otimes e_m) = u_1(e_1) \otimes \cdots \otimes u_m(e_m) .$$

   C'est l'application de $\mathscr{L}(E_1^*, \dots, E_m^*; K)$ dans $\mathscr{L}(F_1^*, \dots, F_m^*; K)$ définie par $f \mapsto \big\{(\ell_1, \dots, \ell_m) \mapsto f\big({}^t u_1(\ell_1), \dots, {}^t u_m(\ell_m)\big)\big\}$.
2. **(Propriété universelle)** Pour toute application multilinéaire f de $E_1 \times \cdots \times E_m$ dans E_0, il existe une unique application linéaire $g : E_1 \otimes \cdots \otimes E_m \to E_0$ telle que $g(e_1 \otimes \cdots \otimes e_m) = f(e_1, \dots, e_m)$ pour tous les e_i dans E_i. En particulier, l'application $f \mapsto g$ est un isomorphisme linéaire de $\mathscr{L}(E_1, \dots, E_m; E_0)$ dans $\mathscr{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_m; E_0)$.
3. **(Commutativité)** Il existe un unique isomorphisme de $E_1 \otimes E_2$ dans $E_2 \otimes E_1$, qui envoie $e_1 \otimes e_2$ sur $e_2 \otimes e_1$ pour tous les e_i dans E_i. Nous identifierons par la suite ces espaces vectoriels par cet isomorphisme.
4. **(Associativité)** Il existe un unique isomorphisme de $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ dans $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$, qui envoie $(e_1 \otimes e_2) \otimes e_3$ sur $e_1 \otimes e_2 \otimes e_3$ pour tous les e_i dans E_i. Nous identifierons par la suite ces espaces vectoriels par cet isomorphisme.
5. **(Distributivité)** Il existe un unique isomorphisme $(E_1 \oplus E_2) \otimes E_3$ dans $(E_1 \otimes E_3) \oplus (E_2 \otimes E_3)$, qui envoie $(e_1 \oplus e_2) \otimes e_3$ sur $(e_1 \otimes e_3) \oplus (e_2 \otimes e_3)$ pour tous les e_i dans E_i.

6. **(Bases)** Si $(e_{i,j})_{1\leq j\leq n_i}$ est une base de E_i pour $1\leq i\leq m$, alors la famille $(e_{1,j_1}\otimes\cdots\otimes e_{m,j_m})_{1\leq j_1\leq n_1,\dots,1\leq j_m\leq n_m}$ est une base de $E_1\otimes\cdots\otimes E_m$. En particulier, nous avons
$$\dim(E_1\otimes\cdots\otimes E_m)=\prod_{i=1}^m\dim(E_i)\ .$$

7. **(Isomorphismes)** L'application linéaire de E_1 dans $K\otimes E_1$ définie par $x\mapsto 1\otimes x$ est un isomorphisme. En particulier, l'application linéaire de K dans $K\otimes K$ induite par $1\mapsto 1\otimes 1$ est un isomorphisme.

   Nous avons un isomorphisme d'espaces vectoriels canonique du produit tensoriel $\mathscr{L}(E_1;E_3)\otimes\mathscr{L}(E_2;E_4)$ dans $\mathscr{L}(E_1\otimes E_2;E_3\otimes E_4)$ qui à $u\otimes v$ associe l'unique application linéaire de $E_1\otimes E_2$ dans $E_3\otimes E_4$ associée par la propriété universelle à l'application bilinéaire $(x,y)\mapsto u(x)\otimes v(y)$ de $E_1\times E_2$ dans $E_3\otimes E_4$. En particulier, nous avons un isomorphisme canonique
$$E_1^*\otimes E_2^*\simeq(E_1\otimes E_2)^*=\mathscr{L}(E_1\otimes E_2;\mathbb{K})\simeq\mathscr{L}(E_1,E_2;\mathbb{K})\ ,$$
   qui est l'unique application linéaire qui à $\ell_1\otimes\ell_2$, où $\ell_i\in E_i^*$ pour $i=1,2$, associe l'unique forme linéaire sur $E_1\otimes E_2$ qui à $e_1\otimes e_2$ où $e_i\in E_i$ associe $\ell_1(e_1)\ell_2(e_2)$, ou la forme bilinéaire sur $E_1\times E_2$ qui à (x,y) associe $\ell_1(x)\ell_2(y)$; et nous avons un isomorphisme canonique
$$E_1^*\otimes E_2\simeq\mathscr{L}(E_1;E_2)\ ,$$
   qui est l'unique application linéaire qui à $f\otimes y$, pour $f\in E_1^*$ et $y\in E_2$, associe l'application linéaire $x\mapsto f(x)y$.

• **Rappels d'algèbre symétrique et alternée.**

Soit K un corps commutatif. Tous les espaces vectoriels et les applications linéaires et multilinéaires dans ces rappels sont définis sur K. Pour éviter des confusions visuelles, nous noterons dans cette sous-partie $\check{E}$ l'espace vectoriel dual d'un espace vectoriel E. Pour tout $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, notons $\mathfrak{S}(n)$ le groupe des bijections de $\{1,\dots,n\}$.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $m\in\mathbb{N}-\{0\}$. Une forme m-linéaire $\omega:E^m\to K$ est dite

• *symétrique* si, pour tout $(x_1,\dots,x_m)$ dans E^m et pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}(m)$, nous avons $\omega(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)})=\omega(x_1,\dots,x_m)$;

• *antisymétrique* si pour tout $(x_1,\dots,x_m)$ dans E^m et pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}(m)$ de signature ε_σ, nous avons $\omega(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)})=\varepsilon_\sigma\,\omega(x_1,\dots,x_m)$.

• *alternée* si, pour tout $(x_1,\dots,x_m)$ dans E^m, s'il existe i,j dans $\{1,\dots,m\}$ tels que $i\neq j$ et $x_i=x_j$, alors $\omega(x_1,\dots,x_m)=0$.

Rappelons que toute forme alternée est antisymétrique, et que la réciproque est vraie si la caractéristique de K n'est pas 2.

Notons $\Lambda^m\check{E}$ (respectivement $S^m\check{E}$), et appelons *puissance extérieure* (respectivement *puissance symétrique*) m-ème de E l'espace vectoriel des formes m-linéaires alternées (respectivement symétriques) sur E et, par convention, $\Lambda^0\check{E}=S^0\check{E}=K$. Remarquons que $\Lambda^1\check{E}=S^1\check{E}=\check{E}$, et que $\Lambda^m\check{E}$ et $S^m\check{E}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E,\dots,E;K)$ (donc Λ^mE et S^mE sont des sous-espaces vectoriels de $E^{\otimes m}=\mathscr{L}(\check{E},\dots,\check{E};K)$). Posons
$$\Lambda^*\check{E}=\oplus_{m\in\mathbb{N}}\,\Lambda^m\check{E}\ .$$

Si la dimension n de E est strictement inférieure à m, alors $\Lambda^m \check{E} = 0$. En effet, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout ω dans $\Lambda^m \check{E}$ et pour tout $(x_1, \ldots, x_m)$ dans E^m, le scalaire $\omega(x_1, \ldots, x_m)$ est une combinaison linéaire des scalaires $\omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})$ avec $i_1, \ldots, i_m$ dans $\{1, \ldots, n\}$. Or ces scalaires sont nuls, car, comme $m > n$, au moins deux des vecteurs $e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}$ doivent être égaux. Donc l'espace vectoriel $\Lambda^* \check{E}$ est de dimension finie.

Soit $u : E \to F$ une application linéaire. L'application linéaire de $(\check{F})^{\otimes m}$ dans $(\check{E})^{\otimes m}$ définie par

$$u^* = {}^t u \otimes \cdots \otimes {}^t u : \omega \mapsto \{(x_1, \ldots, x_m) \mapsto \omega(u(x_1), \ldots, u(x_m))\}$$

envoie $\Lambda^m \check{F}$ dans $\Lambda^m \check{E}$ et $S^m \check{F}$ dans $S^m \check{E}$, et nous noterons encore u^* les deux restrictions de u^* à $\Lambda^m \check{F}$ et à $S^m \check{F}$. Il existe une unique application linéaire, encore notée u^*, de $\Lambda^* \check{F}$ dans $\Lambda^* \check{E}$ dont la restriction à $\Lambda^m \check{F}$ est u^* pour tout $m \in \mathbb{N}$. Ces applications vérifient :

$$\mathrm{id}^* = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad (u \circ v)^* = v^* \circ u^* \ .$$

Munissons maintenant l'espace vectoriel $\Lambda^* \check{E}$ d'une structure d'algèbre (unitaire, associative) naturelle.

Pour p, q deux entiers supérieurs ou égaux à 1, notons $\mathfrak{S}(p, q)$ l'ensemble des σ dans $\mathfrak{S}_{p+q}$ tels que

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q) \ .$$

Une telle bijection σ est obtenue en prenant un paquet de $p + q$ cartes, en coupant ce paquet en un premier paquet de p cartes, et un second paquet de q cartes, puis en battant une fois ces paquets de cartes, intercalant ainsi les cartes du premier paquet dans le second. L'application $\sigma \mapsto \sigma(\{1, \ldots, p\})$ est une bijection de $\mathfrak{S}(p, q)$ dans l'ensemble des parties à p éléments de $\{1, \ldots, p+q\}$, donc le cardinal de $\mathfrak{S}(p, q)$ vaut $\frac{(p+q)!}{p!\, q!}$.

Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Soient $\omega \in \Lambda^p \check{E}$ et $\eta \in \Lambda^q \check{E}$. Appelons *produit extérieur* de ω et de η la forme $(p+q)$-linéaire $\omega \wedge \eta : E^{p+q} \to K$ définie par

$$\omega \wedge \eta \ (x_1, \ldots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,\, q)} \varepsilon_\sigma \ \omega(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) \ \eta(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}) \ , \qquad (\cdot 14 \cdot)$$

si $p, q \geq 1$, et si $p = 0$ ou $q = 0$, alors $\omega \wedge \eta = \omega\eta$ ou $\omega \wedge \eta = \eta\omega$. Étendons cette définition par bilinéarité à $\Lambda^* \check{E}$: si $\omega_i, \eta_i \in \Lambda^i \check{E}$ pour $i = 1, \ldots, n$, posons

$$\Big(\sum_i \omega_i\Big) \wedge \Big(\sum_i \eta_i\Big) = \sum_{i,\, j} \omega_i \wedge \eta_j \ .$$

Remarque. Lorsque la caractéristique de K est nulle, nous avons

$$\omega \wedge \eta \ (x_1, \ldots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!\, q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon_\sigma \ \omega(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) \ \eta(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}) \ ;$$

il est alors immédiat de voir que $\omega \wedge \eta$ est antisymétrique, donc alternée.

Proposition 2.9 *Si $\omega \in \Lambda^p \check{E}$ et $\eta \in \Lambda^q \check{E}$, alors $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{p+q} \check{E}$.*

Démonstration. Soient $(x_1, \ldots, x_{p+q})$ dans E^{p+q} et i, j dans $\{1, \ldots, p+q\}$, tels que $x_i = x_j$. Partitionnons $\mathfrak{S}(p,q)$ en quatre parties :

1. $\mathfrak{S}(p,q)_{--}$, l'ensemble des σ dans $\mathfrak{S}(p,q)$ tels que i et j appartiennent à $\sigma(\{1, \ldots, p\})$,
2. $\mathfrak{S}(p,q)_{++}$, l'ensemble des σ dans $\mathfrak{S}(p,q)$ tels que i et j appartiennent à l'ensemble $\sigma(\{p+1, \ldots, p+q\})$,
3. $\mathfrak{S}(p,q)_{-+}$, l'ensemble des σ dans $\mathfrak{S}(p,q)$ tels que i appartienne à $\sigma(\{1, \ldots, p\})$, et j appartienne à $\sigma(\{p+1, \ldots, p+q\})$,
4. $\mathfrak{S}(p,q)_{+-}$, l'ensemble des σ dans $\mathfrak{S}(p,q)$ tels que i appartienne à $\sigma(\{p+1, \ldots, p+q\})$ et j appartienne à $\sigma(\{1, \ldots, p\})$.

Comme ω et η sont alternées, le terme de la somme définissant $\omega \wedge \eta\ (x_1, \ldots, x_{p+q})$ qui porte sur un σ dans $\mathfrak{S}(p,q)_{--} \cup \mathfrak{S}(p,q)_{++}$ est nul. Soit τ la transposition échangeant i et j. Alors la multiplication à gauche par τ induit une bijection de $\mathfrak{S}(p,q)_{-+}$ sur $\mathfrak{S}(p,q)_{+-}$. Donc $\omega \wedge \eta\ (x_1, \ldots, x_{p+q})$ est la somme sur tous les σ dans $\mathfrak{S}(p,q)_{-+}$ de

$$\varepsilon_\sigma\ \omega(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})\ \eta(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}) - \varepsilon_\sigma\ \omega(x_{\tau\sigma(1)}, \ldots, x_{\tau\sigma(p)})\ \eta(x_{\tau\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\tau\sigma(p+q)})\,.$$

Ce terme est nul, car comme $x_i = x_j$, nous avons

$$(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}) = (x_{\tau\sigma(1)}, \ldots, x_{\tau\sigma(p+q)})\,. \quad \square$$

Théorème 2.10 *Muni du produit extérieur $\wedge$, l'espace vectoriel $\Lambda^* \check{E} = \oplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^p \check{E}$ est une algèbre (associative, unitaire) graduée anticommutative :*

1. **(Associativité)** $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$ *pour tous les* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ *dans* $\Lambda^* \check{E}$ *;*
2. *si* $1 \in K = \Lambda^0 \check{E}$*, alors pour tout* ω *dans* $\Lambda^* \check{E}$*, nous avons* $1 \wedge \omega = \omega \wedge 1 = \omega$ *;*
3. **(Graduation)** $(\Lambda^p \check{E}) \wedge (\Lambda^q \check{E}) \subset \Lambda^{p+q} \check{E}$ *;*
4. **(Anticommutativité)** *si* $\omega \in \Lambda^p \check{E}$ *et* $\eta \in \Lambda^q \check{E}$*, alors* $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq}\, \eta \wedge \omega$.

De plus, si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors l'application linéaire $\omega \mapsto f^*\omega$ de $\Lambda^* \check{F}$ dans $\Lambda^* \check{E}$ est un morphisme d'algèbres graduées de degré 0, c'est-à-dire vérifiant $f^*1 = 1$, $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$ et $f^*(\Lambda^p \check{F}) \subset \Lambda^p \check{E}$.

Démonstration. (1) Notons $\mathfrak{S}(p,q,r)$ l'ensemble des σ dans $\mathfrak{S}_{p+q+r}$ tels que

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q) \quad \text{et} \quad \sigma(p+q+1) < \cdots < \sigma(p+q+r)\,.$$

Notons $\mathfrak{S}(\widehat{p}, q, r)$ l'ensemble des σ dans $\mathfrak{S}(p,q,r)$ tels que σ vaille l'identité sur $\{1, \ldots, p\}$, et de même pour $\mathfrak{S}(p,q,\widehat{r})$. Il est facile de vérifier que la composition $(\sigma, \sigma') \mapsto \sigma \circ \sigma'$ induit des bijections $\mathfrak{S}(p, q+r) \times \mathfrak{S}(\widehat{p}, q, r) \to \mathfrak{S}(p,q,r)$ et $\mathfrak{S}(p+q, r) \times \mathfrak{S}(p,q,\widehat{r}) \to \mathfrak{S}(p,q,r)$.

Soient $\omega_1 \in \Lambda^p \check{E}$, $\omega_2 \in \Lambda^q \check{E}$ et $\omega_3 \in \Lambda^r \check{E}$. Alors

$$(\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3))(x_1, \ldots, x_{p+q+r}) =$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,\, q+r)} \varepsilon_\sigma\ \omega_1(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})\ (\omega_2 \wedge \omega_3)(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q+r)}) =$$

$$\sum_{\substack{\sigma\, \in\, \mathfrak{S}(p,\, q+r) \\ \tau\, \in\, \mathfrak{S}(\widehat{p},\, q,\, r)}} \varepsilon_\sigma\ \omega_1(x_{\sigma\circ\tau(1)}, \ldots, x_{\sigma\circ\tau(p)})\ \varepsilon_\tau\ \omega_2(x_{\sigma\circ\tau(p+1)}, \ldots, x_{\sigma\circ\tau(p+q)})\ \omega_3(x_{\sigma\circ\tau(p+q+1)}, \ldots, x_{\sigma\circ\tau(p+q+r)}) =$$

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(p,\,q,\,r)} \varepsilon_\sigma\ \omega_1(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)})\ \omega_2(x_{\sigma(p+1)},\ldots,x_{\sigma(p+q)})\ \omega_3(x_{\sigma(p+q+1)},\ldots,x_{\sigma(p+q+r)}) =$$

$$((\omega_1\wedge\omega_2)\wedge\omega_3)(x_1,\ldots,x_{p+q+r})\ .$$

(4) Soit τ l'élément de $\mathfrak{S}(p+q)$ tel que $\tau(i) = i+p \bmod (p+q)$ pour tout i dans $\{1,\ldots,p+q\}$. Alors $\varepsilon_\tau = (-1)^{pq}$, et la composition $\sigma\mapsto\sigma\circ\tau$ est une bijection de $\mathfrak{S}(p,q)$ sur $\mathfrak{S}(q,p)$. Donc pour tous les $\omega\in\Lambda^p\check{E}$ et $\eta\in\Lambda^q\check{E}$, nous avons

$$(\eta\wedge\omega)\ (x_1,\ldots,x_{p+q}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(q,\,p)} \varepsilon_\sigma\ \eta(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(q)})\ \omega(x_{\sigma(q+1)},\ldots,x_{\sigma(p+q)}) =$$

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(p,\,q)} \varepsilon_{\sigma\circ\tau}\ \eta(x_{\sigma\circ\tau(1)},\ldots,x_{\sigma\circ\tau(q)})\ \omega(x_{\sigma\circ\tau(q+1)},\ldots,x_{\sigma\circ\tau(p+q)}) =$$

$$\varepsilon_\tau\ (\omega\wedge\eta)\ (x_1,\ldots,x_{p+q})\ .$$

Les autres affirmations sont immédiates. □

Proposition 2.11 *Pour tous les $\omega_1,\ldots,\omega_p$ dans $\check{E}$ et tous les $x_1,\ldots,x_p$ dans E, nous avons*

$$(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p)(x_1,\ldots,x_p) = \det\Big(\big(\omega_i(x_j)\big)_{1\le i,\,j\le p}\Big)\ .$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur p. La formule est immédiate pour $p=1$. Nous avons

$$(\omega_1\wedge(\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_p))(x_1,\ldots,x_p) = \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}\ \omega_1(x_j)(\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_p)(x_1,\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_p)\ .$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence au rang $p-1$, on trouve le développement du déterminant de la matrice $\big(\omega_i(x_j)\big)_{1\le i,\,j\le p}$ par rapport à sa première ligne, ce qui montre le résultat. □

Corollaire 2.12 *Des formes linéaires $f_1,\ldots,f_k$ dans E^* sont linéairement indépendantes si et seulement si leur produit extérieur $f_1\wedge\cdots\wedge f_k$ est non nul.*

Démonstration. Si $f_1,\ldots,f_k$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $x_1,\ldots,x_k$ dans E tels que $f_i(x_j)=1$ si $i=j$ et $f_i(x_j)=0$ sinon. Donc, par la proposition précédente, $(f_1\wedge\cdots\wedge f_k)(x_1,\ldots,x_k)=1$ et $f_1\wedge\cdots\wedge f_k\neq 0$. La réciproque est évidente. □

Remarque. Il découle de la propriété d'anticommutativité que si ω est une forme p-linéaire alternée avec p impair, alors $\omega\wedge\omega=0$. Mais pour $E=\mathbb{R}^4$, si $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4)$ est la base duale de la base canonique, et si $\omega=\epsilon_1\wedge\epsilon_2+\epsilon_3\wedge\epsilon_4$, alors $\omega\wedge\omega = 2\,\epsilon_1\wedge\epsilon_2\wedge\epsilon_3\wedge\epsilon_4\neq 0$.

Proposition 2.13 *Si $(f_1,\ldots,f_n)$ est une base de $\check{E}$, alors $(f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_p})_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n}$ est une base de $\Lambda^p\check{E}$.*

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base de E, dont la base duale est $(f_1, \dots, f_n)$. Pour ω dans $\Lambda^p \check{E}$ et $x_1, \dots, x_p$ dans E, par p-linéarité de ω, nous avons

$$\omega(x_1, \dots, x_p) = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_p \le n} f_{i_1}(x_1) \dots f_{i_p}(x_p)\, \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \ .$$

Comme ω est alternée, les termes $\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ sont nuls sauf peut-être si les indices $i_1, \dots, i_p$ sont deux à deux distincts. En utilisant une permutation pour mettre ces indices dans l'ordre croissant, en utilisant la formule explicite d'un déterminant et en utilisant que $(f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_p})(x_1, \dots, x_p) = \det\big(f_i(x_j)\big)_{1 \le i, j \le k}$ par la proposition 2.11, nous obtenons que

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_p} \ .$$

Cette écriture est unique, car pour tous les $i_1 < \dots < i_p$ et $j_1 < \dots < j_p$, l'expression

$$(f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_p})(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \det\big(f_{i_\alpha}(e_{j_\beta})\big)_{1 \le \alpha, \beta \le p}$$

est non nulle si et seulement si $i_1 = j_1, \dots, i_p = j_p$. Ceci montre le résultat. □

Remarque. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de $\check{E}$. Pour toute partie I de cardinal p de $\{1, \dots, n\}$, notons

$$f_I = f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_p}$$

où $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ avec $i_1 < \dots < i_p$. Le résultat ci-dessus dit que $(f_I)_I$, pour I de cardinal p, est une base de $\Lambda^p \check{E}$. La table de multiplication de cette base est la suivante :

$$f_I \wedge f_J = \begin{cases} \varepsilon f_{I \cup J} & \text{si } I \cap J = \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\varepsilon = (-1)^k$ pour k le nombre de couples (i, j) dans $I \times J$ tels que $i > j$.

Nous en déduisons que la dimension de $\Lambda^p \check{E}$ est le nombre de combinaisons $\binom{n}{p}$, où n est la dimension de $\check{E}$. Donc la dimension de l'espace vectoriel $\Lambda^* \check{E}$ est $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$. En particulier, pour n la dimension de $\check{E}$, l'espace vectoriel $\Lambda^n \check{E}$ est de dimension 1, engendré par $f_1 \wedge \dots \wedge f_n$, qui est l'application déterminant de n vecteurs dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Tout élément w de $\Lambda^* \check{E}$ s'écrit de manière unique

$$w = \sum_I w_I \ f_I \ ,$$

avec w_I dans K. De plus, w appartient à $\Lambda^p \check{E}$ si et seulement si $w_I = 0$ pour tout I de cardinal différent de p. Plus précisément, si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base de E, dont la base duale est $(f_1, \dots, f_n)$, notons de même e^I le p-uplet $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$. Alors la démonstration ci-dessus montre que pour tout ω dans $\Lambda^p \check{E}$, nous avons

$$\omega = \sum_I \omega(e^I) f_I \ .$$

Exercice E.28 *Soient $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F de dimension finie n et m respectivement, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, de base duale $(\check{e}_1, \ldots, \check{e}_n)$, et $(f_1, \ldots, f_m)$ une base de F, de base duale $(\check{f}_1, \ldots, \check{f}_m)$. Si A est la matrice de f dans ces bases, calculer la matrice de l'application linéaire $\omega \mapsto f^*\omega$ de $\Lambda^*\check{F}$ dans $\Lambda^*\check{E}$, dans les bases $(\check{f}_J)_J$ et $(\check{e}_I)_I$.*

Soient X un élément de E et $\omega \in \Lambda^p\check{E}$. Appelons *produit intérieur* de ω par X, et notons $i_X\omega$, la forme $(p-1)$-linéaire alternée (par convention, $\Lambda^{-1}\check{E} = \{0\}$), définie par $i_X\omega = 0$ si $p = 0$, et sinon, pour tous les $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ dans E, par

$$(i_X\omega)(\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) = \omega(X, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \ .$$

Nous étendons additivement l'application i_X à $\Lambda^*\check{E}$.

Proposition 2.14 *L'application $i_X : \Lambda^*\check{E} \to \Lambda^*\check{E}$ est une antidérivation de degré -1 de l'algèbre graduée $\Lambda^*\check{E}$, c'est-à-dire qu'elle vérifie*

(1) $i_X : \Lambda^*\check{E} \to \Lambda^*\check{E}$ est linéaire et $i_X(\Lambda^p\check{E}) \subset \Lambda^{p-1}\check{E}$ pour tout p dans $\mathbb{N}$.

(2) pour tout α dans $\Lambda^p\check{E}$ et tout β dans $\Lambda^*\check{E}$, nous avons

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^p\, \alpha \wedge (i_X\beta) \ .$$

Démonstration. L'assertion (1) est immédiate par définition. Pour montrer la seconde assertion, raisonnons par récurrence sur p. Le cas $p = 0$ est immédiat par linéarité. Si $p = 1$, alors, en posant $X_0 = X$, pour tous les $X_1, \ldots, X_q$ dans E, nous avons

$$\begin{aligned}
& i_X(\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_q) \\
&\quad = (\alpha \wedge \beta)(X_0, X_1, \ldots, X_q) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{q} (-1)^{i+1} \alpha(X_i)\beta(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_q) \\
&\quad = \alpha(X_0)\beta(X_1, \ldots, X_q) - \sum_{i=1}^{q} (-1)^i \alpha(X_i)\, i_X\beta(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_q) \\
&\quad = (i_X\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_q) - (\alpha \wedge i_X\beta)(X_1, \ldots, X_q) \ ,
\end{aligned}$$

ce qui montre le cas $p = 1$. Supposons maintenant $p \geq 2$, et supposons le résultat vrai au rang $p-1$. Par linéarité, nous nous ramenons au cas où $\alpha = \alpha' \wedge \alpha''$, avec α' de degré 1 et α'' de degré $p-1$. Par l'associativité et la distributivité du produit extérieur, nous concluons alors par les cas $p = 1$ et $p - 1$:

$$\begin{aligned}
i_X(\alpha \wedge \beta) &= i_X(\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \beta)) = (i_X\alpha') \wedge (\alpha'' \wedge \beta) - \alpha' \wedge i_X(\alpha'' \wedge \beta) \\
&= (i_X\alpha') \wedge (\alpha'' \wedge \beta) - \alpha' \wedge ((i_X\alpha'') \wedge \beta + (-1)^{p-1}\, \alpha'' \wedge (i_X\beta)) \\
&= ((i_X\alpha') \wedge \alpha'' - \alpha' \wedge (i_X\alpha'')) \wedge \beta + (-1)^p\, \alpha' \wedge (\alpha'' \wedge (i_X\beta)) \\
&= (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^p\, \alpha \wedge (i_X\beta) \ . \qquad \square
\end{aligned}$$

- **Somme directe de fibrés vectoriels.**

Soient $m \geq 1$ un entier et $\xi_1, \ldots, \xi_m$ des fibrés vectoriels, respectivement de projections $p_1 : E_1 \to B, \ldots, p_m : E_m \to B$ et de fibres $\xi_{1,b}, \ldots, \xi_{m,b}$ au-dessus de $b \in B$. Notons

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m = \coprod_{b \in B} \xi_{1,b} \oplus \cdots \oplus \xi_{m,b}$$

la réunion disjointe lorsque b parcourt B des espaces vectoriels sommes directes des fibres $\xi_{1,b}, \ldots, \xi_{m,b}$. Notons $p : E \to B$ l'application valant b sur $\xi_{1,b} \oplus \cdots \oplus \xi_{m,b}$ pour tout $b \in B$. Nous allons munir d'une structure naturelle de fibré vectoriel la donnée $\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_m$ de l'application p et de la structure d'espace vectoriel somme directe sur la fibre $\xi_{1,b} \oplus \cdots \oplus \xi_{m,b}$ de p au-dessus de chaque $b \in B$.

Si $\varphi_i : p_i^{-1}(U) \to U \times F_i$ est une trivialisation locale de ξ_i pour tout i, au-dessus d'un même ouvert U de B, notons $\varphi_{i,b}$ l'isomorphisme linéaire $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_{i|\xi_{i,b}} : \xi_{i,b} \to F_i$ pour $1 \leq i \leq m$ et $\psi = \psi_{(\varphi_i)_{1 \leq i \leq m}} : p^{-1}(U) \to U \times (F_1 \oplus \cdots \oplus F_m)$ l'application définie, pour tout $b \in U$ et $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{1 \leq i \leq m} \xi_{i,b}$ par

$$\psi(x_1 \oplus \cdots \oplus x_m) = \big(b, \varphi_{1,b}(x_1) \oplus \cdots \oplus \varphi_{m,b}(x_m)\big) \ .$$

Il est facile de vérifier que la donnée $\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_m$ admet une et une seule structure de fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ de classe C^r telle que pour toutes les trivialisations locales $\varphi_i : p_i^{-1}(U) \to U \times F_i$ de ξ_i pour tout i au-dessus d'un même ouvert U de B, l'application ψ définie ci-dessus soit une trivialisation locale de $\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_m$ sur U. Par exemple, un atlas de cartes de $E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ est obtenu en prenant, lorsque (U, θ) parcourt les cartes locales de B et $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq m}$ les m-uplets de trivialisations locales de $\xi_1, \ldots, \xi_m$ au-dessus de U, les cartes $(\theta \times \mathrm{id}) \circ \psi_{(\varphi_i)_{1 \leq i \leq m}} : p^{-1}(U) \to \theta(U) \times (F_1 \oplus \cdots \oplus F_m)$.

Ce fibré $\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_m$ est appelé le *fibré vectoriel somme directe* (ou *somme de Whitney*) de $(\xi_i)_{1 \leq i \leq m}$.

Notons que nous avons un isomorphisme canonique de $\mathrm{C}^r(B; \mathbb{K})$-modules

$$\Gamma(\xi_1) \oplus \cdots \oplus \Gamma(\xi_m) \simeq \Gamma(\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_m)$$

défini par $\sigma_1 \oplus \cdots \oplus \sigma_m \mapsto \{x \mapsto \sigma_1(x) \oplus \cdots \oplus \sigma_m(x)\}$.

Exercice E.29 *Montrer que, sur la donnée $\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_m$, la structure de fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ de classe C^r ci-dessus est l'unique telle structure telle que pour tout ouvert U de B, pour toutes les sections $\sigma_i : U \to E_i$ de classe C^r de ξ_i, l'application de U dans $E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ définie par $x \mapsto \sigma_1(x) + \cdots + \sigma_m(x)$ soit une section de classe C^r.*

Soit M une variété sur $\mathbb{K}$ de classe C^{r+1} de dimension n. Notons $\oplus^n TM$ le fibré vectoriel C^r somme directe de n copies du fibré tangent de TM, et $p : \oplus^n TM \to M$ sa projection. Notons $R(M)$ l'ouvert de $\oplus^n TM$ formé des n-uplets $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs des espaces tangents $T_x M$ aux points $x \in M$ qui sont des bases de $T_x M$. Notons encore $p : R(M) \to M$ la restriction de p à $R(M)$, qui est appelée (ou par abus $R(M)$) le *fibré des repères* de M. Il n'est pas difficile de voir que cette application est une fibration C^r.

Proposition 2.15 *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $r = \infty$, ou si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $r = \omega_{\mathbb{C}}$, la fibration $p : R(M) \to M$ est un fibré principal de groupe structural $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*

Démonstration. Le groupe de Lie $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ agit à droite sur la variété $R(M)$ par $((v_1, \ldots, v_n), g) \mapsto (w_1, \ldots, w_n)$ où, en notant $g = (g_{ij})_{1 \leq i,\, j \leq n}$,

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad w_j = \sum_{k=1}^{n} g_{kj} v_k \ .$$

Cette action est clairement libre et propre. Elle est simplement transitive sur chaque fibre de $p : R(M) \to M$. Notons $\pi : R(M) \to R(M)/G$ la projection canonique sur la variété quotient, qui est une fibration C^∞ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et analytique complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ par le théorème 2.3. L'application $p : R(M) \to M$ passe au quotient en un difféomorphisme θ de classe C^∞ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et analytique complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de $R(M)/G$ dans M, et le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & & R(M) \\ & \pi \swarrow & \downarrow p \\ R(M)/G & \xrightarrow{\theta} & M \end{array} \quad . \ \square$$

• **Fibré vectoriel des applications multilinéaires.**

Soient $m \geq 1$ un entier et $\xi_0, \ldots, \xi_m$ des fibrés vectoriels, respectivement de projections $p_0 : E_0 \to B, \ldots, p_m : E_m \to B$ et de fibres $\xi_{0,\,b}, \ldots, \xi_{m,\,b}$ au-dessus de $b \in B$. Notons

$$E = \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_m; E_0) = \coprod_{b \in B} \mathscr{L}(\xi_{1,\,b}, \ldots, \xi_{m,\,b}; \xi_{0,\,b})$$

la réunion disjointe des espaces vectoriels des applications multilinéaires de $\xi_{1,\,b} \times \cdots \times \xi_{m,\,b}$ dans $\xi_{0,\,b}$ pour tous les $b \in B$. Notons $p : E \to B$ l'application évidente valant b sur $\mathscr{L}(\xi_{1,\,b}, \ldots, \xi_{m,\,b}; \xi_{0,\,b})$ pour tout $b \in B$. Nous allons munir d'une structure naturelle de fibré vectoriel la donnée $\mathscr{L}(\xi_1, \ldots, \xi_m; \xi_0)$ de l'application p et de la structure d'espace vectoriel évidente sur la fibre $\mathscr{L}(\xi_{1,\,b}, \ldots, \xi_{m,\,b}; \xi_{0,\,b})$ de p au-dessus de chaque $b \in B$.

Pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$, soit $\varphi_i : p_i^{-1}(U) \to U \times F_i$ une trivialisation locale de ξ_i au-dessus d'un même ouvert U de B. Notons $\varphi_{i,\,b}$ l'isomorphisme linéaire $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_{i|\xi_{i,\,b}} : \xi_{i,\,b} \to F_i$ pour $0 \leq i \leq m$. Notons $\psi = \psi_{(\varphi_i)_{0 \leq i \leq m}} : p^{-1}(U) \to U \times \mathscr{L}(F_1, \ldots, F_m; F_0)$ l'application définie, pour tout $b \in U$ et $u \in \mathscr{L}(\xi_{1,\,b}, \ldots, \xi_{m,\,b}; \xi_{0,\,b})$, par

$$\psi(u) = \big(b, (x_1, \ldots, x_m) \mapsto \varphi_{0,\,b} \circ u(\varphi_{1,\,b}^{-1}(x_1), \ldots, \varphi_{m,\,b}^{-1}(x_m))\big) \ .$$

Il est facile de vérifier que la donnée $\mathscr{L}(\xi_1, \ldots, \xi_m; \xi_0)$ admet une et une seule structure de fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ de classe C^r telle que pour toutes les trivialisations locales $\varphi_i : p_i^{-1}(U) \to U \times F_i$ de ξ_i, pour $i \in \{0, \ldots, m\}$, au-dessus d'un même ouvert U de B, l'application ψ définie ci-dessus soit une trivialisation locale de $\mathscr{L}(\xi_1, \ldots, \xi_m; \xi_0)$ au-dessus de U. Par exemple, un atlas de cartes de $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_m; E_0)$ est obtenu en prenant, lorsque (U, θ) parcourt les cartes locales de B et $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq m}$ les $(m+1)$-uplets de trivialisations locales de $\xi_0, \ldots, \xi_m$ au-dessus de U, les cartes $(\theta \times \mathrm{id}) \circ \psi_{(\varphi_i)_{0 \leq i \leq m}} : p^{-1}(U) \to \theta(U) \times \mathscr{L}(F_1, \ldots, F_m; F_0)$.

Nous appellerons $\mathscr{L}(\xi_1, \ldots, \xi_m; \xi_0)$ le *fibré vectoriel des applications multilinéaires* des ξ_i pour $1 \leq i \leq m$ dans ξ_0. Son rang est égal au produit des rangs des ξ_i pour $0 \leq i \leq m$. Nous noterons $\mathscr{L}(\xi; \xi) = \mathrm{End}(\xi)$, appelé le *fibré des endomorphismes de* ξ.

Pour $1 \leq s < m$, l'application du fibré vectoriel $\mathscr{L}(\xi_1, \ldots, \xi_m; \xi_0)$ dans le fibré vectoriel $\mathscr{L}(\xi_1, \ldots, \xi_s; \mathscr{L}(\xi_{s+1}, \ldots, \xi_m; \xi_0))$ définie par

$$u \mapsto \big\{(x_1, \ldots, x_s) \mapsto \{(x_{s+1}, \ldots, x_m) \mapsto u(x_1, \ldots, x_m)\}\big\}$$

est un isomorphisme de fibrés vectoriels, par lequel nous identifierons $\mathscr{L}(\xi_1, \ldots, \xi_m; \xi_0)$ et $\mathscr{L}(\xi_1, \ldots, \xi_s; \mathscr{L}(\xi_{s+1}, \ldots, \xi_m; \xi_0))$.

Remarques. (1) Une section u de l'application p que nous venons de définir est C^r si et seulement si pour tout ouvert U de B et pour toutes les sections σ_i de classe C^r de ξ_i au-dessus de U, l'application de U dans E_0 définie par

$$x \mapsto u(x)(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_m(x))$$

est C^r.

(2) Soient $\eta_0, \ldots, \eta_m$ des fibrés vectoriels. Si $f : B \to B$ est un C^r-difféomorphisme, si u_0 est un morphisme de fibrés vectoriels C^r au-dessus de f de ξ_0 dans η_0 et si u_i pour $1 \leq i \leq m$ est un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de f^{-1} de η_i dans ξ_i, alors l'application de l'espace total de $\mathscr{L}(\xi_1, \ldots, \xi_m; \xi_0)$ dans celui de $\mathscr{L}(\eta_1, \ldots, \eta_m; \eta_0)$ définie par

$$u \in \mathscr{L}(\xi_{1,b}, \ldots, \xi_{m,b}; \xi_{0,b}) \mapsto$$
$$\{(x_1, \ldots, x_m) \in \eta_{1,f(b)} \times \cdots \times \eta_{m,f(b)} \mapsto u_0 \circ u(u_1(x_1), \ldots, u_m(x_m))\}$$

est un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de f, et un isomorphisme de fibrés vectoriels si les u_i le sont.

(3) Soient $u \in \Gamma(\mathscr{L}(\xi_1, \ldots, \xi_m; \xi_0))$ et $v_i \in \Gamma(\xi_i)$ pour $1 \leq i \leq m$. Nous noterons $u(v_1, \ldots, v_m)$ l'élément de $\Gamma(\xi_0)$ défini par

$$b \mapsto u(b)\big(v_1(b), \ldots, v_m(b)\big)\ .$$

L'application de $\Gamma(\mathscr{L}(\xi_1, \ldots, \xi_m; \xi_0)) \times \prod_{i=1}^m \Gamma(\xi_i)$ dans $\Gamma(\xi_0)$, définie par $(u, v_1, \ldots, v_m) \mapsto u(v_1, \ldots, v_m)$, est une application $\mathrm{C}^r(B; \mathbb{K})$-multilinéaire, dite *d'évaluation* de la section multilinéaire u sur les sections $v_1, \ldots, v_m$.

(4) L'espace total de $\mathscr{L}(\xi_0; \xi_1)$ est l'ensemble des morphismes de fibrés vectoriels de ξ_0 dans ξ_1. Si $f \in \mathscr{L}(\xi_0; \xi_1)$ alors f induit un morphisme de $\mathrm{C}^r(B; \mathbb{K})$-modules de $\Gamma(\xi_0)$ dans $\Gamma(\xi_1)$, défini par $\sigma \mapsto f \circ \sigma$, que nous noterons encore f.

(5) La trace des endomorphismes permet de définir un morphisme de fibrés vectoriels du fibré des endomorphismes dans le fibré trivial. Soit ξ un fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $\xi_{\mathbb{K}}$ le fibré vectoriel trivial de fibre $\mathbb{K}$ sur B. Alors l'application de l'espace total de $\mathrm{End}(\xi)$ dans celui de $\xi_{\mathbb{K}}$ qui à $u \in \mathrm{End}(\xi_x)$ associe $(x, \operatorname{tr} u) \in B \times \mathbb{K} = \xi_{\mathbb{K}}$ est un morphisme de fibrés vectoriels, encore appelé la *trace*, et encore notée tr.

Exemple. Soit ξ un fibré vectoriel. En notant $\xi_{\mathbb{K}}$ le fibré vectoriel trivial de fibre $\mathbb{K}$ sur B, nous appellerons *fibré vectoriel dual* de ξ le fibré vectoriel $\xi^* = \mathscr{L}(\xi; \xi_{\mathbb{K}})$. Son rang est égal au rang de ξ. La fibre $(\xi^*)_b$ de ξ^* au-dessus de $b \in B$ est l'espace vectoriel dual $(\xi_b)^*$ de la fibre de ξ au-dessus de b.

Par exemple, le fibré vectoriel dual du fibré tangent d'une variété M est appelé le *fibré cotangent* de M, et son espace total est noté T^*M.

La classe d'exemples suivants de fibrés d'applications multilinéaires est importante, nous la traitons dans une nouvelle sous-partie.

• **Produit tensoriel de fibrés vectoriels.**

Continuons de noter $m \geq 1$ un entier et $\xi_0, \dots, \xi_m$ des fibrés vectoriels, de projections $p_0 : E_0 \to B, \dots, p_m : E_m \to B$ et de fibres $\xi_{0,b}, \dots \xi_{m,b}$ au-dessus de $b \in B$.

En notant toujours $\xi_{\mathbb{K}}$ le fibré vectoriel trivial de fibre $\mathbb{K}$ sur B, le fibré vectoriel $\mathscr{L}(\xi_1^*, \dots, \xi_m^*; \xi_{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}$ de classe C^r, de base B, est appelé le *fibré vectoriel produit tensoriel* de $\xi_1, \dots, \xi_m$, et noté $\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_m$. Son rang est égal au produit des rangs des ξ_i pour $1 \leq i \leq m$. La fibre $(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_m)_b$ de $\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_m$ au-dessus de $b \in B$ est l'espace vectoriel produit tensoriel $\xi_{1,b} \otimes \cdots \otimes \xi_{m,b}$ des fibres $\xi_{i,b}$ des ξ_i au-dessus de b pour $i \in \{1, \dots, m\}$. Nous noterons $\bigotimes^m \xi$ ou $\xi^{\otimes m}$ le produit tensoriel de m copies de ξ, appelé *puissance tensorielle* m-ème de ξ.

Exercice E.30 *Montrer que $\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_m$ est l'unique fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ de classe C^r, dont la projection est l'application de $\coprod_{b \in B} \xi_{1,b} \otimes \cdots \otimes \xi_{m,b}$ dans B constante égale à b sur $\xi_{1,b} \otimes \cdots \otimes \xi_{m,b}$ pour tout $b \in B$, et dont la structure d'espace vectoriel sur chaque fibre est celle du produit tensoriel, tel que pour tout ouvert U de B, pour toutes les sections $\sigma_i : U \to E_i$ de classe C^r de ξ_i, l'application $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_m$ de U dans $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ définie par $x \mapsto \sigma_1(x) \otimes \cdots \otimes \sigma_m(x)$ soit une section de classe C^r de $\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_m$.*

Soient $s, t \in \mathbb{N}$ et ξ un fibré vectoriel de rang n. Le *fibré vectoriel tensoriel* (s,t) de ξ est le fibré vectoriel égal à $(\xi^*)^{\otimes s} \otimes \xi^{\otimes t}$. Son rang est n^{s+t}.

Par exemple, le fibré vectoriel tensoriel (s,t) du fibré tangent d'une variété M sur $\mathbb{K}$ de classe C^{r+1} est appelé le *fibré des tenseurs* (s,t) (ou des tenseurs *s fois covariants et t fois contravariants)* de M, et son espace total est noté

$$T_s^t M = (T^*M)^{\otimes s} \otimes TM^{\otimes t} \ .$$

Un *tenseur* (s,t) de M est une section du fibré des tenseurs (s,t) de M. Si $\sigma \in \Gamma(T_s^t M)$ et $\sigma' \in \Gamma(T_{s'}^{t'} M)$, alors $\sigma \otimes \sigma' \in \Gamma(T_{s+s'}^{t+t'} M)$.

En particulier, le fibré tangent est le fibré des tenseurs $(0,1)$, d'espace total $TM = T_0^1 M$. Le fibré cotangent est le fibré des tenseurs $(1,0)$, d'espace total $T^*M = T_1^0 M$. Le *fibré vectoriel des formes bilinéaires* du fibré tangent est le fibré des tenseurs $(2,0)$, d'espace total $T_2^0 M = \mathscr{L}(TM, TM; M \times \mathbb{K}) = \bigotimes^2 T^*M$.

La notion d'image réciproque des champs de vecteurs (et des formes différentielles, voir ci-dessous) s'étend aux tenseurs. Si $\phi : M \to N$ est un C^{r+1}-difféomorphisme local, alors il existe une unique application linéaire $\phi^* : T_s^t N \to T_s^t M$, appelée *image réciproque* des tenseurs (s,t), telle que pour tous les $x \in M$, $v \in T_x M$, $f \in \mathrm{C}^r(N; \mathbb{K})$, $X \in \Gamma(TN)$, $\alpha \in \Gamma(T^*N)$, $\sigma \in T_s^t N$ et $\sigma' \in T_{s'}^{t'} N$, nous ayons

$$\phi^* f = f \circ \phi, \ \ \phi^* X(x) = (T_x \phi)^{-1}\big(X(\phi(x))\big), \ \ (\phi^* \alpha)_x(v) = \alpha_{\phi(x)}(T_x \phi(v)) \ ,$$

$$\phi^*(\sigma \otimes \sigma') = (\phi^* \sigma) \otimes (\phi^* \sigma') \ .$$

Les fibrés vectoriels produits tensoriels vérifient les propriétés suivantes. Nous donnons en particulier des isomorphismes canoniques (de fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ de classe C^r, au-dessus de l'identité) entre certains fibrés vectoriels d'applications multilinéaires, par lesquels nous identifierons par la suite les fibrés vectoriels correspondants.

1. **(Fonctorialité)** Pour tout $(u_i)_{1\le i\le m} \in \prod_{i=1}^m \mathscr{L}(\xi_i;\eta_i)$, il existe un et un seul élément $u_1\otimes\cdots\otimes u_m \in \mathscr{L}(\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_m;\eta_1\otimes\cdots\otimes\eta_m)$ tel que, pour tout $b\in B$ et $(x_1,\dots,x_m)\in(\xi_{1,b},\dots,\xi_{m,b})$, nous ayons
$$u_1\otimes\cdots\otimes u_m(x_1\otimes\cdots\otimes x_m) = u_1(x_1)\otimes\cdots\otimes u_m(x_m)\ .$$
2. **(Commutativité)** Il existe un unique isomorphisme de fibrés vectoriels de $\xi_1\otimes\xi_2$ dans $\xi_2\otimes\xi_1$, qui envoie $x_1\otimes x_2$ sur $x_2\otimes x_1$ pour tous les $x_i\in E_i$ (au-dessus d'un même point de B).
3. **(Associativité)** Il existe un unique isomorphisme de fibrés vectoriels de $(\xi_1\otimes\xi_2)\otimes\xi_3$ dans $\xi_1\otimes\xi_2\otimes\xi_3$, qui envoie $(x_1\otimes x_2)\otimes x_3$ sur $x_1\otimes x_2\otimes x_3$ pour tous les x_i dans E_i (au-dessus d'un même point de B).
4. **(Distributivité)** Il existe un unique isomorphisme de fibrés vectoriels de $(\xi_1\oplus\xi_2)\otimes\xi_3$ dans $(\xi_1\otimes\xi_3)\oplus(\xi_2\otimes\xi_3)$, qui envoie $(x_1\oplus x_2)\otimes x_3$ sur $(x_1\otimes x_3)\oplus(x_2\otimes x_3)$ pour tous les x_i dans E_i (au-dessus d'un même point de B).
5. **(Isomorphismes)** Si $\xi_{\mathbb{K}}$ est le fibré vectoriel trivial de fibre $\mathbb{K}$ sur B, alors l'application de ξ_1 dans $\xi_{\mathbb{K}}\otimes\xi_1$ définie par $x\mapsto 1\otimes x$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels.

   L'application de $\mathscr{L}(\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_m;\xi_0)$ dans $\mathscr{L}(\xi_1,\dots,\xi_m;\xi_0)$ définie, au-dessus de tout point donné de B, par
$$u\mapsto\{(x_1,\dots,x_m)\mapsto u(x_1\otimes\cdots\otimes x_m)\}$$
   est un isomorphisme de fibrés vectoriels.

   Il existe un unique isomorphisme de fibrés vectoriels de $\mathscr{L}(\xi_1;\xi_3)\otimes\mathscr{L}(\xi_2;\xi_4)$ dans $\mathscr{L}(\xi_1\otimes\xi_2;\xi_3\otimes\xi_4)$ qui, au-dessus de tout point donné de B, associe à $u\otimes v$ l'inverse par l'isomorphisme précédent de $(x,y)\mapsto u(x)\otimes v(y)$. En particulier, nous avons les isomorphismes
$$\xi_1^*\otimes\xi_2^*\simeq(\xi_1\otimes\xi_2)^* \ \text{ défini par } \ \ell\otimes\ell'\mapsto\{\sigma\otimes\sigma'\mapsto\ell(\sigma)\ell'(\sigma')\}\ ,$$
$$\xi_1^*\otimes\cdots\otimes\xi_m^*\otimes\xi_0\simeq\mathscr{L}(\xi_1,\dots,\xi_m;\xi_0) \ \text{ défini par } \ \ell_1\otimes\cdots\otimes\ell_m\otimes\sigma\mapsto$$
$$\{(\sigma_1,\dots,\sigma_m)\mapsto\ell_1(\sigma_1)\dots\ell_m(\sigma_m)\,\sigma\}\ ,$$
   en particulier $\xi_0^*\otimes\xi_0\simeq\mathrm{End}(\xi_0)$, et, si $\xi_{\mathbb{K}}$ est le fibré trivial de fibre $\mathbb{K}$ sur B,
$$\xi_1^*\otimes\xi_2^*\simeq\mathscr{L}(\xi_1,\xi_2;\xi_{\mathbb{K}})\ .$$

Soient $\xi_1,\dots,\xi_s,\eta_1,\dots,\eta_t$ des fibrés vectoriels, $\xi_{\mathbb{K}}$ le fibré vectoriel trivial sur B de fibre $\mathbb{K}$, et $i_0\in\{1,\dots,s\}$ et $j_0\in\{1,\dots,t\}$. Nous surmontons par un chapeau un terme omis d'une énumération. Si $\xi_{i_0}=\eta_{j_0}$, considérons le morphisme $c_{i_0}^{j_0}$ de fibrés vectoriels de
$$\xi_1^*\otimes\cdots\otimes\xi_s^*\otimes\eta_1\otimes\cdots\otimes\eta_t=\mathscr{L}(\xi_1,\dots,\xi_s,\eta_1^*,\dots,\eta_t^*;\xi_{\mathbb{K}})$$
dans
$$\xi_1^*\otimes\cdots\otimes\widehat{\xi_{i_0}^*}\otimes\cdots\otimes\xi_s^*\otimes\eta_1\otimes\cdots\otimes\widehat{\eta_{j_0}}\otimes\cdots\otimes\eta_t=\mathscr{L}(\xi_1,\dots,\widehat{\xi_{i_0}},\dots,\xi_s,\eta_1^*,\dots,\widehat{\eta_{j_0}^*},\dots,\eta_t^*;\xi_{\mathbb{K}})\ ,$$

défini, au-dessus de tout point donné de B, par

$$u \mapsto \{(e_1, \dots, \widehat{e_{i_0}}, \dots, e_s, \ell_1, \dots, \widehat{\ell_{j_0}}, \dots, \ell_t) \mapsto \operatorname{tr} \overline{u}\}$$

où $\overline{u}$ est l'élément de $\mathscr{L}(\xi_{i_0}, \eta_{j_0}^*; \xi_{\mathbb{K}}) = \operatorname{End}(\xi_{i_0})$ défini par

$$(e_{i_0}, \ell_{j_0}) \mapsto \ u(e_1, \dots, e_{i_0}, \dots, e_s, \ell_1, \dots, \ell_{j_0}, \dots, \ell_t)\} \ ,$$

et $\operatorname{tr} : \operatorname{End}(\xi_{i_0}) \to \xi_{\mathbb{K}}$ est le morphisme de fibrés vectoriels qui, sur chaque fibre, vaut la trace des endomorphismes (voir la remarque (5) de la sous-partie précédente). Nous l'appellerons, ainsi que ses composés lorsqu'ils existent, un morphisme de *contraction des tenseurs*. Nous noterons encore $c_{i_0}^{j_0}$, et appellerons encore *contraction des tenseurs*, le morphisme de $\mathrm{C}^r(B; \mathbb{K})$-modules du module $\Gamma(\xi_1^* \otimes \cdots \otimes \xi_s^* \otimes \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_t)$ dans le module $\Gamma(\xi_1^* \otimes \cdots \otimes \widehat{\xi_{i_0}^*} \otimes \cdots \otimes \xi_s^* \otimes \eta_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\eta_{j_0}} \otimes \cdots \otimes \eta_t)$, défini par la postcomposition par $c_{i_0}^{j_0}$ des sections : $\sigma \mapsto c_{i_0}^{j_0} \circ \sigma$.

En particulier, pour tous les $i_0 \in \{1, \dots, s\}$, $j_0 \in \{1, \dots, t\}$ et pour tout fibré vectoriel ξ, nous avons un morphisme $c_{i_0}^{j_0}$ de $\mathrm{C}^r(B; \mathbb{K})$-modules $\Gamma((\xi^*)^{\otimes s} \otimes \xi^{\otimes t})$ dans $\Gamma((\xi^*)^{\otimes s-1} \otimes \xi^{\otimes t-1})$, et un morphisme $c_{i_0}^{j_0}$ de $\Gamma(T_s^t B)$ dans $\Gamma(T_{s-1}^{t-1} B)$. Pour tous les $\ell_1, \dots, \ell_s \in \Gamma(\xi^*)$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_t \in \Gamma(\xi)$, nous avons

$$\begin{aligned} & c_{i_0}^{j_0}(\ell_1 \otimes \cdots \otimes \ell_s \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_t) \\ = \ & \ell_{i_0}(\sigma_{j_0}) \ \ell_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\ell_{i_0}} \otimes \cdots \otimes \ell_s \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\sigma_{j_0}} \otimes \cdots \otimes \sigma_t \ . \end{aligned}$$

• **Puissance symétrique et extérieure d'un fibré vectoriel.**

Soient $m \in \mathbb{N}$ et ξ un fibré vectoriel. Soit $\xi_{\mathbb{K}}$ le fibré vectoriel trivial sur B de fibre $\mathbb{K}$.

Nous noterons $S^m \xi^*$, et appellerons *puissance symétrique m-ème* de ξ, le sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel $\mathscr{L}(\xi, \dots, \xi; \xi_{\mathbb{K}}) = \bigotimes^m \xi^*$, de fibre au-dessus de $b \in B$ l'espace vectoriel $S^m \xi_b^*$ des applications m-linéaires symétriques sur la fibre ξ_b de ξ. En particulier, si M est une variété sur $\mathbb{K}$ de classe C^{r+1}, alors $S^2 T^* M$ est le fibré vectoriel sur M des formes bilinéaires symétriques du fibré tangent de M, dont la fibre au-dessus de $x \in M$ est l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur $T_x M$.

Nous noterons $\Lambda^m \xi^*$, et appellerons *puissance extérieure m-ème* de ξ, le sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel $\mathscr{L}(\xi, \dots, \xi; \xi_{\mathbb{K}}) = \bigotimes^m \xi^*$ de fibre au-dessus de $b \in B$ l'espace vectoriel $\Lambda^m \xi_b^*$ des applications m-linéaires alternées sur la fibre ξ_b de ξ.

Nous noterons $\Lambda^* \xi^*$ le fibré vectoriel somme directe des fibrés vectoriels puissances extérieures de ξ

$$\Lambda^* \xi^* = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \Lambda^m \xi^* \ .$$

La fibre de $\Lambda^* \xi^*$ au-dessus de $b \in B$ est $\Lambda^* \xi_b^* = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \Lambda^m \xi_b^*$. La sommation peut être prise sur $m \in \{0, \dots, n\}$ où n est le rang de ξ.

Si f est un morphisme de fibrés vectoriels de ξ dans η, alors nous noterons $f^* : \bigotimes^m \eta^* \to \bigotimes^m \xi^*$ le morphisme de fibrés vectoriels défini, en se souvenant que la fibre de $\bigotimes^m \eta^*$ au-dessus de $b \in B$ est l'espace vectoriel des formes m-linéaires sur η_b, par

$$u \mapsto f^* u : (x_1, \dots, x_m) \mapsto u(f(x_1), \dots, f(x_m)) \ .$$

Ceci est un cas particulier de la remarque (2) de la sous-partie sur les fibrés vectoriels d'applications multilinéaires.

Remarquons que f^* envoie le sous-fibré vectoriel $S^m\eta^*$ dans le sous-fibré vectoriel $S^m\xi^*$, et le sous-fibré vectoriel $\Lambda^m\eta^*$ dans le sous-fibré vectoriel $\Lambda^m\xi^*$. Nous noterons encore $f^* : \Gamma(\bigotimes^m \eta^*) \to \Gamma(\bigotimes^m \xi^*)$ le morphisme de $\mathrm{C}^r(B;\mathbb{K})$-modules défini par $\omega \mapsto f^*\omega = f^* \circ \omega$, qui envoie $\Gamma(S^m\eta^*)$ dans $\Gamma(S^m\xi^*)$ et $\Gamma(\Lambda^m\eta^*)$ dans $\Gamma(\Lambda^m\xi^*)$.

• **Fibré vectoriel des formes différentielles sur une variété.**

Soit M une variété sur $\mathbb{K}$ de classe C^{r+1}.

Le fibré vectoriel $\Lambda^m T^*M$ sur M (puissance extérieure m-ème du fibré tangent de M) est appelé le *fibré des m-formes différentielles* sur M, et $\Lambda^* T^*M$ le *fibré des formes différentielles* sur M. Leurs sections sont respectivement appelées les *m-formes différentielles* et les *formes différentielles* sur M. Il est assez usuel de noter

$$\Omega^m(M) = \Gamma(\Lambda^m T^*M) \quad \text{et} \quad \Omega^*(M) = \Gamma(\Lambda^* T^*M)$$

le $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K})$-module des m-formes différentielles et des formes différentielles respectivement. Comme $\Lambda^0 T^*M$ s'identifie avec $M \times \mathbb{K}$, notons que $\Omega^0(M)$ s'identifie avec $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K})$. Par convention, nous posons $\Omega^p(M) = \{0\}$ si $p < 0$.

Par exemple, si $f : M \to \mathbb{K}$ est une application C^{r+1}, alors l'application $df : M \to T^*M$, qui au point x de M vaut la forme linéaire

$$df_x : X \mapsto T_x f(X) \tag{$\cdot 15 \cdot$}$$

sur l'espace tangent T_xM, est une 1-forme différentielle C^r, appelée la *différentielle* de f. Il ne faut pas confondre $df : M \to T^*M$ et $Tf : TM \to T\mathbb{K}$, même si l'un détermine l'autre.

Le $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K})$-module $\Omega^*(M)$ possède une structure remarquable d'algèbre sur l'anneau $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K})$, construite de la manière suivante.

Appelons *produit extérieur* de deux éléments ω et ω' de $\Omega^*(M)$ la forme différentielle

$$\omega \wedge \omega' : x \mapsto \omega_x \wedge \omega'_x \ .$$

Il est immédiat que la section $\omega \wedge \omega'$ est de classe C^r. Le résultat suivant découle alors du théorème 2.10.

Proposition 2.16 *Le $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K})$-module $\Omega^*(M)$, muni de la famille $(\Omega^p(M))_{p\in\mathbb{N}}$ et de la loi $\wedge$, est une algèbre réelle (associative, unitaire) graduée, anticommutative sur l'anneau $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K})$, c'est-à-dire :*

- *$(\Omega^*(M), +, \cdot, \wedge)$ est une algèbre (associative, unitaire) sur $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K})$, et $\Omega^p(M)$ est un sous-module ;*
- *$\Omega^*(M) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \Omega^p(M)$, et si $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^q(M)$, alors $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{p+q}(M)$;*
- *si $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^q(M)$, alors $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha$.* □

Si U est un ouvert de M, alors l'application

$$\omega \mapsto \omega_{|U}$$

est un morphisme d'algèbres (unitaires), gradué de degré 0, de $\Omega^*(M)$ dans $\Omega^*(U)$. De même que pour les champs de vecteurs, les formes différentielles vérifient la propriété de localité des faisceaux : si U est un ouvert, réunion d'ouverts U_i, si ω_i est une forme différentielle C^r sur U_i, tels que $\omega_i = \omega_j$ sur $U_i \cap U_j$, alors l'unique application $\omega : U \to \Lambda^* T^* U$ telle que $\omega_{|U_i} = \omega_i$ est une forme différentielle C^r sur U.

Remarque. Si U est un ouvert de $\mathbb{K}^n$, alors comme TU s'identifie avec $U \times \mathbb{K}^n$, la carte (U, id) de la variété U fournit une identification

$$\Lambda^* T^* U = U \times \Lambda^*(\mathbb{K}^n)^* \ .$$

Une forme différentielle $x \mapsto (x, \omega_x)$ sur U s'identifie donc à une application $x \mapsto \omega_x$ de U dans $\Lambda^*(\mathbb{K}^n)^*$. Cette forme différentielle sur U est de classe C^r si et seulement si l'application $x \mapsto \omega_x$ est C^r. Nous ferons cette identification dans toute la suite de ces notes.

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et $(e_I^*)_{I \in \mathscr{I}_n}$, où $\mathscr{I}_n$ est l'ensemble des suites finies strictement croissantes dans $\{1, \ldots, n\}$, la base correspondante de $\Lambda^*(\mathbb{K}^n)^*$. Toute forme différentielle ω sur U s'écrit alors, de manière unique,

$$\omega = \sum_{I \in \mathscr{I}_n} f_I \ e_I^* \ ,$$

où $f_I : U \to \mathbb{R}$ est une application, de classe C^r si ω l'est.

Si U est un ouvert de $\mathbb{K}^n$, et si $f : U \to \mathbb{K}$ est une application C^{r+1}, alors la 1-forme différentielle df est l'application qui à x dans U associe la différentielle (ou application dérivée) df_x, au sens du calcul différentiel. Par exemple, si x^i est l'application i-ème coordonnée $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$, qui est linéaire, alors la différentielle dx^i est constante sur U, et vaut encore l'application i-ème coordonnée. C'est-à-dire, en tout point x de U, la suite $(dx^1, \ldots, dx^n)$ est la base duale de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Donc, en notant $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, nous avons

$$df = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f \ dx^i \ .$$

De plus, en posant $dx^I = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ pour tout $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ avec $i_1 < \cdots < i_p$ et p dans $\mathbb{N}$ (par convention $dx^{\emptyset} = 1$), alors toute forme différentielle ω sur U s'écrit, de manière unique,

$$\omega = \sum_{I \in \mathscr{I}_n} \omega_I \ dx^I$$

où $\omega_I \in \mathrm{C}^r(U; \mathbb{K})$. De même,

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \omega_{i_1, \ldots, i_p} \ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

si ω est une p-forme différentielle. La famille $(dx^I)_{I \in \mathscr{I}_n}$ est donc une base du module $\Omega^*(U)$ sur l'anneau $\mathrm{C}^r(U; \mathbb{K})$. Attention, pour une variété générale M, le $\mathrm{C}^r(M; \mathbb{K})$-module $\Omega^*(M)$ n'est pas forcément libre.

Proposition 2.17 *Si $\omega_1, \ldots, \omega_p$ sont des 1-formes différentielles sur M, et si $X_1, \ldots, X_p$ sont des champs de vecteurs sur M, alors, pour tout x dans M, nous avons*

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)_x (X_1(x), \ldots, X_p(x)) = \det \big((\omega_i)_x (X_j(x)) \big)_{1 \leq i, j \leq p} \ .$$

Démonstration. Ceci découle de la proposition 2.11. □

• **Formes différentielles à valeurs dans un fibré vectoriel.**

Soient M une variété sur $\mathbb{K}$ de classe C^{r+1} et ξ un fibré vectoriel de classe C^r sur M, le *fibré des m-formes différentielles (sur M) à valeurs dans ξ* est le fibré vectoriel $\Lambda^m T^*M \otimes \xi$ sur M, et le *fibré des formes différentielles (sur M) à valeurs dans ξ* est le fibré vectoriel $\Lambda^* T^*M \otimes \xi$ sur M. Leurs sections sont respectivement appelées les *m-formes différentielles à valeurs dans ξ* et les *formes différentielles à valeurs dans ξ*. Il est assez usuel de noter

$$\Omega^m(M;\xi) = \Gamma(\Lambda^m T^*M \otimes \xi) \quad \text{et} \quad \Omega^*(M;\xi) = \Gamma(\Lambda^* T^*M \otimes \xi)$$

le $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K})$-module des m-formes différentielles et des formes différentielles respectivement sur M à valeurs dans ξ. Par convention, nous posons $\Omega^p(M;\xi) = \{0\}$ si $p < 0$.

Soit ξ' un autre fibré vectoriel de classe C^r sur M. Soient ω dans $\Omega^p(M;\xi)$ et ω' dans $\Omega^q(M;\xi')$. Appelons *produit extérieur* de ω et de ω' l'élément de $\Omega^{p+q}(M;\xi\otimes\xi')$ défini en posant, pour tous les $x \in M$ et $X_1, \ldots, X_{p+q} \in T_xM$,

$$(\omega \wedge \omega')_x\,(X_1, \ldots, X_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,\,q)} \varepsilon_\sigma\, \omega_x(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(p)}) \otimes \omega'_x(X_{\sigma(p+1)}, \ldots, X_{\sigma(p+q)})\,.$$

Par bilinéarité, l'application $(\omega, \omega') \mapsto \omega \wedge \omega'$ s'étend en une application $\mathrm{C}^r(M;\mathbb{K})$-bilinéaire de $\Omega^*(M;\xi) \times \Omega^*(M;\xi')$ dans $\Omega^*(M;\xi\otimes\xi')$.

• **Image réciproque d'un fibré vectoriel.**

Soit ξ un fibré vectoriel de projection $p : E \to B$. Soient M une variété C^r et $f : M \to B$ une application C^r. Posons

$$f^*E = \coprod_{x \in M} \xi_{f(x)}\,,$$

$\widetilde{p} : f^*E \to M$ l'application valant x sur $\xi_{f(x)}$ pour tout $x \in M$, et $\widetilde{f} : f^*E \to E$ l'application valant l'identité sur $\xi_{f(x)}$ pour tout $x \in M$, de sorte que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\widetilde{f}} & E \\ \widetilde{p}\downarrow & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{f} & B \end{array}\,.$$

Nous allons construire une structure de fibré vectoriel $f^*\xi$ de projection l'application $\widetilde{p}$ (dont les fibres sont bien des espaces vectoriels), tel que $(\widetilde{f}, f)$ soit un morphisme de fibrés vectoriels.

Proposition 2.18 *L'ensemble $E' = \{(x,y) \in M \times E \;:\; f(x) = p(y)\}$ est une sous-variété C^r de $M \times E$ et l'application $\mathrm{pr}_{1|E'}$ est C^r. La donnée de l'application $\mathrm{pr}_{1|E'}$ et des structures d'espaces vectoriels évidentes sur ses fibres $\{x\} \times \xi_{f(x)}$ est un fibré vectoriel, et le couple $(\mathrm{pr}_{2|E'}, f)$ est un morphisme de fibrés vectoriels de ce fibré vectoriel dans ξ.*

Munissons f^*E de l'unique structure de variété C^r telle que la bijection de f^*E dans E' envoyant $y \in \xi_{f(x)}$ sur (x, y) soit un C^r-difféomorphisme. Le résultat ci-dessus montre alors que la donnée $f^*\xi$ est un fibré vectoriel, appelé le *fibré vectoriel image réciproque* de ξ par f. La fibre $(f^*\xi)_x$ de $f^*\xi$ au-dessus de $x \in M$ est égale à la fibre $\xi_{f(x)}$ de ξ au-dessus de $f(x)$.

Démonstration. Dans cette démonstration, nous identifions f^*E et E' par la bijection ci-dessus, ce qui identifie $\widetilde{p}$ et $\mathrm{pr}_{1|E'}$, ainsi que $\widetilde{f}$ et $\mathrm{pr}_{2|E'}$.

L'ensemble f^*E est une sous-variété C^r de la variété produit $M \times E$, comme image réciproque de la diagonale de $B \times B$ par l'application de $M \times E$ dans $B \times B$ définie par $(x, y) \mapsto (f(x), p(y))$, qui est transverse à la diagonale, car p est une submersion (voir les rappels du préambule).

Les applications $\widetilde{p}$ et $\widetilde{f}$ sont donc, par restriction, de classe C^r.

Montrons que $f^*\xi$ admet des trivialisations locales au-dessus d'un voisinage ouvert de chaque point de M. Si $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ est une trivialisation locale du fibré vectoriel ξ au-dessus d'un ouvert U de B, il est facile en utilisant le diagramme suivant de vérifier que l'application

$$\widetilde{\varphi} : \widetilde{p}^{-1}(f^{-1}(U)) \to \ f^{-1}(U) \times F$$

définie par $(x, y) \mapsto (x, \mathrm{pr}_2 \circ \varphi(y))$ est une trivialisation locale (au sens des fibrés vectoriels) de $f^*\xi$ au-dessus de l'ouvert $f^{-1}(U)$ de M, ce qui conclut.

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(U) \times F \arrow[rr, "f \times \mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{pr}_1"'] & & U \times F \arrow[ddl, bend left, "\mathrm{pr}_1"] \\
& (f \circ \widetilde{p})^{-1}(U) \arrow[ul, "\widetilde{\varphi}"'] \arrow[r, "\widetilde{f}"'] \arrow[d, "\widetilde{p}"'] & p^{-1}(U) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[d, "p"] \\
& f^{-1}(U) \arrow[r, "f"'] & U \ .
\end{tikzcd}$$

Par construction, $\widetilde{f}$ est linéaire sur les fibres (c'est même un isomorphisme linéaire). Par la commutativité du diagramme précédant l'énoncé de la proposition, $(\widetilde{f}, f)$ est donc un morphisme de fibrés vectoriels. Le résultat en découle. $\square$

Remarques et exemples. (1) Si $g : N \to M$ est une application C^r, alors les fibrés vectoriels $(f \circ g)^*\xi$ et $g^*(f^*\xi)$ sur N sont égaux.

(2) Si B' est une sous-variété de B et si $i : B' \to B$ est l'inclusion, alors $i^*\xi$ est un fibré vectoriel sur B', appelé *restriction* de ξ à B'. Il est aussi noté $\xi_{|B'}$. Pour tout $b \in B$, la fibre de $\xi_{|B'}$ au-dessus de b est égale à la fibre de ξ au-dessus de b.

(3) Si N et M sont deux variétés sur $\mathbb{K}$ de classe C^{r+1} et si $i : N \to M$ est une immersion C^{r+1}, alors le fibré tangent de N s'identifié à un sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel image réciproque par i du fibré tangent de M, par les applications $T_x i : T_x N \to (i^*TM)_x = T_{i(x)}M$ pour $x \in N$.

(4) Il est facile (voir par exemple l'exercice corrigé E.34 (1) dans la partie 2.4) de montrer que si ξ est trivialisable, alors $f^*\xi$ est trivialisable, et que si f est constante, alors $f^*\xi$ est trivial.

(5) L'image réciproque commute avec les opérations précédentes sur les fibrés vectoriels : si $\xi = \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_m$, alors $f^*\xi = f^*\xi_1 \oplus \cdots \oplus f^*\xi_m$; si ξ est le fibré vectoriel dual de η, alors $f^*\xi$ est le fibré vectoriel dual de $f^*\eta$; si $\xi = \mathscr{L}(\xi_1, \ldots, \xi_m; \xi_0)$, alors $f^*\xi = \mathscr{L}(f^*\xi_1, \ldots, f^*\xi_m; f^*\xi_0)$; en particulier, si $\xi = \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_m$, alors $f^*\xi = f^*\xi_1 \otimes \cdots \otimes f^*\xi_m$. De plus, si η est un sous-fibré vectoriel de ξ, alors $f^*\eta$ est un sous-fibré vectoriel de $f^*\xi$.

(6) Si $r \geq 1$, soit $\omega \in \Gamma(\Lambda^p T^*B \otimes \xi)$ une p-forme différentielle sur B à valeurs dans ξ. Alors on définit l'*image réciproque* de ω par f comme la p-forme différentielle $f^*\omega \in \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes f^*\xi)$ sur M à valeurs dans le fibré image réciproque $f^*\xi$ en posant, pour tous les $x \in M$ et $X_1, \ldots, X_p \in T_xM$,

$$(f^*\omega)_x(X_1, \ldots, X_p) = \omega_{f(x)}(T_xf(X_1), \ldots, T_xf(X_p)) \ ,$$

qui appartient à $(f^*\xi)_x = \xi_{f(x)}$.

(7) Soient ξ un fibré vectoriel, de projection $p : E \to B$, et $c : [0,1] \to B$ une courbe C^r. Alors un *champ de vecteurs* C^r *le long de* c *à valeurs dans* ξ est une section C^r du fibré vectoriel $c^*\xi$, c'est donc une application $X : [0,1] \to E$ de classe C^r telle que $X(t) \in \xi_{c(t)}$, pour tout $t \in [0,1]$. En particulier, si M est une variété sur $\mathbb{K}$ de classe C^{r+1} et si $c : [0,1] \to M$ est une courbe C^r, alors un *champ de vecteurs* C^r *le long de* c est une section C^r du fibré vectoriel c^*TM, c'est donc une application $X : [0,1] \to TM$ de classe C^r telle que $X(t) \in T_{c(t)}M$, pour tout $t \in [0,1]$. Notons que $[0,1]$ n'est pas une variété, mais une variété à bord. Les définitions s'adaptent sans problème.

(8) Le fibré image réciproque vérifie la propriété universelle suivante, laissée en exercice.

Exercice E.31 *Pour tout fibré vectoriel η au-dessus de M, de projection $\pi : E' \to M$, et pour tout morphisme (F, f) de fibrés vectoriels de η sur ξ, il existe un unique morphisme θ de fibrés vectoriels de η sur $f^*\xi$, qui rende le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "F"] \arrow[ddr, bend right, "\pi"'] & & \\
& f^*E \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\widetilde{p}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& M \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

• **Produit cartésien de fibrés vectoriels.**

Soient $(\xi_i)_{i \in I}$ une famille finie de fibrés vectoriels, et $p_i : E_i \to B_i$ la projection de ξ_i pour tout $i \in I$.

Le *fibré vectoriel produit cartésien* de $(\xi_i)_{i \in I}$ est le fibré vectoriel, noté $\xi = \prod_{i \in I} \xi_i$ (et $\xi_1 \times \xi_2$ si $I = \{1, 2\}$), de base la variété produit $B = \prod_{i \in I} B_i$, d'espace total la variété

produit $E = \prod_{i\in I} E_i$, de projection l'application produit $p = \prod_{i\in I} p_i : \prod_{i\in I} E_i \to \prod_{i\in I} B_i$ définie par $(x_i)_{i\in I} \mapsto \big(p_i(x_i)\big)_{i\in I}$, de structure vectorielle sur la fibre au-dessus de $(b_i)_{i\in I}$ la structure d'espace vectoriel produit sur $\xi_b = \prod_{i\in I} \xi_{i,\,b}$.

Pour vérifier que ξ est bien un fibré vectoriel, il suffit de remarquer que si $\varphi_i : p_i^{-1}(U_i) \to U_i \times F_i$ est une trivialisation locale du fibré vectoriel ξ_i au-dessus de l'ouvert U_i de B_i, alors l'application de $p^{-1}(\prod_{i\in I} U_i) = \prod_{i\in I} p_i^{-1}(U_i)$ dans $(\prod_{i\in I} U_i) \times (\prod_{i\in I} F_i)$ définie par

$$(x_i)_{i\in I} \mapsto \Big(\big(\operatorname{pr}_1 \circ\varphi_i(x_i)\big)_{i\in I}, \big(\operatorname{pr}_2 \circ\varphi_i(x_i)\big)_{i\in I}\Big)$$

est une trivialisation locale du fibré vectoriel ξ au-dessus de l'ouvert $\prod_{i\in I} U_i$ de B.

Par exemple, le fibré tangent d'un produit $\prod_{i\in I} M_i$ de variétés de classe C^{r+1} est canoniquement isomorphe au produit cartésien de leurs fibrés tangents, par l'application de $T(\prod_{i\in I} M_i)$ dans $\prod_{i\in I} TM_i$ définie par $v \mapsto \big((T\operatorname{pr}_i)(v)\big)_{i\in I}$, où pr_i est la projection sur le i-ème facteur de $\prod_{i\in I} M_i$. Nous identifierons par la suite ces fibrés par cette application.

Remarque. Soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels, de projections $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$. Par définition, l'espace total du fibré somme directe $\xi \oplus \xi'$ est la sous-variété

$$E \oplus E' = \{(x, x') \in E \times E' \ : \ p(x) = p'(x')\}$$

de la variété produit $E \times E'$, et la projection de $\xi \oplus \xi'$ est l'application $(x, x') \mapsto p(x)$. Si $\delta : B \to B^2$ est l'application diagonale définie par $\delta(x) = (x, x)$, alors il est facile de montrer que l'application de l'espace total du fibré vectoriel $\delta^*(\xi \times \xi')$ (image réciproque par δ du fibré vectoriel produit de ξ et ξ') à valeurs dans $E \oplus E'$, définie par

$$(x, x') \mapsto x + x'$$

est un isomorphisme de fibrés vectoriels (au-dessus de l'identité).

- **Conjugué d'un fibré vectoriel complexe.**

Rappelons que si V est un espace vectoriel complexe, on appelle *espace vectoriel complexe conjugué* l'espace vectoriel $\overline{V}$ de même ensemble sous-jacent que V et de même addition que V, mais où la multiplication externe a été remplacée par $(\lambda, x) \mapsto \overline{\lambda}x$.

Si ξ est un fibré vectoriel complexe, de projection $p : E \to B$, alors la donnée de cette projection et, pour tout $b \in B$, de la structure d'espace vectoriel conjugué $\overline{\xi_b}$ sur la fibre $p^{-1}(b)$ à celle de ξ_b, est un fibré vectoriel complexe, appelé *conjugué* de ξ et noté $\overline{\xi}$.

- **Complexification d'un fibré vectoriel réel.**

Soit ξ un fibré vectoriel réel de rang n, de projection $p : E \to B$. En considérant $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel réel de dimension 2, notons $\xi_{\mathbb{C}}$ le fibré vectoriel réel trivial sur B de fibre $\mathbb{C}$. Notons $p_{\mathbb{C}}$ la projection du fibré vectoriel réel $\xi' = \xi \otimes \xi_{\mathbb{C}}$ produit tensoriel de ξ et de $\xi_{\mathbb{C}}$. Pour tout $b \in B$, la fibre $\xi'_b = \xi_b \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de ξ' au-dessus de b est naturellement munie d'une structure d'espace vectoriel complexe. La donnée de l'application $p_{\mathbb{C}}$, et de ces structures d'espaces vectoriels complexes sur ses fibres, est un fibré vectoriel complexe, que nous appellerons le *fibré vectoriel complexifié* de ξ.

En effet, si $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ est une trivialisation de ξ au-dessus de U, et puisque $\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}^n$, nous avons vu que l'application $\varphi' \colon p_{\mathbb{C}}^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ telle que, pour tous les $b \in B$, $z \in \mathbb{C}$ et $v \in \xi_b$, nous avons

$$\varphi'(v \otimes z) = \big(b, z \operatorname{pr}_2 \circ\varphi(v)\big)$$

est une trivialisation de ξ' au-dessus de U. Or pour tout $b \in B$, l'application $\varphi'_{|\xi'_b} : \xi_b \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ est linéaire sur $\mathbb{C}$.

2.2.4 Métrique euclidienne et hermitienne sur un fibré vectoriel.

Pour parler comme les physiciens, une métrique euclidienne sur un fibré vectoriel réel est un champ de produits scalaires euclidiens $b \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_b$, sur un champ $b \mapsto \xi_b$ d'espaces vectoriels, dépendant de manière lisse d'un point b variant dans un espace lisse de paramètres.

Soit ξ un fibré vectoriel réel (respectivement complexe), de projection $p : E \to B$. Soit $\xi_{\mathbb{R}}$ (resp. $\xi_{\mathbb{C}}$) le fibré vectoriel trivial sur B de fibre $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Une *métrique pseudo-euclidienne* (respectivement *pseudo-hermitienne*) est une section $\sigma \in \Gamma(\xi^* \otimes \xi^*) = \Gamma(\mathscr{L}(\xi, \xi; \xi_{\mathbb{R}}))$ (respectivement $\sigma \in \Gamma(\xi^* \otimes \overline{\xi}^*) = \Gamma(\mathscr{L}(\xi, \overline{\xi}; \xi_{\mathbb{C}}))$) de classe C^r telle que pour tout $b \in B$, la forme bilinéaire (respectivement sesquilinéaire) $\sigma(b)$ sur ξ_b soit non dégénérée, symétrique (respectivement hermitienne) de signature localement constante. Nous dirons simplement *métrique euclidienne* (respectivement *hermitienne*) lorsque pour tout $b \in B$, la forme bilinéaire (respectivement sesquilinéaire) $\sigma(b)$ sur ξ_b est un produit scalaire euclidien (respectivement hermitien).

Nous noterons en général g ces métriques, ainsi que, en l'absence d'ambiguïté,

$$g_b(\,\cdot\,,\,\cdot\,) = \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_b$$

la forme bilinéaire (respectivement sesquilinéaire) sur ξ_b définie par g (qui est un produit scalaire lorsque g est euclidienne (respectivement hermitienne)). Une métrique pseudo-euclidienne est en particulier une section C^r du fibré vectoriel $\bigotimes^2 \xi^*$ (le fibré tensoriel $(2,0)$ de ξ), ainsi qu'une section du fibré $S^2\xi^*$ des formes bilinéaires symétriques de ξ.

Proposition 2.19 *Si $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, alors tout fibré vectoriel réel (respectivement complexe) de classe C^r admet une métrique euclidienne (respectivement hermitienne).*

Démonstration. Le résultat est immédiat si ξ est trivial de fibre F, car il suffit de fixer un produit scalaire sur F, et de munir toute fibre $\{b\} \times F$ du produit scalaire évident. Par transport de structure, le résultat est aussi clair si ξ est trivialisable. Enfin, soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de la base B (qui est paracompacte), par des ouverts au-dessus desquels ξ est trivialisable. Soit g_i une métrique euclidienne (respectivement hermitienne) sur $\xi_{|U_i}$. Soit $(\varphi_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité C^r subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ (qui existe car $r \neq \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}$). Alors il est facile de vérifier que $\sum_{i \in I} \varphi_i g_i$ est une métrique euclidienne (respectivement hermitienne) sur ξ. $\square$

Exercice E.32 *Soient $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et ξ un fibré vectoriel réel (respectivement complexe) de classe C^r.*

(1) Montrer que ξ est isomorphe, au-dessus de l'identité, à son fibré vectoriel dual ξ^* (respectivement dual conjugué $\overline{\xi}^*$).

(2) Si ξ' est un sous-fibré vectoriel de ξ, montrer qu'il existe un sous-fibré vectoriel ξ'' de ξ tel que l'application évidente de $\xi' \oplus \xi''$ dans ξ soit un isomorphisme de fibrés vectoriels.

En particulier, toute métrique euclidienne sur le fibré tangent d'une variété M réelle de classe C^{r+1} fournit un isomorphisme (de fibrés vectoriels réels C^r) entre le fibré tangent

TM de M et le fibré cotangent T^*M de M, par l'application qui, pour tout $x \in M$, associe à $X \in T_xM$ la forme linéaire $Y \mapsto \langle X, Y\rangle_x$ dans T_x^*M.

• **Métrique riemannienne induite sur le fibré des tenseurs.**

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension finie.

Tout produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ sur E définit un unique produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E^*}$, dit *dual*, sur l'espace vectoriel dual E^* de E, tel que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, alors sa base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ soit orthonormée : si $\varphi : E \to E^*$ est l'isomorphisme linéaire $x \mapsto \{y \mapsto \langle x, y\rangle_E\}$, alors pour tous les $\ell, \ell' \in E^*$, nous avons

$$\langle \ell, \ell'\rangle_{E^*} = \langle \varphi^{-1}(\ell), \varphi^{-1}(\ell')\rangle_E \ .$$

De même, la donnée d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ sur E et d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ sur F définit un unique produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E\otimes F}$, dit *produit tensoriel*, sur l'espace vectoriel produit tensoriel $E \otimes F$ tel que si $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$ sont des bases orthonormées de E et F respectivement, alors $(e_i \otimes f_j)_{1\le i\le n,\, 1\le j\le m}$ est une base orthonormée de $E \otimes F$.

Par récurrence, pour tous les $s, t \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel produit tensoriel $(E^*)^{\otimes s} \otimes E^{\otimes t}$ admet un unique produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(E^*)^{\otimes s}\otimes E^{\otimes t}}$ tel que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, alors $(e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_s}^* \otimes e_{j_1} \cdots \otimes e_{j_t})_{1\le i_k, j_\ell \le n}$ est une base orthonormée de $(E^*)^{\otimes s} \otimes E^{\otimes t}$.

Soit ξ un fibré vectoriel réel, muni d'une métrique euclidienne $x \mapsto \langle\cdot,\cdot\rangle_{\xi_x}$. Alors pour tous les $s, t \in \mathbb{N}$, en prenant des cartes locales, il est facile de vérifier que l'application $x \mapsto \langle\cdot,\cdot\rangle_{(\xi_x^*)^{\otimes s}\otimes\xi_x^{\otimes t}}$ est une métrique euclidienne sur le fibré vectoriel produit tensoriel $T_s^t\xi = (\xi^*)^{\otimes s} \otimes \xi^{\otimes t}$. Cette métrique euclidienne sur $T_s^t\xi$ est dite *induite* par celle de ξ.

2.2.5 Classification des fibrés vectoriels

Commençons par des rappels d'homotopie.

Soient X et Y deux espaces topologiques. Deux applications f et g de X dans Y sont *homotopes* s'il existe une application continue $h : [0, 1] \times X \to Y$ telle que $h(0, x) = f(x)$ et $h(1, x) = g(x)$ pour tout $x \in X$. La relation « être homotope » est une relation d'équivalence. Nous noterons $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie (c'est-à-dire des classes d'équivalence par cette relation) d'applications continues de X dans Y.

L'espace topologique X est dit *contractile* s'il est connexe par arc, et si l'application identité de X dans X est homotope à une application constante.

Soient $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dans cette partie, toutes les variétés sont C^r et tous les fibrés vectoriels sont des fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ de classe C^r. Il est important que $r \neq \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}$ dans cette partie 2.2.5.

Lemme 2.20 *Soit ξ un fibré vectoriel sur $]-\epsilon, 1 + \epsilon[\times B$, où $\epsilon > 0$ et B est une variété C^r. Alors les fibrés vectoriels images réciproques de ξ par $b \mapsto (0, b)$ et par $b \mapsto (1, b)$ sont isomorphes au-dessus de l'identité.*

Démonstration. Nous ne démontrons ce résultat que lorsque B est compacte, voir par exemple [Spi] pour le cas général.

Pour tout $t \in]-\epsilon, 1 + \epsilon[$, notons ξ_t le fibré vectoriel sur B image réciproque de ξ par l'application $b \mapsto (t, b)$, de sorte que $(\xi_t)_b = \xi_{(t,b)}$. Montrons que pour tout $t_0 \in [0, 1]$,

si t est assez proche de t_0, alors ξ_t est isomorphe à ξ_{t_0}, ce qui conclut par compacité et connexité de $[0,1]$.

Notons p la projection de ξ. Par compacité de $\{t_0\}\times B$, il existe un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{i\in I}$ de B et une suite finie $(\epsilon_i)_{i\in I}$ dans $]0,+\infty[$ telle que, si $V_i =]t_0-\epsilon_i, t_0+\epsilon_i[\times U_i$, alors il existe une trivialisation $\varphi_i : p^{-1}(V_i) \to V_i \times F_i$ du fibré vectoriel ξ au-dessus de V_i. Soit $\epsilon \in]0, \min_{i\in I}\epsilon_i]$. Si $|t-t_0| \leq \epsilon$ et $b \in U_i$, notons $\psi_{i,b} : \xi_{t,b} \to \xi_{t_0,b}$ l'isomorphisme linéaire défini par $v \mapsto \varphi_i^{-1}(t_0, b, v_i)$ où $\varphi_i(v) = (t, b, v_i)$. Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité C^r sur B subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$. Considérons l'application de ξ_t dans ξ_{t_0} définie par $v \in \xi_{t,b} \mapsto \sum_{i\in I}\alpha_i(b)\psi_{i,b}(v)$. Il n'est pas difficile de vérifier que si ϵ est assez petit, alors cette application est un isomorphisme de fibrés vectoriels de ξ_t dans ξ_{t_0} au-dessus de l'identité. □

Corollaire 2.21 *Tout fibré vectoriel de base contractile est trivialisable.*

Démonstration. Soit ξ un fibré vectoriel de base B. Nous ne donnerons la démonstration que si B est compacte, voir [Hus, Chap. 1] pour le cas général.

Nous pouvons supposer que B est non vide, et nous fixons $b_0 \in B$. Par régularisation des homotopies (voir par exemple [Godb]), il existe une application $h :]-\epsilon, 1+\epsilon[\times B \to B$ de classe C^r, telle que $h(0,b) = b$ et $h(1,b) = b_0$ pour tout $b \in B$. Remarquons que $h^*\xi$ est un fibré vectoriel sur $]-\epsilon, 1+\epsilon[\times B$. Les fibrés vectoriels sur B images réciproques de $h^*\xi$ par $b \mapsto (0,b)$ et par $b \mapsto (1,b)$ sont isomorphes au-dessus de l'identité respectivement à ξ et à un fibré trivial (de fibre ξ_{b_0}). Le résultat découle alors du lemme 2.20. □

Le résultat suivant donne une manière de comprendre tous les fibrés vectoriels sur une variété donnée, supposée compacte pour simplifier. Rappelons que $\tau_n(V) \to \mathscr{G}_n(V)$ est le fibré vectoriel tautologique au-dessus de la variété grassmannienne de rang n d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$ (voir l'exemple (4) de la partie 2.2.1). Nous identifierons $\mathbb{K}^N$ avec le sous-espace vectoriel des N premières coordonnées dans $\mathbb{K}^{N'}$ pour tout $N' \geq N$.

Théorème 2.22 *Soient $n \in \mathbb{N}$ et B une variété compacte C^r.*

(1) Pour tout fibré vectoriel ξ sur B de rang n, il existe $N \in \mathbb{N}$ et une application $f : B \to \mathscr{G}_n(\mathbb{K}^N)$ de classe C^r telle que ξ soit isomorphe au fibré vectoriel image réciproque $f^*\tau_n(\mathbb{K}^N)$ au-dessus de l'identité.

(2) Soient $f, g : B \to \mathscr{G}_n(\mathbb{K}^N)$ deux applications de classe C^r. Si f et g sont homotopes alors les fibrés vectoriels $f^*\tau_n(\mathbb{K}^N)$ et $g^*\tau_n(\mathbb{K}^N)$ sont isomorphes au-dessus de l'identité. Réciproquement, si ces fibrés vectoriels sont isomorphes au-dessus de l'identité, alors f et g sont homotopes dans $\mathscr{G}_n(\mathbb{K}^{2N})$.

Démonstration. Pour simplifier les notations, posons $\mathscr{G}_{p,q} = \mathscr{G}_p(\mathbb{K}^q)$ et $\tau_{p,q} = \tau_p(\mathbb{K}^q)$.

(1) Par partition de l'unité finie (la variété B est supposée compacte), et par l'existence de sections génératrices locales, il existe $N \in \mathbb{N}$ et des sections $\sigma_1, \ldots, \sigma_N \in \Gamma(\xi)$ telles que pour tout $b \in B$, les éléments $\sigma_1(b), \ldots, \sigma_N(b)$ engendrent ξ_b. Pour tout $b \in B$, notons $F_b : \mathbb{K}^N \to \xi_b$ l'application définie par $(t_i)_{1\leq i\leq m} \mapsto \sum_{i=1}^m t_i\sigma_i(b)$, qui est linéaire, surjective, de noyau de dimension $N-n$. Munissons $\mathbb{K}^N$ d'un produit scalaire euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Considérons l'application $f : B \to \mathscr{G}_{n,N}$ qui à $b \in B$ associe l'orthogonal de $\mathrm{Ker}(F_b)$, qui est bien un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathbb{K}^N$. Il est facile de voir que f est de classe C^r, que $F_{b|f(b)} : f(b) \to \xi_b$ est un isomorphisme linéaire, et que si E est l'espace total de ξ, l'application de $f^*\tau_{n,N}$ dans E définie par $v \mapsto F_b(v)$

où $v \in (f^*\tau_{n,N})_b = (\tau_{n,N})_{f(b)} = f(b)$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels au-dessus de l'identité de $f^*\tau_{n,N}$ dans ξ. Donc ξ et $f^*\tau_{n,N}$ sont isomorphes au-dessus de l'identité.

(2) Si f et g sont C^r et homotopes, par régularisation des homotopies (voir par exemple [Godb]), il existe une application $h :]-\epsilon, 1+\epsilon[\times B \to \mathscr{G}_{n,N}$ de classe C^r telle que $h(0,b) = f(b)$ et $h(1,b) = g(b)$ pour tout $b \in B$. Notons ξ le fibré vectoriel image réciproque $h^*\tau_{n,N}$, dont les restrictions à $\{0\} \times B$ et à $\{1\} \times B$ sont isomorphes à $f^*\tau_{n,N}$ et $g^*\tau_{n,N}$ respectivement. Ces fibrés vectoriels sont isomorphes au-dessus de l'identité, par le lemme 2.20.

Réciproquement, soient f et g deux applications C^r telles que les fibrés vectoriels $f^*\tau_{n,N}$ et $g^*\tau_{n,N}$ soient isomorphes au-dessus de l'identité. Montrons que f et g sont homotopes dans $\mathscr{G}_n(\mathbb{K}^{2N})$.

L'application de $[0,1] \times \mathbb{K}^N$ dans $\mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N = \mathbb{K}^{2N}$ définie par $(s,v) \mapsto ((1-s)v, sv)$ induit une application continue $h : [0,1] \times \mathscr{G}_{n,N}$ dans $\mathscr{G}_{n,2N}$. L'application $g' : x \mapsto h(1, g(x))$ est homotope à g. En notant encore $f : B \to \mathscr{G}_{n,2N}$ l'application composée de f et de l'inclusion $\mathscr{G}_{n,N} \to \mathscr{G}_{n,2N}$, les fibrés vectoriels $f^*\tau_{n,2N}$ et $g'^*\tau_{n,2N}$ sont, par ce qui précède, isomorphes au-dessus de l'identité. Quitte à remplacer g par g', nous pouvons donc supposer que les valeurs de f et g appartiennent respectivement à $\mathbb{K}^N \times \{0\}$ et à $\{0\} \times \mathbb{K}^N$.

Soit ψ un isomorphisme de fibrés vectoriels de $f^*\tau_{n,2N}$ dans $g^*\tau_{n,2N}$ au-dessus de l'identité. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
f^*\tau_{n,2N} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "\psi"] & \tau_{n,2N} \arrow[d] & g^*\tau_{n,2N} \arrow[l, "\widetilde{g}"'] \arrow[d] \\
B \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & \mathscr{G}_{n,2N} & B\,. \arrow[l, "g"']
\end{tikzcd}$$

Pour tout $b \in B$, la fibre de $f^*\tau_{n,2N}$ au-dessus de b est le sous-espace vectoriel $f(b)$ de $\mathbb{K}^{2N}$, celle de $g^*\tau_{n,2N}$ est $g(b)$, et ψ induit un isomorphisme linéaire $\psi_b : f(b) \to g(b)$. Notons $\psi_{t,b}$ l'application de $f(b)$ dans $\mathbb{K}^{2N}$ définie par $x \mapsto (1-t)x + t\psi_b(x)$, qui est linéaire et injective par l'hypothèse sur les images de f et de g. En particulier, $\psi_{t,b}(f(b))$ est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathbb{K}^{2N}$, donc un élément de $\mathscr{G}_{n,2N}$. Il est facile de vérifier que l'application $h : (t,b) \mapsto \psi_{t,b}(f(b))$ est une homotopie entre f et g. □

Nous renvoyons à l'exercice corrigé E.34 de la partie 2.4 pour une démonstration du résultat suivant n'utilisant pas la classsification des fibrés vectoriels.

Corollaire 2.23 *Tout fibré vectoriel de base compacte est isomorphe à un sous-fibré d'un fibré trivial.*

Démonstration. Nous avons vu dans la partie 2.2.2 que le fibré tautologique $\tau_k(\mathbb{K}^N)$ sur $\mathscr{G}_k(\mathbb{K}^N)$ est un sous-fibré d'un fibré trivial ξ sur $\mathscr{G}_k(\mathbb{K}^N)$. Pour toute application f de classe C^r de B dans $\mathscr{G}_k(\mathbb{K}^N)$, le fibré vectoriel $f^*\tau_k(\mathbb{K}^N)$ sur B est donc un sous-fibré du fibré trivial $f^*\xi$. Le résultat découle donc du théorème 2.22 (1). □

Remarques. (1) Soient M une variété et $k \in \mathbb{N}$. Notons $\mathrm{Vect}_k(M)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang k sur M. Il est en fait possible de montrer (voir par exemple [Hus]) que si M est compacte et si n est assez grand, alors l'application

$$[M, \mathscr{G}_k(\mathbb{K}^n)] \simeq \mathrm{Vect}_k(M)$$

de l'ensemble $[M, \mathscr{G}_k(\mathbb{K}^n)]$ des classes d'homotopie d'applications continues de M dans la variété grassmannienne $\mathscr{G}_k(\mathbb{K}^n)$, à valeurs dans $\mathrm{Vect}_k(M)$, qui à une application continue f associe la classe d'isomorphisme du fibré image réciproque $g^*\tau_k(\mathbb{K}^n)$ où $g : M \to \mathscr{G}_k(\mathbb{K}^n)$ est C^r et homotope à f, est une bijection.

Identifions $\mathbb{K}^n$ avec le sous-espace de $\mathbb{K}^{n+1}$ des n premières coordonnées. Ceci induit une injection $\mathscr{G}_k(\mathbb{K}^n)$ dans $\mathscr{G}_k(\mathbb{K}^{n+1})$ par laquelle nous identifions $\mathscr{G}_k(\mathbb{K}^n)$ avec son image. Si M n'est plus supposée compacte, nous avons aussi une bijection

$$[M, \mathscr{G}_k(\mathbb{K}^\infty)] \simeq \mathrm{Vect}_k(M)$$

où $\mathscr{G}_k(\mathbb{K}^\infty)$ est la réunion des $\mathscr{G}_k(\mathbb{K}^n)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$, munie de la topologie limite inductive (une partie de $\mathscr{G}_k(\mathbb{K}^\infty)$ est fermée si et seulement si son intersection avec chaque $\mathscr{G}_k(\mathbb{K}^n)$ est fermée).

En particulier, si $0 \leq r' \leq r$, la classification des fibrés vectoriels $\mathrm{C}^{r'}$ sur M est la même que la classification des fibrés vectoriels C^r sur M.

(2) L'exercice E.34 de la partie 2.4 montre que tout fibré vectoriel ξ de base compacte M est *stablement trivialisable*, c'est-à-dire qu'il existe un fibré vectoriel ξ' sur M tel que $\xi \oplus \xi'$ soit trivialisable. Ceci est le point de départ de la K-théorie topologique, pour laquelle nous renvoyons par exemple à [Ati, Kar].

2.3 Connexions

Sauf mention explicite du contraire, dans cette partie, toutes les variétés sont des variétés réelles de classe C^∞, et tous les fibrés vectoriels sont des fibrés vectoriels réels de classe C^∞. Pour toute variété M, nous noterons $\mathrm{C}^\infty(M) = \mathrm{C}^\infty(M; \mathbb{R})$.

Soient M une variété et $\Gamma(TM)$ le $\mathrm{C}^\infty(M)$-module des champs de vecteurs lisses sur M. Rappelons que pour tous les $X \in \Gamma(TM)$ et $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, nous notons $X(f)$ ou $\mathscr{L}_X f$ l'élément de $\mathrm{C}^\infty(M)$ défini par

$$\mathscr{L}_X f = X(f) : x \mapsto d_x f(X(x)) \ .$$

C'est une *dérivation* de l'algèbre réelle $\mathrm{C}^\infty(M)$, c'est-à-dire que l'application $f \mapsto X(f)$ de $\mathrm{C}^\infty(M)$ dans lui-même est linéaire et que

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

pour tous les $f, g \in \mathrm{C}^\infty(M)$. Par la définition du crochet de champs de vecteurs (voir l'exemple (10) de la partie 1.2), il est facile de voir que pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$\mathscr{L}_{[X,Y]} = \mathscr{L}_X \circ \mathscr{L}_Y - \mathscr{L}_Y \circ \mathscr{L}_X \qquad (\cdot 16 \cdot)$$

c'est-à-dire que pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, nous avons

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \ .$$

(Certains ouvrages définissent ainsi le crochet de Lie des champs de vecteurs, mais cette définition n'est pas adaptée en régularité différente de la régularité C^∞, et en particulier en régularité analytique complexe.)

2.3.1 Lemme de tensorialité et applications : produit extérieur, produit intérieur, dérivée de Lie, contraction

Nous commençons par énoncer un résultat qui, en régularité C^∞, permet de construire des tenseurs sur une variété, et que nous utiliserons de très nombreuses fois par la suite (le mathématicien polycéphale A. Besse l'appelle même le « lemme fondamental de la géométrie différentielle »). Son gros inconvénient est qu'il est faux en régularité analytique réelle ou analytique complexe, et donc que les notions de connexion, torsion d'une connexion, courbure d'une connexion, etc. doivent (et peuvent) être définies autrement.

Lemme 2.24 (Lemme de tensorialité) *Soient $m \geq 1$ un entier et $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$ des fibrés vectoriels sur une variété M. Pour toute application $\mathbb{R}$-multilinéaire*

$$A : \Gamma(\xi_1) \times \cdots \times \Gamma(\xi_m) \to \Gamma(\xi_0) \ ,$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) A est $\mathrm{C}^\infty(M)$-multilinéaire (c'est-à-dire qu'elle vérifie l'égalité $A(f_1\sigma_1, \ldots, f_m\sigma_m) = f_1 \ldots f_m A(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ pour tous les $f_i \in \mathrm{C}^\infty(M)$ et $\sigma_i \in \Gamma(\xi_i)$) ;

(2) il existe une et une seule section lisse α du fibré vectoriel $\xi_1^* \otimes \cdots \otimes \xi_m^* \otimes \xi_0 = \mathscr{L}(\xi_1, \ldots, \xi_m; \xi_0)$ telle que pour tous les $x \in M$ et $\sigma_i \in \Gamma(\xi_i)$, nous ayons

$$A(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)(x) = \alpha(x)(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_m(x)) \ .$$

Nous dirons que la section $\alpha \in \Gamma(\xi_1^* \otimes \cdots \otimes \xi_m^* \otimes \xi_0)$ est *associée* à A. Nous la noterons encore A. Ceci est compatible avec la définition donnée dans la partie 2.2.3 (exemple (3) de la sous-partie sur les fibrés d'applications multilinéaires) de l'évaluation de la section multilinéaire α sur les sections $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$.

Démonstration. Notons Θ l'application $\mathbb{R}$-linéaire de $\Gamma\big(\mathscr{L}(\xi_1, \ldots, \xi_m; \xi_0)\big)$ dans l'espace vectoriel $\mathscr{L}_{\mathrm{C}^\infty(M)}\big(\Gamma(\xi_1), \ldots, \Gamma(\xi_m); \Gamma(\xi_0)\big)$ des applications $\mathrm{C}^\infty(M)$-multilinéaires de $\Gamma(\xi_1) \times \cdots \times \Gamma(\xi_m)$ dans $\Gamma(\xi_0)$, définie par

$$\alpha \mapsto \big\{(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \mapsto \{x \mapsto \alpha(x)\big(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_m(x)\big)\}\big\} \ .$$

Il est immédiat que tout élément dans l'image de Θ est bien $\mathrm{C}^\infty(M)$-multilinéaire.

Montrons que Θ est un isomorphisme linéaire, ce qui conclut.

Lemme 2.25 *Soient $A : \Gamma(\xi_1) \times \cdots \times \Gamma(\xi_m) \to \Gamma(\xi_0)$ une application $\mathrm{C}^\infty(M)$-multilinéaire, $x \in M$ et σ_i une section lisse de ξ_i pour $1 \leq i \leq m$. Alors la valeur de $A(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ en x ne dépend que des valeurs des σ_i en x.*

Démonstration. Par récurrence, il suffit de montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, si $\sigma_i' \in \Gamma(\xi_i)$ vérifie $\sigma_i'(x) = \sigma_i(x)$, alors $A(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i', \sigma_i, \ldots, \sigma_m)(x) = A(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)(x)$. Supposons $i = 1$ pour simplifier les notations.

Si σ_1' coïncide avec σ_1 sur un voisinage ouvert U de x, soit $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(M)$ à support compact contenu dans U valant 1 en x. Alors $\varphi(\sigma_1' - \sigma_1)$ est la section nulle, donc

$$\begin{aligned}
&A(\sigma_1', \sigma_2, \ldots, \sigma_m)(x) - A(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)(x) \\
&= \varphi(x) A(\sigma_1', \sigma_2, \ldots, \sigma_m)(x) - \varphi(x) A(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)(x) \\
&= A(\varphi(\sigma_1' - \sigma_1), \sigma_2, \ldots, \sigma_m)(x) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Si $\sigma_1'(x) = \sigma_1(x)$, en notant n le rang de ξ_1, nous affirmons qu'il existe $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(\xi_1)$ et $f_1, \dots, f_n \in \mathrm{C}^\infty(M)$ telles que $f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0$ et σ_1' coïncide avec $\sigma_1 + \sum_{i=1}^n f_i s_i$ sur un voisinage de x. En effet, soit U un voisinage ouvert de x au-dessus duquel ξ_1 est trivialisable, soit $(s_1', \dots, s_n')$ une base du $\mathrm{C}^\infty(U)$-module $\Gamma(\xi_{1|U})$ (qui existe par l'exemple (1) de la partie 2.2.1), soient $f_1', \dots, f_n' \in \mathrm{C}^\infty(U)$ telles que $(\sigma_1' - \sigma_1)_{|U} = \sum_{i=1}^n f_i' s_i'$, soit $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(M)$ à support compact contenu dans U, valant 1 sur un voisinage de x ; alors le résultat est vrai en prenant $f_i = \varphi f_i'$ et $s_i = \varphi s_i'$ (prolongés par 0 en dehors de U).

Maintenant, par ce qui précède,

$$\begin{aligned} A(\sigma_1', \sigma_2, \dots, \sigma_m)(x) &= A(\sigma_1 + \sum_{i=1}^n f_i s_i, \sigma_2, \ \dots \ , \sigma_m)(x) \\ &= A(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)(x) + \sum_{i=1}^n f_i(x) A(s_i, \sigma_2, \dots, \sigma_m)(x) \\ &= A(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)(x) \ . \ \square \end{aligned}$$

Lemme 2.26 *Soit ξ un fibré vectoriel sur une variété M.*

Pour tous les $x \in M$ et $v \in \xi_x$, il existe une section $\sigma \in \Gamma(\xi)$ telle que $\sigma(x) = v$.

Pour tout ouvert V de M, pour tout ouvert V' de M d'adhérence compacte contenue dans V et pour toute section σ' lisse de $\xi_{|V}$, il existe une section lisse σ de ξ telle que $\sigma_{|V'} = \sigma'_{|V'}$.

Démonstration. Si U est un voisinage ouvert distingué de x au-dessus duquel ξ est trivialisable, il existe une section σ' de $\xi_{|U}$ telle que $\sigma'(x) = v$. Maintenant si $\varphi : M \to \mathbb{R}$ est une application lisse valant 1 en x et à support compact contenu dans U, alors l'application $\sigma : y \mapsto \varphi(y)\sigma'(y)$ (prolongée par 0 en dehors de U) convient.

Pour montrer la seconde assertion, soit $\phi : M \to \mathbb{R}$ une application lisse valant 1 sur V' et à support compact contenu dans V, ce qui est possible localement et se globalise par partition de l'unité. Alors l'application $\sigma : y \mapsto \phi(y)\sigma'(y)$ (prolongée par 0 en dehors de V) convient. $\square$

Si $A \in \mathscr{L}\big(\Gamma(\xi_1), \dots, \Gamma(\xi_m); \Gamma(\xi_0)\big)$ est $\mathrm{C}^\infty(M)$-multilinéaire, pour tous les $x \in M$ et $(v_1, \dots, v_m) \in \xi_{1,x} \times \cdots \times \xi_{m,x}$, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, soit $\sigma_i \in \Gamma(\xi_i)$ telle que $\sigma_i(x) = v_i$, et posons

$$\alpha(x)(v_1, \dots, v_m) = A(\sigma_1, \dots, \sigma_m)(x) \ .$$

Par le lemme 2.25, cette section α de $\mathscr{L}(\xi_1, \dots, \xi_m; \xi_0)$ est bien définie, et dépend $\mathbb{R}$-linéairement de A. Elle est lisse, en utilisant le critère par les sections locales de la partie 2.2.3 (voir l'exercice E.30) et la seconde assertion du lemme précédent. Donc Θ est surjective. L'injectivité de Θ découle du fait que les valeurs de $\alpha(x)$ sont déterminées par $\Theta(\alpha)$, en utilisant la première assertion du lemme 2.26. $\square$

Exemples. Donnons quelques exemples d'utilisation de ce théorème. Soit ξ un fibré vectoriel sur une variété M. Nous surmontons par un chapeau un terme omis d'une énumération.

(1) **(Différentielle extérieure des formes différentielles)** La *différentielle extérieure* est l'unique application linéaire graduée de degré $+1$ de $\Gamma(\Lambda^* T^* M)$ dans $\Gamma(\Lambda^* T^* M)$,

telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $\alpha \in \Gamma(\Lambda^p T^*M)$, pour tous les $X_0, \ldots, X_p \in \Gamma(TM)$,

$$d\alpha(X_0, X_1, \ldots, X_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i(\alpha(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_p)) + \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_p) \ . \quad (\cdot 17 \cdot)$$

Il est facile de vérifier que le membre de droite est $\mathrm{C}^\infty(M)$-multilinéaire, donc définit bien, par le lemme de tensorialité, un $(p+1, 0)$-tenseur $d\alpha$, et que celui-ci est alterné, donc une $(p+1)$-forme différentielle sur M.

Le résultat suivant dit que cette définition de d (appelée la *formule de Cartan* de la différentielle extérieure) redonne bien la définition usuelle de la différentielle extérieure des formes différentielles.

Théorème 2.27 *La différentielle extérieure d est l'unique application linéaire graduée de degré $+1$ de $\Gamma(\Lambda^* T^*M)$ dans $\Gamma(\Lambda^* T^*M)$, telle que*

(1) pour tout f dans $\Gamma(\Lambda^0 T^*M) = \mathrm{C}^\infty(M)$, la forme différentielle df est égale à la différentielle de f définie par la formule ($\cdot 15 \cdot$) avant la proposition 2.16 ;

(2) d est une antidérivation de l'algèbre graduée $\Gamma(\Lambda^* T^*M)$, c'est-à-dire pour tous les $\alpha \in \Gamma(\Lambda^p T^*M)$ et $\beta \in \Gamma(\Lambda^q T^*M)$, nous avons

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta) \ ;$$

(3) $d \circ d = 0$.

De plus, les applications d commutent avec les restrictions aux ouverts : pour toute forme différentielle $\omega \in \Gamma(\Lambda^* T^*M)$, pour tout ouvert U de M,

$$(d\omega)_{|U} = d(\omega_{|U}) \ .$$

Enfin, les applications d commutent avec les images réciproques : pour toutes les variétés M et N de classe C^∞, pour toute application $f : M \to N$ de classe C^∞, et pour toute forme différentielle $\omega \in \Gamma(\Lambda^* T^*N)$, nous avons

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega) \ .$$

Par convention, notons $\Gamma(\Lambda^{-1} T^*M) = \{0\}$ et $d : \Gamma(\Lambda^{-1} T^*M) \to \Gamma(\Lambda^0 T^*M)$ l'application nulle. Nous verrons dans la démonstration qu'il suffit dans l'assertion (3) de demander la condition $d \circ d = 0$ sur le sous-espace vectoriel de $\Gamma(\Lambda^* T^*M)$ constitué des applications (les éléments de $\Gamma(\Lambda^0 T^*M)$).

Démonstration. Notons $\Omega(M) = \Gamma(\Lambda^* T^*M)$. Pour obtenir l'unicité, montrons que, pour tout ω dans $\Omega(M)$, les propriétés de la différentielle déterminent uniquement $d\omega$ sur un voisinage suffisamment petit de tout point. Cela concluera, par la propriété de localité des faisceaux des formes différentielles (voir la partie 2.2.3). Commençons par démontrer le lemme suivant, qui dit qu'un opérateur linéaire $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ qui vérifie les propriétés (1) et (2) est un opérateur « local ».

Lemme 2.28 *Si V est un ouvert de M, et si α, β sont des formes différentielles sur M telles que $\alpha_{|V} = \beta_{|V}$, alors $(d\alpha)_{|V} = (d\beta)_{|V}$.*

Démonstration. Pour tout x dans V, soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞, de support contenu dans V, valant 1 sur un voisinage de x. Alors $f(\alpha - \beta) = 0$ et par linéarité $d(f(\alpha - \beta)) = 0$. Comme d coïncide avec la différentielle des fonctions sur $\Gamma(\Lambda^0 T^*M) = \mathrm{C}^\infty(M)$, nous avons $df_x = 0$ et $f(x) = 1$. De plus,

$$d(f(\alpha - \beta)) = df \wedge (\alpha - \beta) + f \wedge d(\alpha - \beta)$$

par (2). Donc par linéarité, $d\alpha_x = d\beta_x$. Comme x est arbitraire, ceci montre le résultat. □

Pour tout x dans M, soit (U, φ) une carte locale de M en x à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, avec $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ les composantes de φ, et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞, de support contenu dans U, valant 1 sur un voisinage ouvert V de x. Pour $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ où $i_1 < \cdots < i_p$, posons $d(f\varphi)_I = d(f\varphi_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f\varphi_{i_p})$ (en étendant $f\varphi_{i_k}$ par 0 en dehors de U), qui est une p-forme différentielle sur M. Comme vu dans la partie 2.2.3, nous pouvons écrire

$$\omega_{|U} = \sum_I \omega_I d\varphi_I$$

où $\omega_I \in \mathrm{C}^\infty(U)$. Les formes différentielles ω et $\sum_I (f\omega_I) d(f\varphi)_I$ coïncident sur V, donc, par le lemme ci-dessus, leurs différentielles coïncident sur V. Par linéarité et par les propriétés de la différentielle, nous avons, en restriction à V,

$$d\omega = d\left(\sum_I (f\omega_I) d(f\varphi)_I\right) = \sum_I d(f\omega_I) \wedge d(f\varphi)_I \ .$$

Le terme de droite ne faisant plus intervenir que des différentielles de fonctions, par la propriété (1), le résultat d'unicité en découle.

Notons $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ l'opérateur linéaire défini par la formule de Cartan (· 17 ·), et montrons qu'il vérifie les assertions (1) à (3) du théorème 2.27. L'assertion (1) est immédiate : $df(X) = X(f)$ pour tous les $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ et $X \in \Gamma(TM)$. Pour montrer les deux autres assertions, un calcul direct est possible, mais voici un argument utilisant moins de calcul.

Montrons que d vérifie l'assertion (2). Tout d'abord, pour tous les $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, $\alpha \in \Gamma(\Lambda^p T^*M)$ et $X_0, \ldots, X_p \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$\begin{aligned}
d(f\alpha)(X_0, \ldots, X_p) &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i(f\alpha(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_p)) \\
&\quad + \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} f\alpha([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_p) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i(f)\alpha(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_p)) + f d\alpha(X_0, \ldots, X_p) \\
&= (df \wedge \alpha + f d\alpha)(X_0, \ldots, X_p) \ .
\end{aligned}$$

En particulier, la démonstration du lemme 2.28 montre que d est un opérateur local.

Il s'agit de montrer que pour tous les $\alpha \in \Gamma(\Lambda^p T^*M)$, $\beta \in \Gamma(\Lambda^q T^*M)$ et pour tous les $X_0, \ldots, X_{p+q} \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$d(\alpha \wedge \beta)(X_0, \ldots, X_{p+q}) = \big((d\alpha) \wedge \beta\big)(X_0, \ldots, X_{p+q}) + (-1)^p \big(\alpha \wedge (d\beta)\big)(X_0, \ldots, X_{p+q}) \ .$$

En restriction à un voisinage ouvert U assez petit de chaque point, le $\mathrm{C}^\infty(U)$-module $\Gamma(TU)$ admet une base de champs de vecteurs $(\frac{\partial}{\partial x^k})_{1\leq k\leq n}$ qui commutent, et le $\mathrm{C}^\infty(U)$-module $\Gamma(\Lambda^p T^*U)$ admet une base $(dx_{i_1,\ldots,i_p})_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n}$ d'éléments qui, évalués en des p-uplets dans $(\frac{\partial}{\partial x^k})_{1\leq k\leq n}$, sont des applications constantes (valant $-1, 0$ ou 1). Donc, puisque les égalités à démontrer sont ponctuelles (c'est-à-dire à vérifier en tout point de M), par la propriété de localité et le cas $p = 0$ vus ci-dessus, nous pouvons supposer que les champs de vecteurs $X_0, \ldots, X_{p+q}$ sont des éléments de cette base de $\Gamma(TU)$ (et en particulier commutent) et que $\alpha, \beta, \alpha\wedge\beta$ évalués respectivement sur des p-uplets, q-uplets, $(p+q)$-uplets d'éléments de cette base sont des fonctions constantes. Mais alors, en notant w l'un quelconque des éléments $\alpha, \beta, \alpha\wedge\beta$ et respectivement $s = p, q, p+q$,

$$dw(X_0, \ldots, X_s) = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i X_i(w(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_s)) = 0 \ .$$

Donc $d(\alpha\wedge\beta)(X_0, \ldots, X_{p+q}) = 0$ et

$$\begin{aligned}\big((d\alpha)\wedge\beta\big)(X_0, \ldots, X_{p+q}) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(p+1,\,q)} \varepsilon_\sigma\ (d\alpha)(X_{\sigma(0)}, \ldots, X_{\sigma(p)})\beta(X_{\sigma(p+1)}, \ldots, X_{\sigma(p+q)}) \\ &= 0 \ ,\end{aligned}$$

et de même $\big(\alpha\wedge(d\beta)\big)(X_0, \ldots, X_{p+q}) = 0$, ce qui montre le résultat.

Montrons enfin que d vérifie l'assertion (3), c'est-à-dire que pour tous les $\alpha \in \Gamma(\Lambda^p T^*M)$ et pour tous les $X_0, \ldots, X_{p+1} \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$\big(d\circ d(\alpha)\big)(X_0, \ldots, X_{p+1}) = 0 \ .$$

Remarquons que pour tous les $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ et $Y_0, Y_1 \in \Gamma(TM)$, par définition de d et par les propriétés du crochet de Lie des champs de vecteurs, nous avons

$$\begin{aligned}d\circ d(f)(Y_0, Y_1) &= Y_0(df(Y_1)) - Y_1(df(Y_0)) - df([Y_0, Y_1]) \\ &= Y_0(Y_1(f)) - Y_1(Y_0(f)) - [Y_0, Y_1](f) = 0 \ .\end{aligned}$$

Par l'assertion (2), nous avons donc

$$\begin{aligned}d\circ d(f\alpha) &= d\big(df\wedge\alpha + f d\alpha\big) \\ &= (d\circ d(f))\wedge\alpha - df\wedge\alpha + df\wedge\alpha + f d\circ d(\alpha) = f d\circ d(\alpha) \ .\end{aligned}$$

Par le même raisonnement que ci-dessus, nous pouvons donc démontrer que $d\circ d(\alpha)$ évalué sur les champs de vecteurs $X_0, \ldots, X_{p+1}$ s'annule, ce qui montre l'assertion (3). □

(2) **(Produit intérieur des formes différentielles)** Pour tout $X \in \Gamma(TM)$, le *produit intérieur* i_X par X est l'unique application linéaire graduée de degré -1 de $\Gamma(\Lambda^* T^*M)$ dans $\Gamma(\Lambda^* T^*M)$ (donc nulle sur $\Gamma(\Lambda^0 T^*M) = \mathrm{C}^\infty(M)$) telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $\alpha \in \Gamma(\Lambda^{p+1} T^*M)$, pour tous les $X_1, \ldots, X_p \in \Gamma(TM)$,

$$i_X\alpha(X_1, \ldots, X_p) = \alpha(X, X_1, \ldots, X_p) \ .$$

Il est clair que le membre de droite est $\mathrm{C}^\infty(M)$-multilinéaire en $X_1, \ldots, X_p$, donc définit bien, par le lemme de tensorialité, un $(p, 0)$-tenseur $i_X\alpha$, et que celui-ci est alterné, donc une p-forme différentielle sur M.

Proposition 2.29 *L'application* $i_X : \Gamma(\Lambda^* T^* M) \to \Gamma(\Lambda^* T^* M)$ *vérifie*

(1) i_X *est une antidérivation de l'algèbre graduée* $\Gamma(\Lambda^* T^* M)$*, c'est-à-dire que pour tous les* α *dans* $\Gamma(\Lambda^p T^* M)$ *et* β *dans* $\Gamma(\Lambda^q T^* M)$*, nous avons*

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \, \alpha \wedge (i_X \beta) \; ;$$

(2) l'opérateur i_X *vérifie la propriété de localité suivante : pour tout ouvert* U *de* M *et tout* α *dans* $\Omega(M)$*, nous avons*

$$(i_X \alpha)_{|U} = i_{(X_{|U})}(\alpha_{|U}) \; ;$$

(3) l'opérateur i_X *est* $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$*-linéaire : pour tout* f *dans* $\mathrm{C}^\infty(M)$ *et tout* α *dans* $\Omega(M)$*, nous avons*

$$i_X(f\alpha) = f \; i_X \alpha \; .$$

Démonstration. La propriété de localité est immédiate par définition. Le reste de la démonstration découle facilement de la proposition 2.14 et de la définition de i_X. □

(3) **(Dérivée de Lie des formes différentielles)** Pour tout $X \in \Gamma(TM)$, la *dérivée de Lie* $\mathscr{L}_X$ par rapport à X est l'unique application linéaire graduée de degré 0 de $\Gamma(\Lambda^* T^* M)$ dans $\Gamma(\Lambda^* T^* M)$, telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $\alpha \in \Gamma(\Lambda^p T^* M)$, pour tous les $X_1, \ldots, X_p \in \Gamma(TM)$,

$$\mathscr{L}_X \alpha(X_1, \ldots, X_p) = X(\alpha(X_1, \ldots, X_p)) - \sum_{i=1}^{p} \alpha(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_p) \; . \qquad (\cdot 18 \cdot)$$

Il est facile de vérifier que le membre de droite est $\mathrm{C}^\infty(M)$-multilinéaire, donc définit bien par le lemme de tensorialité, un $(p, 0)$-tenseur $\mathscr{L}_X \alpha$, et que celui-ci est alterné, donc une p-forme différentielle sur M.

Le résultat suivant dit que cette définition de $\mathscr{L}_X$ redonne bien la définition usuelle de la dérivée de Lie des formes différentielles.

Proposition 2.30 *Pour tout champ de vecteurs* $X \in \Gamma(TM)$*, l'application* $\mathscr{L}_X$ *est l'unique application linéaire* $\Gamma(\Lambda^* T^* M)$ *dans* $\Gamma(\Lambda^* T^* M)$*, graduée de degré* 0*, telle que*

(1) $\mathscr{L}_X$ *coïncide sur* $\Gamma(\Lambda^0 T^* M) = \mathrm{C}^\infty(M)$ *avec la dérivation* $f \mapsto X(f)$ *;*

(2) pour tout $p \in \mathbb{N}$*, nous avons* $\mathscr{L}_X(\Gamma(\Lambda^p T^* M)) \subset \Gamma(\Lambda^p T^* M)$*, et* $\mathscr{L}_X$ *est une dérivation de l'algèbre* $\Gamma(\Lambda^* T^* M)$*, c'est-à-dire que pour tous les* α, β *dans* $\Gamma(\Lambda^* T^* M)$*, nous avons*

$$\mathscr{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathscr{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathscr{L}_X \beta) \; ;$$

(3) $\mathscr{L}_X$ *et* d *commutent, c'est-à-dire*

$$\mathscr{L}_X \circ d = d \circ \mathscr{L}_X \; .$$

De plus, l'opérateur $\mathscr{L}_X$ *vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Il est local, c'est-à-dire que pour tout ouvert U *de* M *et tout* α *dans* $\Gamma(\Lambda^* T^* M)$*, nous avons*

$$(\mathscr{L}_X \alpha)_{|U} = \mathscr{L}_{X_{|U}}(\alpha_{|U}) \; .$$

(ii) Pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$\mathscr{L}_{[X,Y]} = \mathscr{L}_X \circ \mathscr{L}_Y - \mathscr{L}_Y \circ \mathscr{L}_X \ .$$

(iii) Pour tout $X \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$\mathscr{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X \ .$$

(iv) Pour toute variété N de classe C^∞, pour tout C^∞-difféomorphisme local $\varphi : M \to N$, pour tout champ de vecteurs X de classe C^∞ sur N, et pour toute forme différentielle ω de classe C^∞ sur N, nous avons

$$\varphi^*(\mathscr{L}_X \omega) = \mathscr{L}_{\varphi^* X}(\varphi^* \omega) \ .$$

La formule $\mathscr{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X$, qui définit la dérivée de Lie à partir du produit intérieur et de la diffférentielle extérieure, est appelée la *formule de Cartan*. Nous verrons dans la démonstration qu'il suffit dans (3) de demander la condition $\mathscr{L}_X \circ d = d \circ \mathscr{L}_X$ sur les fonctions (c'est-à-dire sur les éléments de $\Gamma(\Lambda^0 T^* M) = \mathrm{C}^\infty(M)$).

Démonstration. L'unicité de la dérivée de Lie se montre exactement comme l'unicité de la différentielle extérieure, en montrant comme précédemment que tout point de x admet un voisinage sur lequel $\mathscr{L}_X \omega$ s'exprime sous la forme

$$\mathscr{L}_X \omega = \sum_I \mathscr{L}_X(f\omega_I)(d\mathscr{L}_X(f\varphi))_I \ ,$$

en utilisant la commutation de d et $\mathscr{L}_X$ sur les fonctions.

Montrons que l'opérateur $\mathscr{L}_X$ défini par la formule (· 18 ·) vérifie les assertions de cettte proposition.

Un calcul immédiat à partir des définitions donne que $\mathscr{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X$. [En effet, pour tous les $\alpha \in \Gamma(\Lambda^p T^* M)$ et $X_1, \ldots, X_p \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$\begin{aligned}
(i_X \circ d)\alpha(X_1, \ldots, X_p) &= d\alpha(X, X_1, \ldots, X_p) \\
&= X(\alpha(X_1, \ldots, X_p)) + \sum_{i=1}^p (-1)^i X_i(\alpha(X, X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_p)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^p (-1)^i \alpha([X, X_i], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_p) \\
&\quad + \sum_{1 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X, X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_p) \ .
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
(d \circ i_X)\alpha(X_1, \ldots, X_p) &= -\sum_{i=1}^p (-1)^i X_i(\alpha(X, X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_p)) \\
&\quad + \sum_{1 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \alpha(X, [X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_p) \ .
\end{aligned}$$

La somme de ces deux équations et la formule (· 18 ·) montrent la formule de Cartan.]

Comme $i_X f = 0$ si $f \in \Gamma(\Lambda^0 T^*M) = \mathrm{C}^\infty(M)$, l'application $\mathscr{L}_X$ coïncide bien avec la dérivation usuelle associée à X sur les fonctions. Il est immédiat, par les propriétés de d et de i_X, que $\mathscr{L}_X$ est une dérivation graduée de degré 0, c'est-à-dire qu'elle est linéaire, graduée de degré 0, et vérifie (2). Comme $d \circ d = 0$, nous avons bien

$$d \circ \mathscr{L}_X = d \circ i_X \circ d = \mathscr{L}_X \circ d \ .$$

Vérifions les propriétés supplémentaires, (iii) ayant déjà été vue. La propriété (i) découle des propriétés de localité de d et de i_X (ou de la propriété (iv) en considérant les applications d'inclusions). L'application $\mathscr{L}_X \circ \mathscr{L}_Y - \mathscr{L}_Y \circ \mathscr{L}_X$ est clairement linéaire, graduée de degré 0, et une dérivation de l'algèbre $\Gamma(\Lambda^* T^*M)$. De plus, par définition du crochet de champs de vecteurs, elle coïncide avec $\mathscr{L}_{[X,Y]}$ sur les fonctions. Elle commute clairement avec d, donc la propriété (ii) en découle par unicité.

Enfin, pour vérifier la propriété (iv), par localité, le problème se ramène au cas où φ est un C^∞-difféomorphisme. L'application $\varphi^* \circ \mathscr{L}_X \circ (\varphi^{-1})^*$ de $\Gamma(\Lambda^* T^*M)$ dans lui-même commute avec d, car la dérivée de Lie et l'image réciproque le font. C'est une dérivation graduée de degré 0 de $\Gamma(\Lambda^* T^*M)$, car $\mathscr{L}_X$ l'est sur $\Gamma(\Lambda^* T^*N)$ et φ^* est linéaire, graduée de degré 0, et vérifie $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^*\alpha) \wedge (\varphi^*\beta)$. Pour toute application f de classe C^∞, pour tout x dans M, nous avons, par le théorème de dérivation des fonctions composées,

$$\begin{aligned}\varphi^* \circ \mathscr{L}_X \circ (\varphi^{-1})^* f(x) &= T_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1})(X(\varphi(x))) = T_x f\big((T_x\varphi)^{-1}(X(\varphi(x)))\big) \\ &= \mathscr{L}_{\varphi^* X} f(x) \ .\end{aligned}$$

Donc la propriété (iv) en découle, par unicité. □

La dérivée de Lie $\mathscr{L}_X$ s'étend sur tous les tenseurs comme l'unique application linéaire de $\bigoplus_{s,t\in\mathbb{N}} \Gamma(T^t_s M)$ dans $\bigoplus_{s,t\in\mathbb{N}} \Gamma(T^t_s M)$ graduée de degrés 0 en s et en t, telle que

- pour tous les $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, $Y \in \Gamma(TM)$, $\alpha \in \Gamma(T^*M)$, nous avons

$$\mathscr{L}_X f = X(f) \quad \text{et} \quad \mathscr{L}_X Y = [X,Y] \quad \text{et} \quad (\mathscr{L}_X \alpha)Y = X(\alpha(Y)) - \alpha([X,Y])$$

- pour tous les $\sigma \in \Gamma(T^q_p M)$ et $\sigma' \in \Gamma(T^{q'}_{p'} M)$,

$$\mathscr{L}_X(\sigma \otimes \sigma') = \mathscr{L}_X(\sigma) \otimes \sigma' + \sigma \otimes \mathscr{L}_X(\sigma') \ .$$

Il est facile de vérifier que la formule (·18·) est satisfaite par tous les $(p,0)$-tenseurs $\alpha \in \Gamma(T^0_p M)$ (et pas seulement pour les alternés). En particulier, si g est un $(2,0)$-tenseur, alors, pour tous les $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

$$\mathscr{L}_X g(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g([X,Y],Z) - g(Y,[X,Z]) \ . \qquad (\cdot 19 \cdot)$$

Par la propriété d'unicité, pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\sigma \in \bigoplus_{s,t\in\mathbb{N}} \Gamma(T^t_s M)$, nous avons

$$\mathscr{L}_{[X,Y]}\sigma = \mathscr{L}_X(\mathscr{L}_Y \sigma) - \mathscr{L}_Y(\mathscr{L}_X \sigma) \ . \qquad (\cdot 20 \cdot)$$

Proposition 2.31 *Pour tout (s,t)-tenseur $\sigma \in \Gamma(T^t_s M)$ sur M, pour tout champ de vecteurs lisse $X \in \Gamma(TM)$ sur M de flot local $(\phi_t)_t$, nous avons*

$$\mathscr{L}_X \sigma = \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi_t^* \sigma \ .$$

Démonstration. Notons $\mathscr{L}'_X\sigma = \frac{d}{dt}_{|t=0}\phi_t^*\sigma$. Alors pour tous les $\sigma \in \Gamma(T_p^q M)$ et $\sigma' \in \Gamma(T_{p'}^{q'} M)$, puisque $(\phi_t)^*(\sigma \otimes \sigma') = ((\phi_t)^*\sigma) \otimes ((\phi_t)^*\sigma')$, nous avons

$$\mathscr{L}'_X(\sigma \otimes \sigma') = \mathscr{L}'_X(\sigma) \otimes \sigma' + \sigma \otimes \mathscr{L}'_X(\sigma') \ .$$

Pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, nous avons $\mathscr{L}'_X f = X(f)$ car $(\phi_t)^* f = f \circ \phi_t$ et par définition du flot local d'un champ de vecteurs. Pour tout $Y \in \Gamma(TM)$, nous avons $\mathscr{L}'_X Y = [X, Y]$ par les propriétés des champs de vecteurs que nous avons supposées connues (voir par exemple l'exercice E.5 (1) dans la partie 1.2.1 ou [Laf, Pau2]). Enfin, pour tout $\alpha \in \Gamma(T^*M)$, par définition des images réciproques des 1-formes différentielles (ou des tenseurs $(1, 0)$), nous avons

$$(\phi_t)^*\alpha\,(Y) = \alpha((\phi_{-t})^*Y) \circ \phi_t \ ,$$

donc $(\mathscr{L}'_X\alpha)Y = X(\alpha(Y)) - \alpha([X, Y])$. Par unicité, nous avons donc $\mathscr{L}'_X = \mathscr{L}_X$. □

(4) **(Produit extérieur de formes différentielles à valeurs dans des fibrés vectoriels)** Soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels sur M. Pour toute q-forme différentielle β sur M à valeurs dans ξ et pour toute p-forme différentielle α sur M à valeurs dans ξ', considérons l'application $(p+q)$-linéaire $\alpha \wedge \beta : \Gamma(TM)^{p+q} \to \Gamma(\xi' \otimes \xi)$ définie par

$$\alpha \wedge \beta\ (X_1, \ldots, X_{p+q}) = \sum_{s \in \mathfrak{S}(p,\,q)} \varepsilon_s\ \alpha(X_{s(1)}, \ldots, X_{s(p)}) \otimes \beta(X_{s(p+1)}, \ldots, X_{s(p+q)}) \ .$$

Cette application est $\mathrm{C}^\infty(M)$-multilinéaire, et alternée par le même argument que pour les formes différentielles usuelles, donc définit, par le lemme de tensorialité 2.24, une $(p+q)$-forme différentielle à valeurs dans $\xi' \otimes \xi$, que nous appellerons le *produit extérieur* de α et de β.

Maintenant, pour toute q-forme différentielle β sur M à valeurs dans ξ et pour toute p-forme différentielle α sur M à valeurs dans $\xi^* \otimes \xi = \mathrm{End}(\xi)$, considérons l'application $(p+q)$-linéaire $\alpha \wedge \beta : \Gamma(TM)^{p+q} \to \Gamma(\xi)$ définie par

$$\alpha \wedge \beta\ (X_1, \ldots, X_{p+q}) = \sum_{s \in \mathfrak{S}(p,\,q)} \varepsilon_s\ \alpha(X_{s(1)}, \ldots, X_{s(p)})\ \big(\beta(X_{s(p+1)}, \ldots, X_{s(p+q)})\big) \ .$$

Cette application est $\mathrm{C}^\infty(M)$-multilinéaire, et alternée par le même argument que pour les formes différentielles usuelles, donc définit, par le lemme de tensorialité 2.24, une $(p+q)$-forme différentielle à valeurs dans ξ, que nous appellerons encore par abus le *produit extérieur* de α et de β (c'est une contraction au sens ci-dessous du produit extérieur précédent).

(5) **(Contraction de tenseurs)** Soient $s, t \in \mathbb{N} - \{0\}$, $i_0 \in \{1, \ldots, s\}$ et $j_0 \in \{1, \ldots, t\}$. Rappelons que $T_s^t\xi = (\xi^*)^{\otimes s} \otimes \xi^{\otimes t}$ est le fibré des tenseurs (s, t) sur ξ. Rappelons que pour tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, la trace d'une application linéaire de E dans E^* est la trace de l'application bilinéaire correspondante de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$, ou encore, si $\mathscr{B}$ est n'importe quelle base de E de base duale $\mathscr{B}^*$, la trace de sa matrice dans les bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{B}^*$ de E^*.

Pour tout tenseur $u \in \Gamma(T_s^t\xi)$, l'application de $\Gamma(\xi)^{s-1} \times \Gamma(\xi^*)^{t-1}$ dans $\mathrm{C}^\infty(M)$, définie par

$$(\sigma_1, \ldots, \widehat{\sigma_{i_0}}, \ldots, \sigma_s, \ell_1, \ldots, \widehat{\ell_{j_0}}, \ldots, \ell_t) \mapsto \Big\{x \mapsto \mathrm{tr}\,\big\{v \in \xi_x \mapsto \{\ell \in \xi_x^* \mapsto$$
$$u_x(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_{i_0-1}(x), v, \sigma_{i_0+1}(x), \ldots, \sigma_s(x), \ell_1(x), \ldots, \ell_{j_0-1}(x), \ell, \ell_{j_0+1}(x), \ldots, \ell_t(x))\}\big\}\Big\} \ ,$$

étant $\mathrm{C}^\infty(M)$-multilinéaire, définit (par le lemme de tensorialité 2.24) un tenseur $c_{i_0}^{j_0} u \in \Gamma(T_{s-1}^{t-1}\xi)$, dit *contraction du tenseur* u en (i_0, j_0). L'application $c_{i_0}^{j_0} : \Gamma(T_s^t\xi) \to \Gamma(T_{s-1}^{t-1}\xi)$ ainsi définie est un morphisme de $\mathrm{C}^\infty(M)$-modules. Nous retrouvons ainsi la notion introduite dans la partie 2.2.3.

Par exemple, si $s = t = 1$, le morphisme c_1^1 est le morphisme de $\mathrm{C}^\infty(M)$-modules de $\Gamma(\xi^* \otimes \xi) = \Gamma(\mathrm{End}(\xi))$ dans $\mathrm{C}^\infty(M)$ défini par $u \mapsto \mathrm{trace}(u)$, où $\mathrm{trace}(u) : M \to \mathbb{R}$ associe à $x \in M$ la trace de l'endomorphisme linéaire $u(x) \in \mathrm{End}(\xi_x)$ de la fibre ξ_x de ξ au-dessus de x.

2.3.2 Dérivations covariantes

Soit ξ un fibré vectoriel, de projection $p : E \to M$.

Définition 2.32 *Une connexion sur ξ est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)$, notée $(X, \sigma) \mapsto \nabla_X \sigma$, telle que, pour tout champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$, pour toute section $\sigma \in \Gamma(\xi)$ et toute fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, nous ayons*

- $\nabla_{fX}\sigma = f\nabla_X\sigma$,
- $\nabla_X(f\sigma) = X(f)\,\sigma + f\nabla_X\sigma$.

D'autres terminologies utilisées sont celles de *dérivation covariante*, *connexion au sens de Koszul*, *connexion affine*, *connexion linéaire*. Nous renvoyons à [KN, Chap. III] pour une présentation différente des connexions sur un fibré vectoriel, expliquant en particulier l'existence des deux terminologies de connexion affine et connexion linéaire. Une connexion sur le fibré tangent TM de M est appelée une *connexion* sur M.

Exemples. (1) **(Connexion triviale)** Si ξ est le fibré vectoriel trivial sur M de fibre un espace vectoriel F, alors il existe une et une seule connexion ∇^0 sur ξ, appelée la *connexion triviale*, telle que pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et pour toute section lisse $\sigma : M \to M \times F$ de seconde composante constante, nous ayons $\nabla_X^0 \sigma = 0$.

L'unicité vient du second axiome des connexions et du fait que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de F, alors les sections $x \mapsto (x, e_i)$ forment une base du $\mathrm{C}^\infty(M)$-module $\Gamma(\xi)$. Pour l'existence, puisque $\Gamma(\xi)$ s'identifie avec $\mathrm{C}^\infty(M; F)$ et puisque $T_yF = F$ pour tout $y \in F$, l'application

$$(X, \sigma) \mapsto \{x \mapsto d_x\sigma(X(x))\}$$

convient.

(2) **(Connexion produit)** Soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels de projections $p : E \to M$ et $p' : E' \to M'$, munis de connexions ∇ et ∇' respectivement. En rappelant que l'espace total du fibré vectoriel produit $\xi \times \xi'$ est $E \times E'$, si σ, σ' sont deux sections de ξ et ξ' respectivement, nous noterons $\sigma + \sigma'$ la section de $\xi \times \xi'$ définie par $(x, x') \mapsto (\sigma(x), \sigma'(x'))$.

Proposition 2.33 *Il existe une et une seule connexion $\nabla \times \nabla'$ sur le fibré vectoriel produit $\xi \times \xi'$ telle que, pour tous les $X \in \Gamma(TM)$, $X' \in \Gamma(TM')$, $\sigma \in \Gamma(\xi)$ et $\sigma' \in \Gamma(\xi')$, nous ayons*

$$(\nabla \times \nabla')_{X+X'}(\sigma + \sigma') = \nabla_X\sigma + \nabla'_{X'}\sigma' \ .$$

Cette connexion $\nabla \times \nabla'$ sera appelée la *connexion produit* sur le fibré vectoriel produit $\xi \times \xi'$.

La démonstration est facile, mais n'est pas immédiate, car l'inclusion de $\Gamma(\xi)+\Gamma(\xi')$ dans $\Gamma(\xi\times\xi')$ est en général stricte : les sections de $\xi\times\xi'$ ne sont pas toutes de la forme $\sigma+\sigma'$ avec $\sigma\in\Gamma(\xi)$ et $\sigma'\in\Gamma(\xi')$, si les rangs de ξ et ξ' sont non nuls. En particulier, même si $T(M+M')=TM\times TM'$, l'ensemble $\Gamma(TM)+\Gamma(TM')$ des champs de vecteurs produits est strictement contenu dans $\Gamma(T(M\times M'))$ si M et M' sont de dimension non nulle.

Démonstration. Pour tout $(x,x')\in M\times M'$, notons U un ouvert distingué de ξ contenant x, et $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ une base du $\mathrm{C}^\infty(U)$-module libre $\Gamma(\xi_{|U})$ des sections lisses de ξ au-dessus de U (qui existe par trivialisation locale), ainsi que U' un ouvert distingué de ξ' contenant x', et $\sigma'_1,\dots,\sigma'_{n'}$ une base du $\mathrm{C}^\infty(U')$-module libre $\Gamma({\xi'}_{|U'})$. En notant $\mathrm{pr}:M\times M'\to M$ et $\mathrm{pr}':M\times M'\to M'$ les deux projections canoniques, et 0 les sections nulles de ξ et de ξ', notons que

$$\sigma_1\circ\mathrm{pr}+0,\ \dots,\ \sigma_n\circ\mathrm{pr}_1+0,\ 0+\sigma'_1\circ\mathrm{pr}',\ \dots,\ 0+\sigma'_{n'}\circ\mathrm{pr}'$$

est alors une base du $\mathrm{C}^\infty(U\times U')$-module libre $\Gamma((\xi\times\xi')_{|U\times U'})$. En particulier, pour toute section lisse τ de $\xi\times\xi'$, il existe $f_1,\dots,f_n,f'_1,\dots,f'_{n'}\in\mathrm{C}^\infty(U\times U')$ uniques telles que

$$\tau:(x,x')\mapsto\Big(\sum_{i=1}^n f_i(x,x')\,\sigma_i(x),\sum_{i=1}^{n'} f'_i(x,x')\,\sigma'_i(x')\Big)\ .$$

Si $Z:(y,y')\mapsto(Y(y,y'),Y'(y,y'))$ est un champ de vecteurs lisses sur $M\times M'$, en notant $Y(\cdot,x'):y\mapsto Y(y,x')\in\Gamma(TM)$ et $Y'(x,\cdot):Y'\mapsto Y(x,y')\in\Gamma(TM')$, posons

$$\begin{aligned}(\nabla\times\nabla')_Z\tau(x,x')=\Big(&\sum_{i=1}^n Y(f_i)(x,x')\,\sigma_i(x)+f_i(x,x')\,\nabla_{X(\cdot,x')}\sigma_i\,(x),\\&\sum_{i=1}^{n'} Y(f'_i)(x,x')\,\sigma'_i(x')+f'_i(x,x')\,\nabla'_{X'(x,\cdot)}\sigma'_i(x')\Big)\ .\end{aligned}$$

Par les propriétés de connexions de ∇ et ∇', il est facile de vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de $\sigma_1,\dots,\sigma_n,\sigma'_1,\dots,\sigma'_{n'},U,U'$. En particulier, $(\nabla\times\nabla')_Y\sigma$ est bien une section lisse de $\xi\times\xi'$. Il est facile de vérifier que si $Z=X+X'$ et $\tau=\sigma+\sigma'$ avec $X\in\Gamma(TM)$, $X'\in\Gamma(TM')$, $\sigma\in\Gamma(\xi)$ et $\sigma'\in\Gamma(\xi')$, alors $(\nabla\times\nabla')_Z\tau$ coïncide avec la formule donnée dans l'énoncé de la proposition, et c'est la seule possible, par les propriétés des connexions.

Enfin, il est immédiat que de vérifier que $(\nabla\times\nabla')_Z\tau$ est linéaire en τ et Z, qu'il est $\mathrm{C}^\infty(M\times M')$-linéaire en Z et que c'est une $\mathrm{C}^\infty(M\times M')$-dérivation en τ. Donc $\nabla\times\nabla'$ est bien une connexion. □

(3) **(Connexion duale, connexion somme, connexion produit tensoriel)** Soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels sur M, munis de connexions ∇ et ∇' respectivement. Alors les fibrés vectoriels $\xi^*,\xi\oplus\xi',\xi\otimes\xi'$ sont munis de connexions $\nabla^*,\nabla\oplus\nabla',\nabla\otimes\nabla'$, appelées respectivement *connexion duale, connexion somme, connexion produit tensoriel*, définies (en utilisant le lemme de tensorialité 2.24) respectivement en demandant que pour tous les $\sigma\in\Gamma(\xi),\sigma'\in\Gamma(\xi')$, $\ell\in\Gamma(\xi^*)$ et $X\in\Gamma(TM)$, en notant $\ell(\sigma)$ l'élément de $\mathrm{C}^\infty(M)$ défini par $x\mapsto\ell(x)\big(\sigma(x)\big)$, nous ayons

$$(\nabla^*_X\ell)(\sigma)=X(\ell(\sigma))-\ell(\nabla_X\sigma)\ ,$$

$$(\nabla \oplus \nabla')_X(\sigma \oplus \sigma') = \nabla_X \sigma \oplus \nabla'_X \sigma' \ ,$$
$$(\nabla \otimes \nabla')_X(\sigma \otimes \sigma') = \nabla_X \sigma \otimes \sigma' + \sigma \otimes \nabla'_X \sigma' \ .$$

Par convention, si $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, nous poserons $\nabla_X f = X(f)$.

Par récurrence, une connexion ∇ sur un fibré vectoriel ξ sur M définit donc une connexion $(\nabla^*)^{\otimes s} \otimes \nabla^{\otimes t}$, encore notée ∇, sur chaque fibré tensoriel $T^t_s\xi = (\xi^*)^{\otimes s} \otimes \xi^{\otimes t}$. En notant

$$\mathscr{T}^*_*\xi = \bigoplus_{s,t\in\mathbb{N}} \Gamma(T^t_s\xi)$$

le $\mathrm{C}^\infty(M)$-module de tous les tenseurs sur ξ, les propriétés de ces extensions de ∇ sont récapitulées dans la proposition élémentaire suivante.

Proposition 2.34 *Pour toute connexion ∇ sur ξ et tout champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$, il existe une et une seule application linéaire $\nabla_X : \mathscr{T}^*_*\xi \to \mathscr{T}^*_*\xi$,*

- *préservant le type des tenseurs (c'est-à-dire $\nabla_X(\Gamma(T^t_s\xi)) \subset \Gamma(T^t_s\xi)$ pour tous les $s, t \in \mathbb{N}$),*
- *commutant avec les contractions (c'est-à-dire $\nabla_X \circ c^{j_0}_{i_0} = c^{j_0}_{i_0} \circ \nabla_X$ pour tous les $i_0 \in \{1, \dots, s\}$ et $j_0 \in \{1, \dots, t\}$),*
- *étendant $f \mapsto X(f)$ sur $\Gamma(T^0_0\xi) = \mathrm{C}^\infty(M)$ et $\nabla_X : \sigma \mapsto \nabla_X\sigma$ sur $\Gamma(T^1_0\xi) = \Gamma(\xi)$*
- *qui vérifie la propriété de dérivation par rapport au produit tensoriel, c'est-à-dire que pour tous les $\sigma \in \Gamma(T^q_p M)$ et $\sigma' \in \Gamma(T^{q'}_{p'} M)$,*

$$\nabla_X(\sigma \otimes \sigma') = \nabla_X(\sigma) \otimes \sigma' + \sigma \otimes \nabla_X(\sigma') \ . \quad \square$$

Pour tout $\ell \in \Gamma(\xi^*)$, la formule pour la section $\nabla_X \ell$ (que nous avions notée $\nabla^*_X \ell$ ci-dessus) se retrouve en appliquant, pour tout $\sigma \in \Gamma(\xi)$, la propriété de dérivation $\nabla_X(\ell \otimes \sigma) = (\nabla_X \ell) \otimes \sigma + \ell \otimes (\nabla_X \sigma)$ et en contractant.

Par exemple, si ∇ est une connexion sur M, alors

- si ω est un tenseur $(m, 0)$ sur M, comme par exemple une m-forme différentielle sur M, alors pour tous les $X_1, \dots, X_m \in \Gamma(TM)$, en appliquant la propriété de dérivation

$$\begin{aligned} &\nabla_X(\omega \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_m) \\ &= \nabla_X\omega \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_m + \sum_{i=1}^m \omega \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_{i-1} \otimes \nabla_X X_i \otimes X_{i+1} \otimes \cdots \otimes X_m \end{aligned}$$

et en contractant, nous avons

$$\begin{aligned} &(\nabla_X\omega)(X_1, \dots, X_m) \\ &= X(\omega(X_1, \dots, X_m)) - \sum_{i=1}^m \omega(X_1, \dots, X_{i-1}, \nabla_X X_i, X_{i+1}, \dots, X_m) \ ; \end{aligned} \qquad (\cdot 21 \cdot)$$

- si R est un tenseur $(m, 1)$ sur M, alors pour tous les $X_1, \dots, X_m \in \Gamma(TM)$, nous avons de même

$$(\nabla_X R)(X_1, \dots, X_m) = \nabla_X(R(X_1, \dots, X_m)) - \sum_{i=1}^m R(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_m) \ . \quad (\cdot 22 \cdot)$$

Il est important de ne pas omettre certaines parenthèses pour ne pas commettre d'erreurs (tout en évitant les parenthèses inutiles qui gènent la lecture, l'équilibre entre rigueur et lisibilité est parfois délicat !).

Exercice E.33 *Soit ∇ une connexion sur ξ. Montrer que la connexion induite par ∇ sur le fibré vectoriel* $\mathrm{End}(\xi)$ *est l'unique connexion encore notée ∇ telle que pour tous les $u \in \Gamma(\mathrm{End}(\xi))$, $\sigma \in \Gamma(\xi)$ et $X \in \Gamma(TM)$,*

$$(\nabla_X u)\sigma = \nabla_X(u(\sigma)) - u(\nabla_X \sigma) \ ,$$

où $u'(\sigma') : x \mapsto u'(x)(\sigma'(x))$ pour tous les $u' \in \Gamma(\mathrm{End}(\xi))$ et $\sigma' \in \Gamma(\xi)$.

Lemme 2.35 *Soit ∇ une connexion sur ξ. Pour tous les $\sigma \in \Gamma(\xi)$, $X \in \Gamma(TM)$ et $x \in M$, la valeur de $\nabla_X \sigma$ en x ne dépend que des valeurs de X en x, de σ en x et de $T_x\sigma$ en $X(x)$.*

Démonstration. Soit $\sigma \in \Gamma(\xi)$. L'application de $\Gamma(TM)$ dans $\Gamma(\xi)$ définie par $X \mapsto \nabla_X \sigma$ est $\mathrm{C}^\infty(M)$-linéaire. Donc $\nabla_X \sigma(x)$ ne dépend que de $X(x)$ par le lemme de tensorialité 2.24 (plus précisément par son sous-lemme 2.25).

Soit $\sigma' \in \Gamma(\xi)$ telle que $\sigma'(x) = \sigma(x)$ et $T_x\sigma'(X(x)) = T_x\sigma(X(x))$. Montrons, en suivant la démonstration du lemme 2.25, que $\nabla_X \sigma'(x) = \nabla_X \sigma(x)$, ce qui conclut.

Si σ et σ' coïncident de plus sur un voisinage U de x, soit $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ à support compact contenu dans U et valant 1 sur un voisinage de x, de sorte que $X(f)(x) = 0$. Alors

$$\nabla_X \sigma'(x) = \nabla_X(f\sigma')(x) = \nabla_X(f\sigma)(x) = \nabla_X \sigma(x) \ .$$

En notant n le rang de ξ, montrons qu'il existe $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(\xi)$ et $f_1 \dots, f_n \in \mathrm{C}^\infty(M)$ telles que $f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0$, $X(f_1)(x) = \cdots = X(f_n)(x) = 0$ et σ' coïncide avec $\sigma + \sum_{i=1}^n f_i s_i$ sur un voisinage de x.

Pour cela, soit U un voisinage ouvert de x au-dessus duquel ξ est trivialisable, soit $(s'_1, \dots, s'_n)$ une base du $\mathrm{C}^\infty(U)$-module $\Gamma(\xi_{|U})$ telle que $T_x s'_i = 0$ pour tout $x \in U$ et $1 \le i \le n$, soient $f'_1, \dots, f'_n \in \mathrm{C}^\infty(U)$ tels que $(\sigma' - \sigma)_{|U} = \sum_{i=1}^n f'_i s'_i$, et soit $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(M)$ à support compact contenu dans U, valant 1 sur un voisinage de x. Posons $f_i = \varphi f'_i$ et $s_i = \varphi s'_i$ (prolongés par 0 en dehors de U). Puisque $\sigma'(x) = \sigma(x)$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons $f_i(x) = 0$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons $X(f_i)(x) = T_x f_i(X(x)) = T_x f'_i(X(x))$. De plus,

$$\sum_{1 \le i \le n} T_x f'_i(X(x)) s'_i(x) = T_x\Big(\sum_{1 \le i \le n} f'_i s'_i\Big)(X(x)) = T_x(\sigma - \sigma')(X(x)) = 0 \ .$$

Comme $(s'_1(x), \dots, s'_n(x))$ est une base de ξ_x, ceci montre le résultat voulu.

Maintenant, par ce qui précède,

$$\begin{aligned}\nabla_X \sigma'(x) &= \nabla_X\big(\sigma + \sum_{1 \le i \le n} f_i s_i\big)(x) \\ &= \nabla_X \sigma(x) + \sum_{1 \le i \le n} X(f_i)(x)\, s_i(x) + f_i(x) \nabla_X s_i(x) = \nabla_X \sigma(x) \ . \quad \square\end{aligned}$$

Remarques. Soit ∇ une connexion sur ξ.

(1) Soient $x \in M$ et $v \in T_x M$. Par le lemme 2.26, il existe un champ de vecteurs lisse X sur M tel que $X(x) = v$. Pour tout $\sigma \in \Gamma(\xi)$, nous poserons $\nabla_v \sigma(x) = \nabla_X \sigma(x)$, ce qui ne dépend pas du choix d'un tel X par le lemme 2.35. L'application $v \mapsto \nabla_v \sigma(x)$ de $T_x M$ dans ξ_x est linéaire.

(2) **Sections parallèles.** Pour tout $\sigma \in \Gamma(\xi)$, par le lemme de tensorialité 2.24, l'application $\nabla\sigma : \Gamma(TM) \to \Gamma(\xi)$ définie par $X \mapsto \nabla_X\sigma$ est une section lisse du fibré $T^*M \otimes \xi$, c'est-à-dire une 1-forme différentielle à valeurs dans ξ.

Une section lisse σ de ξ sera dite *parallèle* pour ∇ si

$$\nabla\sigma = 0 \ ,$$

c'est-à-dire si $\nabla_X\sigma = 0$ pour tout $X \in \Gamma(TM)$. Si $\sigma \in \Gamma((\xi^*)^{\otimes s} \otimes \xi^{\otimes t})$ est un tenseur (s,t) à valeurs dans ξ, nous dirons que σ est *parallèle* pour ∇ s'il est parallèle pour la connexion définie par ∇ sur le fibré vectoriel produit tensoriel $(\xi^*)^{\otimes s} \otimes \xi^{\otimes t}$.

(3) **Connexion restreinte.** Pour tous les $x \in M$ et $X \in \Gamma(TM)$, nous avons vu que la valeur de $\nabla_X\sigma(x)$ ne dépend que des valeurs de σ sur un voisinage de x. En particulier, si U est un ouvert de M, il existe une et une seule connexion $\nabla_{|U}$, appelée *connexion restreinte à* U, sur le fibré vectoriel $\xi_{|U}$ sur U (de projection $p_{|p^{-1}(U)}$) telle que, pour tous les $\sigma \in \Gamma(\xi)$ et $X \in \Gamma(TM)$,

$$(\nabla_{|U})_{X_{|U}}\sigma_{|U} = (\nabla_X\sigma)_{|U} \ .$$

En effet, pour tout $x \in U$, si f est une fonction C^∞ valant 1 sur un voisinage de x, nulle en dehors de U, il suffit de poser, pour tous les $\sigma \in \Gamma(\xi_{|U})$ et $X \in \Gamma(TU)$,

$$(\nabla_{|U})_X\sigma = \nabla_{fX}(f\sigma)(x) \ ,$$

où les sections locales fX et $f\sigma$ sont étendues par 0 en dehors de U. Si $i : U \to M$ est l'inclusion, notons que $\nabla_{|U}$ n'est pas autre chose que la connexion image réciproque $i^*\nabla$ sur le fibré image réciproque $i^*\xi = \xi_{|U}$.

(4) **Crochet de connexions.** Pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$, notons $[\nabla_X, \nabla_Y]$ l'application de $\Gamma(\xi)$ dans $\Gamma(\xi)$ définie par

$$[\nabla_X, \nabla_Y]\sigma = \nabla_X(\nabla_Y\sigma) - \nabla_Y(\nabla_X\sigma) \ .$$

Un petit calcul montre que, pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$,

$$[\nabla_X, \nabla_Y](f\sigma) = ([X,Y]f)\sigma + f[\nabla_X, \nabla_Y]\sigma \ . \qquad (\cdot 23 \cdot)$$

(5) **Structure d'espace affine sur l'ensemble des connexions.** Il est important de remarquer que l'application nulle de $\Gamma(TM) \times \Gamma(\xi)$ dans $\Gamma(\xi)$ n'est pas une connexion (si la dimension de M et le rang de ξ sont non nuls), et que la somme de deux connexions n'est en général pas une connexion : l'ensemble des connexions n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\Gamma(TM) \times \Gamma(\xi)$ dans $\Gamma(\xi)$.

Par contre, l'ensemble des connexions sur ξ admet une structure d'espace affine sur l'espace vectoriel $\Gamma(T^*M \otimes \xi^* \otimes \xi)$. En effet, si ∇ et ∇' sont deux connexions, alors $\nabla - \nabla' : \Gamma(TM) \times \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)$ est une application $\mathrm{C}^\infty(M)$-bilinéaire. Elle définit donc, par le lemme de tensorialité 2.24, une section lisse $A \in \Gamma(T^*M \otimes \xi^* \otimes \xi) = \Gamma(\mathscr{L}(TM, \xi; \xi))$ telle que pour tous les $X \in \Gamma(TM)$ et $\sigma \in \Gamma(\xi)$, nous ayons

$$\nabla_X\sigma - \nabla'_X\sigma = A(X, \sigma) \ .$$

Réciproquement, il est immédiat de montrer que pour toute connexion ∇ sur ξ et tout $A \in \Gamma(T^*M \otimes \xi^* \otimes \xi) = \Gamma(\mathscr{L}(TM, \xi; \xi)) = \Gamma(\mathscr{L}(TM; \xi^* \otimes \xi))$, l'application $(X, \sigma) \mapsto \nabla_X \sigma + A(X, \sigma)$ est une connexion sur ξ. Notons que A est une 1-forme différentielle sur M à valeurs dans $\xi^* \otimes \xi = \mathrm{End}(\xi)$.

Par exemple, si ξ est le fibré tangent de M, alors la différence de deux connexions sur ξ est une section de $(TM^*)^{\otimes 2} \otimes TM$, donc un tenseur $(2, 1)$ sur M, ou de manière équivalente une 1-forme différentielle à valeurs dans $\mathrm{End}(TM)$.

En particulier, les connexions vérifient la propriété suivante de stabilité par barycentre : pour tous les $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{C}^\infty(M)$, pour toutes les connexions $\nabla_1, \ldots, \nabla_n$ sur ξ, si $\sum_{i=1}^n f_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^n f_i \nabla_i$ est une connexion sur ξ.

(6) **Expression en coordonnées locales d'une connexion.** Soit $\phi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ une trivialisation locale de ξ au-dessus de U. Sur le fibré vectoriel $\xi_{|U}$, nous avons deux connexions,

- la connexion $\phi^* \nabla^0$, image réciproque par ϕ de la connexion triviale sur le fibré trivial de fibre $\mathbb{R}^n$ sur U,
- la connexion restreinte $\nabla_{|U}$.

Par la remarque (5), la différence $\Gamma = \nabla_{|U} - \phi^* \nabla^0$ de ces connexions est donc une section lisse du fibré vectoriel $T^*U \otimes \xi^*_{|U} \otimes \xi_{|U}$, appelée le *tenseur de Christoffel* de ∇ dans la trivialisation locale ϕ.

Soient (U, φ) une carte locale de M à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $(e_i)_{1 \le i \le m}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et $\big(\frac{\partial}{\partial x^i} : x \mapsto (T_x \varphi)^{-1}(e_i)\big)_{1 \le i \le m}$ la base correspondante du $\mathrm{C}^\infty(U)$-module $\Gamma(TU)$. Soient $(e_\alpha)_{1 \le \alpha \le n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\big(\varepsilon_\alpha : x \mapsto \phi^{-1}(x, e_\alpha)\big)_{1 \le \alpha \le n}$ la base correspondante du $\mathrm{C}^\infty(U)$-module $\Gamma(\xi_{|U})$. Posons

$$\Gamma(\frac{\partial}{\partial x^i}, \varepsilon_\alpha) = \sum_{1 \le \beta \le n} \Gamma^\beta_{i,\alpha}\, \varepsilon_\beta \ .$$

Les applications $\Gamma^\beta_{i,\alpha} \in \mathrm{C}^\infty(U)$ sont appelées les *coefficients (ou symboles) de Christoffel* de ∇ dans la trivialisation locale ϕ et la carte locale (U, φ). En développant, nous avons donc la formule suivante, qu'il n'est pas nécessaire de retenir

$$\begin{aligned} &\nabla_{(\sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i})} \Big(\sum_{\alpha=1}^n \sigma^\alpha \varepsilon_\alpha \Big) \\ &= \sum_{1 \le i \le m,\, 1 \le \alpha \le n} X^i \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^i}\, \varepsilon_\alpha + \sum_{1 \le i \le m,\, 1 \le \alpha, \beta \le n} \Gamma^\beta_{i,\alpha}\, X^i\, \sigma^\alpha\, \varepsilon_\beta \ . \end{aligned} \tag{$\cdot 24 \cdot$}$$

2.3.3 Connexions images réciproques

Soient ξ et ξ' des fibrés vectoriels sur M et M', de projection $p : E \to M$ et $p' : E' \to M'$ respectivement. Soit (ϕ, f) un morphisme de fibrés vectoriels de ξ sur ξ' tel que pour tout $x \in M$, l'application $\phi_x = \phi_{|\xi_x} : \xi_x \to \xi'_{f(x)}$ soit un isomorphisme linéaire.

Lorsque ξ et ξ' sont les fibrés tangents de M et M' et $\phi = Tf$, cette condition est équivalente à demander que f soit un C^∞-difféomorphisme local, par le théorème d'inversion locale.

Remarquons qu'en particulier, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array},$$

et que si U' est un ouvert de M' au-dessus duquel ξ' est trivialisable, alors ξ est trivialisable au-dessus de l'ouvert $f^{-1}(U')$: en effet, si $\psi : (p')^{-1}(U') \to U' \times \mathbb{R}^n$ est une trivialisation de ξ' au-desus de U', alors l'application de $p^{-1}(f^{-1}(U'))$ dans $f^{-1}(U') \times \mathbb{R}^n$ définie par $v \mapsto (p(v), \mathrm{pr}_2 \circ \psi \circ \phi(v))$ est une trivialisation de ξ au-dessus de $f^{-1}(U')$.

Proposition 2.36 *Pour toute connexion ∇' sur ξ', il existe une et une seule connexion $\phi^*\nabla'$ sur ξ telle que pour toutes les sections $\sigma \in \Gamma(\xi)$ et $\sigma' \in \Gamma(\xi')$ telles que $\phi \circ \sigma = \sigma' \circ f$, pour tout $x \in M$,*

$$(\phi^*\nabla')_X \sigma\ (x) = {\phi_x}^{-1}\big(\nabla'_{T_x f(X(x))}\sigma'\ (f(x))\big)\ .$$

Nous appellerons $\phi^*\nabla'$ la *connexion image réciproque* de ∇' par ϕ.

Démonstration. Soit U' un ouvert de M' tel qu'il existe $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n \in \Gamma(\xi')$ telles que $(\sigma'_{1|U'}, \ldots, \sigma'_{n|U'})$ soit une base du $\mathrm{C}^\infty(U')$-module $\Gamma(\xi'_{|U'})$. Pour $1 \leq i \leq n$, notons

$$\sigma_i : x \mapsto \phi_x^{-1}\big(\sigma'_i(f(x))\big)\ ,$$

qui est une section lisse de ξ, telle que $\phi \circ \sigma_i = \sigma'_i \circ f$. De plus, il est immédiat que $(\sigma_{1|f^{-1}(U')}, \ldots, \sigma_{n|f^{-1}(U')})$ est une base du $\mathrm{C}^\infty(f^{-1}(U'))$-module $\Gamma(\xi_{|f^{-1}(U')})$.

Soient $\sigma \in \Gamma(\xi)$ et $X \in \Gamma(TM)$. Soient $g_i = g_i^\sigma \in \mathrm{C}^\infty(f^{-1}(U'))$ pour $1 \leq i \leq n$ tels que $\sigma = \sum_{i=1}^n g_i\ \sigma_i$ en tout point de $f^{-1}(U')$. Notons que les g_i dépendent linéairement de σ : pour tous les $g \in \mathrm{C}^\infty(M)$ et $\tau \in \Gamma(\xi)$, nous avons

$$g_i^{\sigma+g\tau} = g_i^\sigma + g_{|f^{-1}(U')}\, g_i^\tau\ . \qquad (\cdot 25 \cdot)$$

Si $\phi^*\nabla$ est une connexion sur ξ vérifiant la propriété de l'énoncé de la proposition 2.36, alors, en tout point x de $f^{-1}(U')$,

$$\begin{aligned}(\phi^*\nabla)_X \sigma\ (x) &= \sum_{i=1}^n X(g_i)(x)\ \sigma_i(x) + g_i(x)\ (\phi^*\nabla)_X \sigma_i\ (x) \\ &= \sum_{i=1}^n X(g_i)(x)\ \sigma_i(x) + g_i(x)\ {\phi_x}^{-1}\big(\nabla'_{T_x f(X(x))}\sigma'_i\ (f(x))\big)\ . \qquad (\cdot 26 \cdot)\end{aligned}$$

En particulier, la section $(\phi^*\nabla)_X\sigma$ est uniquement déterminée (puisque les ouverts $f^{-1}(U')$ avec U' comme ci-dessus recouvrent M). Réciproquement, en utilisant la formule $(\cdot 25 \cdot)$, il est immédiat de vérifier que l'expression $(\cdot 26 \cdot)$ définit une connexion sur la restriction de ξ à $f^{-1}(U')$. Montrons qu'elle ne dépend pas des choix effectués ci-dessus.

Soit V' un ouvert de M' tel qu'il existe $\tau'_1, \ldots, \tau'_n \in \Gamma(\xi')$ telles que $(\tau'_{1|U'}, \ldots, \tau'_{n|U'})$ soit une base du $\mathrm{C}^\infty(U')$-module $\Gamma(\xi'_{|U'})$. Pour $1 \leq i, j \leq n$, soit $h_{ij} \in \mathrm{C}^\infty(U' \cap V')$ telles que $\sigma'_i = \sum_{j=1}^n h_{ij}\ \tau'_j$ en tout point de $U' \cap V'$. Notons $\tau_i : x \mapsto \phi_x^{-1}\big(\tau'_i(f(x))\big)$ pour $1 \leq i \leq n$,

de sorte que $\sigma_i = \sum_{j=1}^n h_{ij} \circ f \ \tau_j$ et que $\sigma = \sum_{j=1}^n \big(\sum_{i=1}^n g_i \, h_{ij} \circ f \big) \ \tau_j$ en tout point de $f^{-1}(U' \cap V')$. Pour tout $x \in f^{-1}(U') \cap f^{-1}(V')$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n X(g_i)(x) \ \sigma_i \ (x) + g_i(x) \ {\phi_x}^{-1}\big(\nabla'_{T_x f(X(x))} \sigma'_i \ (f(x))\big) \\
&= \sum_{i=1}^n X(g_i)(x) \ \sum_{j=1}^n h_{ij} \circ f(x) \ \tau_j(x) + g_i(x) \ {\phi_x}^{-1}\big(\nabla'_{T_x f(X(x))} (\sum_{j=1}^n h_{ij} \ \tau'_j) \ (f(x))\big) \\
&= \sum_{i,j=1}^n X(g_i)(x) \, h_{ij} \circ f(x) \ \tau_j(x) + g_i(x) \, T_{f(x)} h_{ij}(T_x f(X(x))) \ {\phi_x}^{-1} \tau'_j(f(x)) \\
&\qquad + g_i(x) \, h_{ij}(f(x)) \ {\phi_x}^{-1}\big(\nabla'_{T_x f(X(x))} \tau'_i \ (f(x))\big) \\
&= \sum_{j=1}^n X\big(\sum_{i=1}^n g_i \, h_{ij} \circ f\big)(x) \ \tau_j(x) + \big(\sum_{i=1}^n g_i \, h_{ij} \circ f\big)(x) \ {\phi_x}^{-1}\big(\nabla'_{T_x f(X(x))} \tau'_i \ (f(x))\big) \ ,
\end{aligned}$$

ce qui montre bien l'indépendance des choix. Puisque les ouverts $f^{-1}(U')$ avec U' comme ci-dessus recouvrent M, et puisque les propriétés des connexions se vérifient localement, nous avons définit une connexion $\phi^* \nabla$ sur ξ.

Montrons que la connexion ainsi construite vérifie bien la propriété demandée dans la proposition 2.36. Soient $\sigma \in \Gamma(\xi)$ et $\sigma' \in \Gamma(\xi')$ telles que $\phi \circ \sigma = \sigma' \circ f$. Soient $g'_i \in \mathrm{C}^\infty(U')$ pour $1 \leq i \leq n$ tels que $\sigma' = \sum_{i=1}^n g'_i \ \sigma'_i$ en tout point de U'. Alors $\sigma = \sum_{i=1}^n g'_i \circ f \ \sigma_i$ en tout point de $f^{-1}(U')$. Comme dans le calcul ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}
(\phi^* \nabla)_X \sigma \ (x) &= \sum_{i=1}^n X(g'_i \circ f)(x) \ \sigma_i \ (x) + g'_i \circ f(x) \ {\phi_x}^{-1}\big(\nabla'_{T_x f(X(x))} \sigma'_i \ (f(x))\big) \\
&= {\phi_x}^{-1}\big(\sum_{i=1}^n T_{f(x)} g'_i(T_x f(X(x))) \ \sigma'_i \ (f(x)) + g'_i(f(x)) \ \nabla'_{T_x f(X(x))} \sigma'_i \ (f(x))\big) \\
&= {\phi_x}^{-1}\big(\nabla'_{T_x f(X(x))} (\sum_{i=1}^n g'_i \sigma'_i) \ (f(x))\big) = {\phi_x}^{-1}\big(\nabla'_{T_x f(X(x))} \sigma' \ (f(x))\big) \ .
\end{aligned}$$

Le résultat en découle. □

Remarque. Si f est une immersion, pour toute connexion ∇' sur ξ', pour tous les $X \in \Gamma(TM)$, $\sigma \in \Gamma(\xi)$ et $x \in M$, nous avons

$$(\phi^* \nabla')_X \sigma \ (x) = {\phi_x}^{-1}\big(\nabla'_{X'} \sigma' \ (f(x))\big) \qquad (\cdot 27 \cdot)$$

où $X' \in \Gamma(TM')$ vérifie $X'(f(x)) = T_x f(X(x))$, et $\sigma' \in \Gamma(\xi')$ vérifie $\sigma' \circ f(x) = \phi \circ \sigma(x)$ et $T_{f(x)} \sigma'\big(T_x f(X(x))\big) = T_x(\phi \circ \sigma)(X(x))$.

Démonstration. L'existence de X' découle du lemme 2.26. Notons que si $X'(f(x)) = 0$, le choix de σ' n'a en fait aucune importance, car alors $\nabla'_{X'} \sigma' \ (f(x)) = 0$. Si $X'(f(x)) \neq 0$, l'existence de σ' découle d'une variante du lemme 2.26. Le lemme 2.35 montre que l'application $\nabla^* : \Gamma(TM) \times \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)$ définie par le membre de droite de la formule $(\cdot 27 \cdot)$ est bien définie (indépendante des choix). Il est facile de montrer que l'application $X \mapsto \nabla^*_X \sigma$ est $\mathrm{C}^\infty(M)$-linéaire et que l'application $\sigma \mapsto \nabla^*_X \sigma$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

Notons que si f n'est pas une immersion, alors l'application ∇^* ainsi définie n'est pas forcément une connexion. Par exemple, si f est constante, alors ∇^* est l'application nulle (qui n'est en général pas une connexion), puisque nous pouvons prendre $X' = 0$.

Si f est une immersion, montrons la propriété de dérivation de $\sigma \mapsto \nabla^*_X \sigma$. Soit $g \in \mathrm{C}^\infty(M)$. Notons $g' \in \mathrm{C}^\infty(M')$ telle que

$$g'(f(x)) = g(x) \quad \text{et} \quad d_{f(x)} g'\big(X'(f(x))\big) = d_x g(X(x))$$

(qui existe par la possibilité de prescrire le 1-jet d'une application lisse, car $T_x f(X(x)) = 0$ si et seulement si $X(x) = 0$ puisque f est une immersion). Nous avons

$$(g'\sigma')(f(x)) = g'(f(x))\sigma'(f(x)) = g(x)\phi(\sigma(x)) = \phi((g\sigma)(x)) \ ,$$

et

$$\begin{aligned} T_{f(x)}(g'\sigma')\big(X'(f(x))\big) &= d_{f(x)} g'\big(X'(f(x))\big)\sigma'(f(x)) + g'(f(x)) T_{f(x)}\sigma'\big(X'(f(x))\big) \\ &= d_x g(X(x))\phi(\sigma(x)) + g(x) T_x(\phi \circ \sigma)(X(x)) \\ &= T_x(g(\phi \circ \sigma))(X(x)) = T_x(\phi \circ (g\sigma))(X(x)) \ . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \nabla^*_X(g\sigma) &= {\phi_x}^{-1}\big(\nabla'_{X'}(g'\sigma')(f(x))\big) \\ &= {\phi_x}^{-1}\big(X'(g')(f(x))\sigma'(f(x)) + g'(f(x))\nabla'_{X'}\sigma'\,(f(x))\big) \\ &= {\phi_x}^{-1}\big(X(g)(x)\phi_x(\sigma(x)) + g(x)\phi_x\big(\nabla^*_X\sigma(x)\big) \\ &= X(g)(x)\sigma(x) + g(x)\,\nabla^*_X\sigma(x) \ . \end{aligned}$$

Donc ∇^* est une connexion.

Par construction de ∇^*, pour toutes les sections $\sigma \in \Gamma(\xi)$ et $\sigma' \in \Gamma(\xi')$ telles que $\phi \circ \sigma = \sigma' \circ f$, pour tout $x \in M$, nous avons

$$(\phi^*\nabla')_X\sigma\,(x) = {\phi_x}^{-1}\big(\nabla'_{T_x f(X(x))}\sigma'\,(f(x))\big) = \nabla^*_X\sigma\,(x) \ .$$

Donc $\nabla^* = \phi^*\nabla'$ par l'unicité dans la proposition 2.36. □

Si (ψ, g) est un morphisme de fibrés vectoriels de ξ'' sur ξ, qui est un isomorphisme linéaire en restriction à chaque fibre, alors nous avons

$$(\phi \circ \psi)^*\nabla' = \psi^*(\phi^*\nabla') \ . \tag{$\cdot 28 \cdot$}$$

En effet, si $\sigma'' \in \Gamma(\xi'')$ et $\sigma' \in \Gamma(\xi')$ vérifient $\phi \circ \psi \circ \sigma'' = \sigma' \circ f \circ g$, si M'' est la base de ξ'', alors $\sigma : x \mapsto \phi_x^{-1}(\sigma'(f(x)))$ est une section lisse de ξ telle que $\psi \circ \sigma'' = \sigma \circ g$ et $\phi \circ \sigma = \sigma' \circ f$, donc pour tous les $x'' \in M''$ et $X \in \Gamma(TM'')$, nous avons

$$\begin{aligned} (\psi^*(\phi^*\nabla')_X(\sigma'') &= {\psi_{x''}}^{-1}\big((\phi^*\nabla')_{T_{x''}g(X(x''))}\sigma\,(g(x))\big) \\ &= {\psi_{x''}}^{-1}{\phi_{g(x'')}}^{-1}\big(\nabla'_{T_{g(x'')}f(T_{x''}g(X(x)))}\sigma'\,(f(g(x)))\big) \\ &= {(\phi \circ \psi)_x}^{-1}\big(\nabla'_{T_{g\circ f(x'')}(X(x))}\sigma'\,(f \circ g(x))\big) \\ &= (\phi \circ \psi)^*\nabla'_X\sigma''(x'') \ . \end{aligned}$$

Nous appliquerons cette construction surtout dans les trois cas suivants, où la condition d'isomorphisme linéaire sur les fibres de ϕ est vérifiée (la condition d'immersion de f l'est dans les deux premiers cas) :

- lorsque ϕ est un isomorphisme de fibrés vectoriels de ξ dans ξ' au-dessus de l'identité, auquel cas, pour tous les $X \in \Gamma(TM)$ et $\sigma \in \Gamma(\xi)$,

$$(\phi^*\nabla')_X\sigma = \phi^{-1} \circ \nabla'_X(\phi \circ \sigma) \ ;$$

- lorsque ξ et ξ' sont les fibrés tangents de M et M', $f : M \to M'$ est un C^∞-difféomorphisme et $\phi = Tf$, auquel cas, pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$\big((Tf)^*\nabla'\big)_X Y = f^*\big(\nabla'_{(f^{-1})^*X}((f^{-1})^*Y)\big) \ ; \qquad (\cdot 29 \cdot)$$

- lorsque $\xi = f^*\xi'$ est le fibré vectoriel image réciproque de ξ par une application lisse $f : M \to M'$, auquel cas nous noterons $f^*\nabla'$ la connexion image réciproque par le morphisme de fibré vectoriel canonique (ϕ, f) de ξ dans ξ'. Par construction, cette application $f^*\nabla'$ vérifie, pour tous les $x \in M$, $X \in \Gamma(TM)$ et $\sigma' \in \Gamma(\xi')$, en remarquant que $\sigma' \circ f \in \Gamma(\xi)$ et que $\phi_x : (f^*\xi')_x \to \xi'_{f(x)}$ est l'identité,

$$(f^*\nabla')_X(\sigma' \circ f)\,(x) = \nabla'_{T_x f(X(x))}\,\sigma'\,(f(x)) \ . \qquad (\cdot 30 \cdot)$$

Par le premier point ci-dessus, le groupe $\mathrm{Aut}(\xi)$ des automorphismes de fibrés vectoriels au-dessus de l'identité d'un fibré vectoriel ξ agit (à droite) sur l'ensemble des connexions sur ξ par $(\phi, \nabla) \mapsto \phi^*\nabla$. Le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\xi)$ préservant une connexion ∇ sur ξ est appelé le *groupe de jauge* de ∇.

La propriété $(\cdot 30 \cdot)$ caractérise en fait la connexion image réciproque sur un fibré image réciproque, par le résultat suivant.

Proposition 2.37 *Soit ξ' un fibré vectoriel de base M', soit ∇' une connexion sur ξ' et soit $f\colon M \to M'$ une application lisse. La connexion image réciproque $f^*\nabla'$ est l'unique connexion ∇ sur le fibré vectoriel image réciproque $\xi = f^*\xi'$ telle que, pour tous les $x \in M$, $X \in \Gamma(TM)$ et $\sigma' \in \Gamma(\xi')$, nous ayons $\nabla_X(\sigma' \circ f)\,(x) = \nabla'_{T_x f(X(x))}\,\sigma'\,(f(x))$.*

Démonstration. Ceci découle de la proposition plus générale 2.36, mais nous redémontrons l'unicité en utilisant le lemme technique suivant, qui nous reservira ultérieurement.

Lemme 2.38 *Soient ξ' un fibré vectoriel de base M' de rang n et $\xi = f^*\xi'$ le fibré vectoriel image réciproque de ξ' par une application lisse $f\colon M \to M'$. Pour tout $\sigma \in \Gamma(\xi)$, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U' de $f(x)$ dans M, des sections lisses $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n$ de ${\xi'}_{|U'}$, et des applications $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{C}^\infty(f^{-1}(U'))$ tels que, pour tout $y \in f^{-1}(U')$, nous ayons*

$$\sigma(y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(y)\,\sigma'_i(f(y)) \ .$$

Démonstration. Il suffit de prendre pour U' un voisinage distingué de $f(x)$ pour le fibré vectoriel ξ' et pour $(\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n)$ une base du $\mathrm{C}^\infty(U')$-module libre $\Gamma({\xi'}_{|U'})$, car alors par la construction du fibré vectoriel image réciproque, la suite finie $(\sigma'_1 \circ f, \ldots, \sigma'_n \circ f)$ est une base du $\mathrm{C}^\infty(f^{-1}(U'))$-module $\Gamma(\xi_{|f^{-1}(U')})$. $\square$

Par la propriété de linéarité et de dérivation des connexions, puisque la propriété énoncée dans la proposition caractérise la connexion sur les sections lisses locales de ξ de la forme $\sigma' \circ f$, où σ' est une section lisse locale de ξ', la proposition découle du lemme. $\square$

2.3.4 Interprétation géométrique des connexions

Soit ξ un fibré vectoriel, de projection $p : E \to M$. Nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{Tp} & TM \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ E & \xrightarrow{p} & M \end{array} .$$

Rappelons que (Tp, p) est un morphisme de fibrés vectoriels du fibré tangent $\pi_E : TE \to E$ dans le fibré tangent $\pi_M : TM \to M$.

Le *fibré vertical* V de ξ est le sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel $\pi_E : TE \to E$, noyau du morphisme de fibrés vectoriels $Tp : TE \to TM$ au-dessus de p. Par la partie 2.2.2, il s'agit bien d'un sous-fibré vectoriel, car Tp est surjectif sur les fibres (car p est une submersion), donc est de rang localement constant. Pour tout $v \in E$, en posant $x = p(v)$, la fibre V_v de V au-dessus de v est le noyau de l'application linéaire surjective $T_v p : T_v E \to T_x M$, égal à l'espace tangent $T_v \xi_x$ à la fibre de p au-dessus de x, puisque p est une submersion :

$$V_v = \operatorname{Ker} T_v p = T_v \xi_{p(v)} .$$

L'application de ξ_x dans $T_v \xi_x$ qui à w associe le vecteur tangent en $t = 0$ à la courbe $t \mapsto v + tw$ dans ξ_x est un isomorphisme d'espaces vectoriels, par lequel nous identifierons comme d'habitude ces deux espaces, de sorte que

$$V_v = \xi_{p(v)} .$$

Le rang de V est égal au rang de ξ.

Notons $E \times_p E = \{(v, w) \in E \times E \ : \ p(v) = p(w)\}$, qui est une sous-variété de la variété produit $E \times E$, comme image réciproque de la diagonale de $M \times M$ par l'application de $E \times E$ dans $M \times M$ définie par $(x, y) \mapsto (p(x), p(y))$, qui est transverse à la diagonale, car p est une submersion (voir les rappels du préambule). Nous avons

$$T(E \times_p E) = \{(a, b) \in TE \times TE \ : \ T_v p(a) = T_w p(b) \text{ où } a \in T_v E, \ b \in T_w E\} .$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, notons encore $a \mapsto \lambda a$ l'application de TE dans TE tangente à l'application $v \mapsto \lambda v$ de E dans E, et appelons-la *homothétie* de rapport λ de TE. Notons encore $(a, b) \mapsto a + b$, et appelons *somme* dans TE, l'application de $T(E \times_p E)$ dans TE tangente à l'application $(v, w) \mapsto v + w$ de $E \times_p E$ dans E. Nous avons $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ pour tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \in T(E \times_p E)$.

Lemme 2.39 *Le fibré vertical V est stable par les homothéties et par la somme : pour tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(v, w) \in E \times_p E$, nous avons $\lambda V_v = V_{\lambda v}$ et $V_v + V_w = V_{v+w}$.*

Démonstration. Pour tous les $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in E$ et $a \in T_v E$, nous avons $p(\lambda v) = p(v)$, donc par dérivation $T_{\lambda v} p(\lambda a) = T_v p(a)$, donc

$$\lambda V_v = V_{\lambda v} .$$

Pour tous les $(v, w) \in E \times_p E$, nous avons $(V_v \times V_w) \subset T_{(v,w)}(E \times_p E)$ car $T_v p(a) = 0 = T_w p(b)$ si $a \in V_v$ et $b \in V_w$. De plus, pour tous les $(v, w) \in E \times_p E$, nous avons

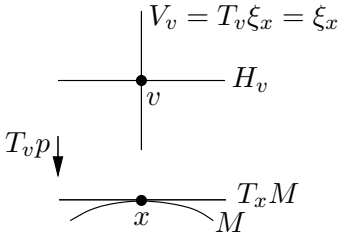
$p(v+w) = p(v) = p(w)$, donc par dérivation $T_{v+w}p(a+b) = T_v p(a) = T_w p(b)$ pour tous les $(a,b) \in T_{(v,w)}(E \times_p E)$, d'où

$$V_v + V_w = V_{v+w} \ . \quad \square$$

Un *fibré horizontal* de ξ est un sous-fibré vectoriel $H \to E$ du fibré vectoriel $\pi_E : TE \to E$, supplémentaire de V :

$$TE = H \oplus V \ .$$

Pour tout $v \in E$, nous avons donc $T_vE = H_v \oplus V_v$. De plus, puisque V_v est le noyau de T_vp, l'application $T_vp_{|H_v} : H_v \to T_{p(v)}M$ est un isomorphisme linéaire. Le rang de H est égal à la dimension de M.



On prendra bien garde qu'alors que le fibré vertical est uniquement défini, il peut y avoir une infinité non dénombrable de fibrés horizontaux. La donnée d'un fibré horizontal est parfois appelée une *connexion d'Ehresmann*. Une connexion d'Ehresmann H de ξ est dite *linéaire* si le champ de sous-espaces vectoriels $(H_v)_{v\in E}$ dépend linéairement de v, c'est-à-dire si H est stable par les homothéties et par la somme : pour tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(v,w) \in E \times_p E$, nous avons

$$H_{\lambda v} = \lambda H_v \quad \text{et} \quad H_{v+w} = \{a+b \ : \ a \in H_v, b \in H_w \text{ tels que } T_vp(a) = T_wp(b)\} \ .$$

Nous allons maintenant montrer que se donner une connexion ou une connexion d'Ehresmann linéaire revient au même.

Si H est une connexion d'Ehresmann de ξ, notons $\mathrm{pr}_H : TE \to V$ l'application lisse, qui, en restriction à T_vE pour tout $v \in E$, est la projection pr_{H_v} sur V_v parallèlement à H_v. Si $\sigma \in \Gamma(\xi)$ et $X \in \Gamma(TM)$, pour tout $x \in M$, notons

$$\nabla^H_X \sigma(x) = \mathrm{pr}_{H_{\sigma(x)}} \circ T_x\sigma(X(x)) \ ,$$

qui est un élément de $V_{\sigma(x)} = \xi_x$.

Proposition 2.40 *Si H est une connexion d'Ehresmann linéaire, alors l'application $\nabla^H : \Gamma(TM) \times \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)$ ainsi construite est une connexion sur ξ. Réciproquement, si ∇ est une connexion de ξ, alors il existe une unique connexion d'Ehresmann linéaire H de ξ telle que $\nabla = \nabla^H$.*

Démonstration. Il est immédiat que l'application $X \mapsto \nabla^H_X\sigma$ est $\mathrm{C}^\infty(M)$-linéaire. Puisque V et H sont invariants par la somme, pour tous les $a \in T_vE$ et $b \in T_wE$ tels que $T_vp(a) = T_wp(b)$, nous avons $\mathrm{pr}_{H_{v+w}}(a+b) = \mathrm{pr}_{H_v}(a) + \mathrm{pr}_{H_w}(b)$, donc l'application $\sigma \mapsto \nabla^H_X\sigma$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, pour tout $x \in M$, nous avons

$$T_x(f\sigma)(X(x)) = X(f)(x)\,\sigma(x) + f(x)\,T_x\sigma(X(x)) \ .$$

Puisque V et H sont invariants par les homothéties, pour tous les $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in E$ et $a \in T_vE$, nous avons $\mathrm{pr}_{H_{\lambda v}}(\lambda a) = \lambda\, \mathrm{pr}_{H_v}(a)$. Puisque H est invariant par la somme et puisque $\mathrm{pr}_{H_{\sigma(x)}}$ vaut l'identité sur $V_{\sigma(x)} = \xi_x$, l'application ∇ est bien une connexion.

Réciproquement, soit ∇ une connexion sur ξ, construisons un morphisme de fibrés vectoriels $\phi : TE \to V$ du fibré vectoriel $\pi_E : TE \to E$ dans son sous-fibré vectoriel $V \to E$ au-dessus de l'identité. Pour tous les $x \in M$, $v \in \xi_x$ et $w \in T_vE$, notons $X = T_vp(w) \in T_xM$ et choisissons $\sigma \in \Gamma(\xi)$ tel que $\sigma(x) = v$ et $T_x\sigma(X) = w$ si $X \neq 0$, sinon n'importe quel $\sigma \in \Gamma(\xi)$ convient. Posons

$$\phi(w) = \begin{cases} w & \text{if } X = 0 \\ \nabla_X \sigma(x) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Par le lemme 2.35, la valeur de $\phi(w)$ ne dépend pas du choix d'un tel σ. L'application $\phi : T_vE \to V_v$ est bien à valeurs dans $V_v = \xi_x$ car $\nabla_X\sigma \in \Gamma(\xi)$ et si $X = 0$, alors $w \in \operatorname{Ker} T_vp = V_v$, et elle est surjective, car si $w \in V_v$, alors $X = 0$, donc $\phi(w) = w$.

Montrons que ϕ est linéaire sur T_vE. Soient $w, w' \in T_vE$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons $X = T_vp(w)$ et $X' = T_vp(w')$, de sorte que $T_vp(w + w') = X + X'$ et choisissons $\sigma, \sigma', \sigma'' \in \Gamma(\xi)$ tels que $\sigma(x) = \sigma'(x) = \sigma''(x) = v$, $T_x\sigma(X) = w$, $T_x\sigma'(X') = w'$ et $T_x\sigma''(X + X') = w + w'$.

Si $w' = \lambda w$, alors $X' = \lambda X$, donc X' est nul si et seulement si X est nul et alors $\phi(w') = w' = \lambda w = \lambda\phi(w)$. Si X (et donc X') est non nul, alors $T_x\sigma(X') = w'$, et nous pouvons prendre $\sigma' = \sigma$ dans la construction de $\phi(w')$, ce qui montre que

$$\phi(\lambda w) = \nabla_{\lambda X}\sigma(x) = \lambda\nabla_X\sigma(x) = \lambda\,\phi(w)\ .$$

Pour montrer que $\phi(w+w') = \phi(w)+\phi(w')$, nous considérons les deux cas suivant, qui couvrent tous les cas quitte à permutter w et w' et à utiliser le point précédent. Supposons tout d'abord que $w' - w$ appartienne à V_v, et donc que $X' = T_vp(w') = T_vp(w) = X$. Nous avons $X + X' = 0$ si et seulement si $X = 0$ et $X' = 0$, et alors $\phi(w + w') = w + w' = \phi(w) + \phi(w')$. Si $X + X' \neq 0$ (et donc $X \neq 0$ et $X' \neq 0$), alors $T_vp(w + w') = 2X$ et $T_x\frac{\sigma+\sigma'}{2}(2X) = w + w'$; par conséquent, nous pouvons prendre $\sigma'' = \frac{\sigma+\sigma'}{2}$ dans la construction de $\phi(w + w')$, donc

$$\phi(w + w') = \nabla_{X+X'}\frac{\sigma + \sigma'}{2}(x) = \nabla_{2X}\frac{\sigma}{2}(x) + \nabla_{2X'}\frac{\sigma'}{2}(x) = \phi(w) + \phi(w')\ .$$

Si w' n'appartient pas à $\mathbb{R}w + V_v$, alors X et X' sont linéairement indépendants (et en particulier $X + X' \neq 0$, $X \neq 0$ et $X' \neq 0$), donc il existe $\sigma''' \in \Gamma(\xi)$ tel que $\sigma'''(x) = v$, $T_x\sigma'''(X) = w$ et $T_x\sigma'''(X') = w'$, et en particulier $T_x\sigma'''(X + X') = w + w'$; nous pouvons prendre $\sigma = \sigma'''$, $\sigma' = \sigma'''$ et $\sigma'' = \sigma'''$ respectivement dans la construction de $\phi(w)$, $\phi(w')$ et $\phi(w + w')$. Donc

$$\phi(w + w') = \nabla_{X+X'}\sigma'''(x) = \nabla_X\sigma(x) - \nabla_{X'}\sigma'(x) = \phi(w) + \phi(w')\ .$$

Ceci montre la linéarité de ϕ.

Il n'est pas difficile de montrer que $\phi : TE \to V$ est donc un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de l'identité, surjectif sur les fibres. Son noyau H est donc un sous-fibré vectoriel de π_E, supplémentaire à V, et par construction, la connexion associée à ce sous-fibré horizontal H est ∇. L'unicité de H et son invariance par les homothéties et par la somme sont immédiates. $\square$

Exemples. (1) Considérons la connexion triviale ∇ sur le fibré vectoriel trivial ξ de projection $p : E = M \times \mathbb{R}^n \to M$, où p est la projection sur le premier facteur. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (X, v, w) \in TE = TM \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E = M \times \mathbb{R}^n \ni (x, v) \\ Tp \downarrow & & \downarrow p \\ X \in TM & \longrightarrow & M \ni x \ . \end{array}$$

Alors le sous-espace vectoriel vertical de $T_{(x,\,v)}E$ est

$$V_{(x,\,v)} = \ker T_{(x,\,v)}p = \{(X, v, w) \in TM \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ X = 0\} \ ,$$

que l'on identifie comme précédemment avec ξ_x par $(0, v, w) \mapsto (x, w)$. Posons

$$H_{(x,\,v)} = \{(X, v, w) \in TM \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ w = 0\} \ .$$

Alors $H = \bigcup_{(x,\,v) \in E} H_{(x,\,v)}$ est un sous-fibré vectoriel de $TE \to E$ supplémentaire au fibré vertical V. Il est immédiat de vérifier qu'il définit une connexion d'Ehresmann linéaire, et que pour toute section lisse $\sigma : x \mapsto (x, f(x))$ de ξ et pour tout $X \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$\nabla_X \sigma(x) = (x, df \circ X(x)) = \mathrm{pr}_H \circ T\sigma \circ X(x) \ ,$$

c'est-à-dire que la connexion associée au fibré vertical H est la connexion triviale.

(2) Soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels de projections $p : E \to M$ et $p' : E' \to M'$, munis de connexions ∇ et ∇' respectivement. Soient $V = V^{\xi}$ et $H = H^{\nabla}$ (respectivement $V' = V^{\xi'}$ et $H' = H^{\nabla'}$) les fibrés verticaux et horizontaux associés à la connexion ∇ (respectivement ∇'). Notons $V'' = V^{\xi \times \xi'}$ le fibré vectoriel sur $E \times E'$ produit de V et V', et $H'' = H^{\nabla \times \nabla'}$ celui de H et H'. Alors, avec les identifications naturelles

$$T(E \times E') = TE \times TE = (V \oplus H) \times (V' \oplus H') = (V \times V') \oplus (H \times H')$$

de fibrés vectoriels sur $E \times E'$, les sous-fibrés vectoriels V'' et H'' sont les fibrés verticaux et horizontaux associés à la connexion produit $\nabla \times \nabla'$ (définie dans la proposition 2.33).

En effet, il est immédiat que V'' est le fibré vertical du fibré vectoriel produit $\xi \times \xi'$: Pour tout $(v, v') \in E \times E'$

$$V''_{(v,\,v')} = T_{(v,\,v')}\big(\xi_{p(v)} \times \xi'_{p'(v')}\big) = T_v\xi_{p(v)} \times T_{v'}\xi'_{p'(v')} = V_v \times V'_{v'} \ ,$$

que H'' est un sous-fibré vectoriel du fibré tangent de $E \times E'$ supplémentaire à V'', et que cette connexion d'Ehresmann H'' est linéaire. Il s'agit donc de montrer que pour tous les $X'' \in \Gamma(T(M \times M'))$ et $\sigma'' \in \Gamma(\xi \times \xi')$, nous avons

$$(\nabla \times \nabla')_{X''}\sigma'' = \mathrm{pr}_{H''} \circ T\sigma'' \circ X'' \ .$$

Rappelons que si σ et σ' sont deux sections de ξ et ξ' respectivement, nous notons $\sigma + \sigma'$ la section de $\xi \times \xi'$ définie par $(x, x') \mapsto (\sigma(x), \sigma'(x'))$. Rappelons que toute section lisse du fibré vectoriel produit $\xi \times \xi'$ est localement combinaison linéaire à coefficients dans $\mathrm{C}^\infty(M \times M')$ de sections lisses à valeurs dans les facteurs (voir la démonstration de la proposition 2.33). Par les propriétés de $\mathrm{C}^\infty(M \times M')$-linéarité en X'' et de $\mathrm{C}^\infty(M \times M')$-dérivation en σ'' des deux membres de cette équation, il suffit donc de vérifier l'équation ci-dessus lorsque $X'' = X + X'$ et $\sigma'' = \sigma + \sigma'$ où $X \in \Gamma(TM)$, $X' \in \Gamma(TM')$, $\sigma \in \Gamma(\xi)$ et $\sigma' \in \Gamma(\xi')$. Ceci est immédiat par la propriété caractéristique des connexions produits (voir la proposition 2.33), le fait que les fibrés horizontaux associés à ∇ et ∇' soient H et H', et le fait que $\mathrm{pr}_{H''} : (TE \times TE') \to (TE \times TE')$ soit l'application $(u, u') \mapsto (\mathrm{pr}_H(u), \mathrm{pr}_{H'}(u'))$.

2.3.5 Torsion d'une connexion sur une variété

Soient M une variété et ∇ une connexion sur M.

La *torsion* de ∇ est le tenseur $T = T^{\nabla}$ de type $(2,1)$ sur M tel que pour tous les champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TM)$ sur M,

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \ .$$

Cette expression étant $\mathrm{C}^\infty(M)$-bilinéaire en (X,Y), définit bien un tenseur $(2,1)$ sur M par le lemme de tensorialité 2.24. Notons que ce tenseur est anti-symétrique en ses deux variables covariantes : pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$T(Y,X) = -T(X,Y) \ .$$

Si $(U,(x^1,\dots,x^n))$ est une carte locale de M, si $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, alors en restriction à U, nous avons

$$[X,Y] = \sum_{i,\,j=1}^n \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \Big) \frac{\partial}{\partial x^j} \ ,$$

et donc, par un petit calcul,

$$T(X,Y) = \sum_{i,\,j=1}^n \left(X^i Y^j - Y^i X^j \right) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i,\,j,\,k=1}^n \Gamma_{i,\,j}^k \left(X^i Y^j - Y^i X^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \ ,$$

où les $\Gamma_{i,\,j}^k$ sont les symboles de Christoffel de la connexion ∇ dans la trivialisation locale de TM au-dessus de U définie par la carte locale considérée (voir l'exemple (2) de la partie 2.2.1 et la remarque (6) de la partie 2.3.2 ci-dessus).

La connexion ∇ est dite *sans torsion* si sa torsion T est le tenseur $(2,1)$ nul. Par exemple, la connexion triviale sur le fibré tangent $TU = U \times \mathbb{R}^n$ à un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est sans torsion. Les exemples principaux de connexions sans torsion sont les connexions de Levi-Civita, que nous introduirons dans la partie 3.2.

Exemple. (1) Si A est un tenseur $(2,1)$ sur M, alors la torsion de la connexion $\nabla' = \nabla + A$ (qui est bien une connexion sur M par la remarque (5) de la partie 2.3.2 ci-dessus) est définie par

$$T^{\nabla'}(X,Y) = T^{\nabla}(X,Y) + A(X,Y) - A(Y,X) \ ,$$

pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$. En particulier, pour toute connexion ∇, la connexion définie par $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y - \frac{1}{2} T^{\nabla}(X,Y)$ est sans torsion.

(2) La connexion produit de deux connexions sans torsion est sans torsion.

En effet, soient ∇ et ∇' des connexions sur des variétés M et M'. Si $X \in \Gamma(TM)$ et $X' \in \Gamma(TM')$, rappelons que $X + X'$ est le champ de vecteurs sur $M \times M'$ défini par $(x,x') \mapsto (X(x), X'(x'))$. Montrons que la torsion de $\nabla \times \nabla'$ est l'unique $(2,1)$-tenseur $T^{\nabla \times \nabla'}$ sur $M \times M'$ tel que, pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $X', Y' \in \Gamma(TM')$,

$$T^{\nabla \times \nabla'}(X + X', Y + Y') = T^{\nabla}(X,Y) + T^{\nabla'}(X',Y') \ .$$

L'unicité montrera en particulier le résultat.

Le fait que la propriété soit vérifiée découle immédatement de la définition des tenseurs de torsion, du fait que $[X+X',Y+Y'] = [X,Y]+[X',Y']$ pour tous les $X,Y \in \Gamma(TM)$ et $X',Y' \in \Gamma(TM')$, et de la propriété caractéristique des connexions produits (voir la proposition 2.33).

L'existence et l'unicité d'un tel $(2,1)$-tenseur vient du fait qu'il s'agit d'une égalité ponctuelle, que pour tous les ouverts suffisamment petits U et U' de M et M', tout champ de vecteurs sur $M \times M'$ est, en restriction à $U \times U'$, combinaison linéaire à coefficents dans $\mathrm{C}^\infty(M \times M')$ de champs de vecteurs tangents à M ou à M' (voir la démonstration de la proposition 2.33), et que $T^{\nabla \times \nabla'}$ est $\mathrm{C}^\infty(M \times M')$-bilinéaire.

Remarques. (1) Si $H \to TM$ est le fibré horizontal du fibré tangent $TM \to M$ qui correspond à la connexion ∇ sur M par l'interprétation géométrique précédente, alors ∇ est sans torsion si et seulement si, pour tous les $X,Y \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$[X,Y] = \mathrm{pr}_H \circ (TY \circ X - TX \circ Y) \ .$$

(2) Si ∇ est une connexion sans torsion sur une variété M, alors le crochet de deux champs de vecteurs X et Y peut être calculé à partir de la connexion, par

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \ .$$

Alors la différentielle extérieure et la dérivée de Lie peuvent être exprimées à partir de la connexion ∇. Par exemple, par les formules $(\cdot\, 17\, \cdot)$ et $(\cdot\, 21\, \cdot)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $\alpha \in \Gamma(\Lambda^p T^*M)$, pour tous les $X_0, \ldots, X_p \in \Gamma(TM)$,

$$d\alpha(X_0, X_1, \ldots, X_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\nabla_{X_i}\alpha)(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_p)) \ .$$

De même, par les formules $(\cdot\, 18\, \cdot)$ et $(\cdot\, 21\, \cdot)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $\alpha \in \Gamma((T^*M)^{\otimes p})$, pour tous les $X_1, \ldots, X_p \in \Gamma(TM)$,

$$\mathscr{L}_X \alpha(X_1, \ldots, X_p) = (\nabla_X \alpha)(X_1, \ldots, X_p) + \sum_{i=1}^{p} \alpha(X_1, \ldots, \nabla_{X_i} X, \ldots, X_p)) \ .$$

2.3.6 Courbure d'une connexion

Soient ξ un fibré vectoriel de base M et ∇ une connexion sur ξ. Nous allons introduire un objet qui mesure le défaut de commutativité en $X,Y \in \Gamma(TM)$ de la dérivée covariante seconde $\sigma \mapsto \nabla_X \nabla_Y \sigma$ des sections lisses de ξ.

La *courbure* $R = R^\nabla$ de ∇ est la 2-forme différentielle à valeurs dans $\xi^* \otimes \xi = \mathrm{End}(\xi)$ définie par

$$R^\nabla{}_{X,Y}\, \sigma = \nabla_X(\nabla_Y \sigma) - \nabla_Y(\nabla_X \sigma) - \nabla_{[X,Y]}\sigma \ ,$$

où $X,Y \in \Gamma(TM)$ et $\sigma \in \Gamma(\xi)$. Les conventions sur le signe de R^∇ diffèrent dans les références. Nous utiliserons aussi les notations suivantes :

$$R^\nabla{}_{X,Y}\, \sigma = R^\nabla(X,Y,\sigma) = R^\nabla(X,Y)\sigma = [\nabla_X, \nabla_Y]\sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma \ .$$

Par la formule $(\cdot\, 23\, \cdot)$, l'application de $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(\xi)$ dans $\Gamma(\xi)$ définie par $(X,Y,\sigma) \mapsto R^\nabla_{X,Y}\sigma$ est $\mathrm{C}^\infty(M)$-trilinéaire. Par le lemme de tensorialité 2.24, elle définit

donc une section lisse de $(T^*M)^{\otimes 2} \otimes \xi^* \otimes \xi$. Comme elle est clairement antisymétrique en X et Y, il en découle que R^∇ est bien une section de $\Lambda^2 T^*M \otimes \xi^* \otimes \xi$.

Par exemple, si ξ est le fibré tangent de M, alors R^∇ est un tenseur $(3,1)$ sur M.

Exemples. (1) Si le fibré vectoriel ξ est trivial et si ∇ est la connexion triviale sur ξ, alors la courbure de ∇ est nulle. En effet, si F est la fibre de ξ, alors $\Gamma(\xi) = \mathrm{C}^\infty(M;F)$ et si $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont les fonctions coordonnées de la fonction $\sigma : M \to F$ dans une base fixée de F, alors $(\nabla_X \sigma)_i = X(\sigma_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Le résultat découle alors du fait que $[X,Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$ pour tous les $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$.

(2) Soit ξ' un fibré vectoriel sur M, de projection $p' : E' \to M$. Soit $\phi : E' \to E$ un isomorphisme de fibrés vectoriels de ξ' sur ξ au-dessus de l'identité, et soit $\phi^*\nabla$ la connexion image réciproque de ∇ par ϕ. Alors la courbure $R^{\phi^*\nabla}$ de la connexion $\phi^*\nabla$ est la 2-forme différentielle à valeurs dans $\mathrm{End}(\xi')$ définie ainsi : pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\sigma' \in \Gamma(\xi')$,

$$R^{\phi^*\nabla}{}_{X,Y}\, \sigma' = \phi^{-1} \circ \left(R^\nabla{}_{X,Y}\, (\phi \circ \sigma') \right) .$$

Voici une autre formule pour la courbure. Le $\mathrm{C}^\infty(M)$-module gradué des formes différentielles sur M à valeurs dans ξ est $\Gamma(\Lambda^* T^*M \otimes \xi) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes \xi)$. Rappelons que $\Gamma(\Lambda^0 T^*M \otimes \xi)$ est égal à $\Gamma(\xi)$. La *différentielle extérieure* d^∇ associée à ∇ est l'application linéaire graduée de degré $+1$ de $\Gamma(\Lambda^* T^*M \otimes \xi)$ dans $\Gamma(\Lambda^* T^*M \otimes \xi)$ définie par, pour tous les $p \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes \xi)$ et $X_0, \dots, X_p \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned} d^\nabla \omega\, (X_0, \dots, X_p) = & \sum_{i=0}^{p} (-1)^i\, \nabla_{X_i} \big(\omega(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_p) \big) \\ & + \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j}\, \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_p) . \end{aligned}$$

Par exemple, si ω est une 0-forme différentielle à valeurs dans ξ, c'est-à-dire une section lisse de ξ, alors $d^\nabla \omega = \nabla \omega$. Si ω est une 1-forme différentielle à valeurs dans ξ, alors

$$d^\nabla \omega(X,Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \nabla_Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) . \qquad (\cdot 31 \cdot)$$

Il est facile de vérifier que l'application $(X_0, \dots, X_p) \mapsto d^\nabla \omega(X_0, \dots, X_p)$ est $\mathrm{C}^\infty(M)$-multilinéaire alternée de $\Gamma(TM)^{p+1}$ dans $\Gamma(\xi)$, donc définit bien, par le lemme de tensorialité 2.24, une section lisse de $(T^*M)^{\otimes(p+1)} \otimes \xi$, qui est clairement alternée en tout point en les $p+1$ variables dans $\Gamma(TM)$, donc appartient à $\Gamma(\Lambda^{p+1} T^*M \otimes \xi)$. Notons que si $\sigma \in \Gamma(\xi)$, la 2-forme différentielle $d^\nabla(d^\nabla \sigma)$ à valeurs dans ξ n'est pas forcément nulle (voir la proposition ci-dessous).

Nous noterons encore d^∇ la différentielle extérieure des formes différentielles sur M à valeurs dans les fibrés tensoriels $(\xi^*)^{\otimes s} \otimes \xi^{\otimes t}$ de ξ, pour la connexion produit tensoriel $(\nabla^*)^{\otimes s} \otimes \nabla^{\otimes t}$ que nous notons encore ∇ (voir la proposition 2.34). Explicitons dans quelques cas cette différentielle extérieure. Si $\omega \in \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes T^t_s \xi)$ et $\omega' \in \Gamma(\Lambda^q T^*M \otimes T^{t'}_{s'} \xi)$, alors $\omega \wedge \omega' \in \Gamma(\Lambda^{p+q} T^*M \otimes T^{t+t'}_{s+s'} \xi)$ et

$$d^\nabla(\omega \wedge \omega') = (d^\nabla \omega) \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge (d^\nabla \omega') .$$

Si $\omega \in \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes \xi^*)$ et $\sigma \in \Gamma(\xi)$, alors $\omega(\sigma) \in \Gamma(\Lambda^p T^*M)$ et

$$(d^\nabla \omega)(\sigma) = d(\omega(\sigma)) - \omega(\nabla \sigma) .$$

La différentielle extérieure d^∇ des formes différentielles sur M à valeurs dans le fibré tensoriel $\xi^* \otimes \xi = \mathrm{End}(\xi)$ vérifie, pour tous les ω dans $\Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes \mathrm{End}(\xi))$, qui est contenu dans $\Gamma(\mathscr{L}(TM, \ldots, TM, \xi; \xi))$, et $\sigma \in \Gamma(\xi)$, la formule

$$(d^\nabla \omega)(\sigma) = d^\nabla(\omega(\sigma)) - \omega(\nabla\sigma) \; . \qquad (\cdot 32 \cdot)$$

Proposition 2.41 *Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel ξ de base M.*

(1) Pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\sigma \in \Gamma(\xi)$, nous avons

$$R^\nabla{}_{X,Y}\, \sigma = \; d^\nabla(d^\nabla\sigma)(X, Y) \; .$$

(2) **(Identité de Bianchi différentielle)** *En notant encore ∇ la connexion sur $\xi^* \otimes \xi$ définie par ∇, nous avons*

$$d^\nabla R^\nabla = 0 \; .$$

Démonstration. (1) Ceci résulte immédiatement du fait que $d^\nabla\sigma = \nabla\sigma$ et de la formule $(\cdot 31 \cdot)$.

(2) Par la formule $(\cdot 32 \cdot)$, nous avons, pour tout $\sigma \in \Gamma(\xi)$,

$$(d^\nabla R^\nabla)(\sigma) = d^\nabla(R^\nabla\sigma) - R^\nabla(d^\nabla\sigma) = d^\nabla(d^\nabla \circ d^\nabla(\sigma)) - \; d^\nabla \circ d^\nabla(d^\nabla(\sigma)) = 0 \; . \quad \square$$

2.3.7 Dérivation covariante de champs de vecteurs le long de courbes

• Propriétés des connexions images réciproques.

Soient M et N deux variétés, $f : N \to M$ une application lisse et ∇ une connexion sur M. Notons f^*TM le fibré image réciproque du fibré tangent de M et $\overline{\nabla} = f^*\nabla : \Gamma(TN) \times \Gamma(f^*TM) \to \Gamma(f^*TM)$ la connexion image réciproque de ∇ sur f^*TM (voir la partie 2.3.3 et en particulier la proposition 2.37). Dans la suite, nous aurons besoin de connaître certaines propriétés de cette application $\overline{\nabla}$ (avec l'extension immédiate au cas où $N = [a, b]$ ou $N = [a, b] \times [c, d]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou un produit de deux intervalles de $\mathbb{R}$).

Pour tout champ de vecteurs lisse $X \in \Gamma(TN)$, notons $\overline{X} = f_*X \in \Gamma(f^*TM)$ la section du fibré vectoriel image réciproque f^*TM sur N définie par

$$\overline{X}(x) = T_x f(X(x)) \; .$$

L'application $f_* : \Gamma(TN) \to \Gamma(f^*TM)$ ainsi définie est $\mathrm{C}^\infty(N)$-linéaire. (Attention à ne pas la confondre avec l'image réciproque des champs de vecteurs par des difféomorphismes locaux.)

Pour tout tenseur $\sigma \in \Gamma((T^*M)^{\otimes s} \otimes (TM)^{\otimes t})$ de type (s, t) sur M, notons $\overline{\sigma} \in \Gamma((f^*T^*M)^{\otimes s} \otimes (f^*TM)^{\otimes t})$, et appelons *image réciproque* de σ, la section lisse du fibré vectoriel $(f^*T^*M)^{\otimes s} \otimes (f^*TM)^{\otimes t}$ définie en posant, pour tout $x \in N$ et tous les $v_1, \ldots, v_s \in (f^*TM)_x = T_{f(x)}M$,

$$\overline{\sigma}_x(v_1, \ldots, v_s) = \sigma_{f(x)}(v_1, \ldots, v_s) \in (T_{f(x)}M)^{\otimes t} = ((f^*TM)_x)^{\otimes t} \; .$$

Pour tout $g \in \mathrm{C}^\infty(M)$, nous avons $\overline{g\,\sigma} = g \circ f\; \overline{\sigma}$. (Attention à ne pas confondre l'application $\mathbb{R}$-linéaire $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$ avec l'image réciproque des tenseurs par des difféomorphismes locaux.)

Proposition 2.42 *(1) Si $T^\nabla \in \Gamma(T^*M^{\otimes 2} \otimes TM)$ est la torsion de ∇, alors pour tous les $X, Y \in \Gamma(TN)$, nous avons*

$$\overline{\nabla}_X \overline{Y} - \overline{\nabla}_Y \overline{X} - \overline{[X,Y]} = \overline{T^\nabla}(\overline{X}, \overline{Y}) \ .$$

En particulier, si ∇ est sans torsion, alors pour tous les $X, Y \in \Gamma(TN)$,

$$\overline{\nabla}_X \overline{Y} - \overline{\nabla}_Y \overline{X} = \overline{[X,Y]} \ .$$

(2) Si $g \in \Gamma((T^*M)^{\otimes m})$ est parallèle pour ∇, alors pour tous les $X, X_1, \ldots, X_m \in \Gamma(TN)$, nous avons

$$X\big(\overline{g}(\,\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_m}\,)\big) = \sum_{i=1}^m \overline{g}(\,\overline{X_1}, \ldots, \overline{\nabla}_X \overline{X_i}, \ldots, \overline{X_m}\,) \ .$$

(3) Pour tout $Y \in \Gamma(TM)$, notons $\widetilde{Y} \in \Gamma(f^*TM)$ la section définie par $\widetilde{Y}(x) = Y(f(x))$ pour tout $x \in N$. Si $g \in \Gamma((T^*M)^{\otimes m})$ est parallèle pour ∇, alors pour tous les $X \in \Gamma(TN)$ et $X_1, \ldots, X_m \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$X\big(\overline{g}(\,\widetilde{X_1}, \ldots, \widetilde{X_m}\,)\big) = \sum_{i=1}^m \overline{g}(\,\widetilde{X_1}, \ldots, \overline{\nabla}_X \widetilde{X_i}, \ldots, \widetilde{X_m}\,) \ .$$

(4) Pour tous les $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$, nous avons

$$\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{Z} - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{Z} - \overline{\nabla}_{[X,Y]} \overline{Z} = \overline{R^\nabla}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z} \ .$$

Démonstration. Quitte à prendre des cartes locales, nous pouvons supposer que N est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que M est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Fixons $x \in N$.

(1) Notons $T = T^\nabla$. Pour tous les $X, Y \in \Gamma(TN) = \mathrm{C}^\infty(N; \mathbb{R}^n)$, notons que $\overline{X}, \overline{Y} \in \Gamma(f^*TM) = \mathrm{C}^\infty(N; \mathbb{R}^m)$ et choisissons $X', Y' \in \Gamma(TM) = \mathrm{C}^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ tels que

$$X'(f(x)) = \overline{X}(x) = d_x f(X(x)) \quad \text{et} \quad Y'(f(x)) = \overline{Y}(x) = d_x f(Y(x)) \ ,$$

et vérifiant de plus : si $d_x f(X(x)) \neq 0$ alors

$$d_{f(x)} Y' \circ d_x f(X(x)) = d_x \overline{Y}(X(x)) = d_x^2 f(Y(x), X(x)) + d_x f \circ d_x Y(X(x)) \ ,$$

et si $d_x f(Y(x)) \neq 0$ alors

$$d_{f(x)} X' \circ d_x f(Y(x)) = d_x \overline{X}(Y(x)) = d_x^2 f(X(x), Y(x)) + d_x f \circ d_x X(Y(x)) \ .$$

Par définition de la connexion image réciproque sur un fibré image réciproque, nous avons

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X \overline{Y}(x) &= \nabla_{X'} Y'(f(x)) = \nabla_{Y'} X'(f(x)) + [X', Y'](f(x)) + T(X', Y')(f(x)) \\ &= \overline{\nabla}_Y \overline{X}(x) + [X', Y'](f(x)) + \overline{T}(\overline{X}, \overline{Y})(x) \ . \end{aligned}$$

Par les définitions du crochet de Lie et des champs de vecteurs X', Y', et puisque la forme bilinéaire $d_x^2 f$ est symétrique, nous avons

$$\begin{aligned} [X', Y'](f(x)) &= d_{f(x)} Y' \circ X'(f(x)) - d_{f(x)} X' \circ Y'(f(x)) \\ &= d_{f(x)} Y' \circ d_x f(X(x)) - d_{f(x)} X' \circ d_x f(Y(x)) \\ &= d_x f \circ d_x Y \circ X(x) - d_x f \circ d_x X \circ Y(x) \\ &= d_x f\big([X, Y](x)\big) = \overline{[X, Y]}(x) \ . \end{aligned} \tag{$\cdot 33 \cdot$}$$

Le premier résultat en découle.

(2) Pour tous les $X, X_1, \dots, X_m \in \Gamma(TN) = \mathrm{C}^\infty(N;\mathbb{R}^n)$, choisissons $X', X'_1, \dots, X'_m \in \Gamma(TM) = \mathrm{C}^\infty(M;\mathbb{R}^m)$ tels que $X'(f(x)) = d_x f(X(x))$ et

$$X'_i(f(x)) = \overline{X_i}(x) = d_x f(X_i(x)) \ ,$$

et vérifiant de plus, si $d_x f(X(x)) \neq 0$, que

$$d_{f(x)} X'_i \circ d_x f(X(x)) = d_x \overline{X_i}(X(x)) = d_x^2 f(X_i(x), X(x)) + d_x f \circ d_x X_i(X(x)) \ ,$$

pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Notons $\overline{\theta} \in \mathrm{C}^\infty(N)$ l'application

$$z \mapsto \overline{g}_z(\,\overline{X_1}(z), \dots, \overline{X_m}(z)\,) = g_{f(z)}\big(d_z f(X_1(z)), \dots, d_z f(X_m(z))\big) \ ,$$

et $\theta \in \mathrm{C}^\infty(M)$ l'application $z \mapsto g_z(X'_1(z), \dots, X'_m(z))$. Alors par la construction des champs de vecteurs $X'_1, \dots, X'_m$, nous avons $\overline{\theta}(x) = \theta \circ f(x)$ et

$$d_x \overline{\theta}(X(x)) = d_{f(x)} \theta \circ d_x f(X(x)) \ .$$

Donc par définition de la dérivation définie par un champ de vecteurs, et puisque g est parallèle pour ∇,

$$\begin{aligned}
X\big(\overline{g}(\,\overline{X_1}, \dots, \overline{X_m}\,)\big)(x) &= d_x \overline{\theta}(X(x)) = d_{f(x)} \theta\big(d_x f(X(x))\big) = d_{f(x)} \theta\big(X'(f(x))\big) \\
&= X'\big(g(X'_1, \dots, X'_m)\big)(f(x)) \\
&= \sum_{i=1}^m g_{f(x)}\big(X'_1(f(x)), \dots, \nabla_{X'} X'_i(f(x)), \dots, X'_m(f(x))\,\big) \\
&= \sum_{i=1}^m g_{f(x)}\big(\,\overline{X_1}(x), \dots, \overline{\nabla}_X \overline{X_i}(x), \dots, \overline{X_m}(x)\,\big) \\
&= \sum_{i=1}^m \overline{g}(\,\overline{X_1}, \dots, \overline{\nabla}_X \overline{X_i}, \dots, \overline{X_m}\,)(x) \ .
\end{aligned}$$

(3) Soient $X \in \Gamma(TN)$ et $X_1, \dots, X_m \in \Gamma(TM)$. Pour tout $x \in N$, choisissons $X' \in \Gamma(TM)$ tel que $X'(f(x)) = T_x f(X(x))$. Par la proposition 2.37, nous avons

$$\overline{\nabla}_X \widetilde{X_i}(x) = \nabla_{T_x f(X(x))} X_i(f(x)) = \nabla_{X'} X_i(f(x)) \ .$$

Notons $\theta = g(X_1, \dots, X_m)$, qui est une application lisse de M dans $\mathbb{R}$. Donc puisque g est parallèle pour ∇,

$$\begin{aligned}
X\big(\overline{g}(\,\widetilde{X_1}, \dots, \widetilde{X_m}\,)\big)(x) &= X\big(\theta \circ f\big)(x) = T_x(\theta \circ f)(X(x)) = T_{f(x)} \theta \circ T_x f(X(x)) \\
&= T_{f(x)} \theta(X'(f(x))) = X'\big(g(X_1, \dots, X_m)\big)(f(x)) \\
&= \sum_{i=1}^m g_{f(x)}\big(X_1(f(x)), \dots, \nabla_{X'} X_i(f(x)), \dots, X_m(f(x))\,\big) \\
&= \sum_{i=1}^m g_{f(x)}\big(\,\widetilde{X_1}(x), \dots, \overline{\nabla}_X \widetilde{X_i}(x), \dots, \widetilde{X_m}(x)\,\big) \\
&= \sum_{i=1}^m \overline{g}(\,\widetilde{X_1}, \dots, \overline{\nabla}_X \widetilde{X_i}, \dots, \widetilde{X_m}\,)(x) \ .
\end{aligned}$$

(4) Remarquons que puisque $R^\nabla \in \Gamma((T^*M)^{\otimes 3} \otimes TM)$ est un tenseur $(3,1)$ sur M, nous avons bien $\overline{R^\nabla} \in \Gamma((f^*T^*M)^{\otimes 3} \otimes f^*TM)$, donc les deux termes de l'équation sont bien définis.

Rappelons (voir la proposition 2.36) que $\overline{\nabla}$ est une connexion sur le fibré vectoriel f^*TM de base la variété N (dont le fibré vectoriel dual est f^*T^*M). Nous avons donc $R^{\overline{\nabla}} \in \Gamma((T^*N)^{\otimes 2} \otimes f^*T^*M \otimes f^*TM)$, et le terme de gauche de l'affirmation (3) est juste $R^{\overline{\nabla}}(X,Y)\overline{Z}$ par la définition du tenseur de courbure $R^{\overline{\nabla}}$ de la connexion $\overline{\nabla}$. Il s'agit de montrer que

$$R^{\overline{\nabla}}(X,Y)\overline{Z} = \overline{R^\nabla}(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z}\ .$$

Les deux membres étant $\mathrm{C}^\infty(N)$-trilinéaires en X,Y,Z et par le lemme 2.38, nous pouvons supposer, quitte, pour tout $x \in N$, à nous restreindre à un voisinage ouvert de x, qu'il existe des champs de vecteurs $X',Y',Z' \in \Gamma(TM)$ tels que $\overline{X} = X' \circ f$, $\overline{Y} = Y' \circ f$ et $\overline{Z} = Z' \circ f$. Par la démonstration du lemme 2.38, nous pouvons en fait supposer, en travaillant en cartes locales, que X,Y,Z sont des champs de vecteurs coordonnées, donc que $[X,Y](x) = 0$. Notons que par un calcul similaire à celui de la formule $(\cdot 33 \cdot)$, nous avons $[X',Y'](f(x)) = 0$. Alors, par la définition de la connexion image réciproque sur un fibré image réciproque (voir la formule $(\cdot 30 \cdot)$), pour tout z proche de x, nous avons

$$\overline{\nabla}_Y\overline{Z}(z) = \nabla_{T_z f(Y(z))}Z'(f(z)) = \nabla_{\overline{Y}(z)}Z'(f(z)) = \nabla_{Y'(f(z))}Z'(f(z)) = \nabla_{Y'}Z'(f(z))$$

et

$$\begin{aligned}
&\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\overline{Z}(x) - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\overline{Z}(x) - \overline{\nabla}_{[X,Y]}\overline{Z}(x)\\
&= \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\overline{Z}(x) - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\overline{Z}(x)\\
&= \nabla_{X'}\nabla_{Y'}Z'(f(x)) - \nabla_{Y'}\nabla_{X'}Z'(f(x))\\
&= \nabla_{X'}\nabla_{Y'}Z'(f(x)) - \nabla_{Y'}\nabla_{X'}Z'(f(x)) - \nabla_{[X',Y']}Z'(f(x))\\
&= R^\nabla(X',Y')Z'\,(f(x))\ .
\end{aligned}$$

Le résultat en découle, par la définition de $\overline{R^\nabla}$. □

Par la propriété universelle des images réciproques de fibrés vectoriels, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
TN & & \longrightarrow & & TM\\
& \searrow & & \nearrow & \\
\downarrow & & f^*TM & & \downarrow\\
& \swarrow & & & \\
N & & \longrightarrow & & M\ ,
\end{array}$$

où l'application de $f^*TM = \coprod_{x\in N} T_{f(x)}M$ dans $TM = \coprod_{y\in M} T_yM$ associe, pour tout $x \in V$, à l'élément $v \in T_{f(x)}M$ l'élément $v \in T_yM$ où $y = f(x)$, et l'application de TN dans f^*TM est, en restriction à chaque fibre T_xN, l'application linéaire $T_xf : T_xN \to T_xf^*TM = T_{f(x)}M$. Cette application est un isomorphisme de fibrés vectoriels au-dessus de l'identité si f est un C^∞-difféomorphisme. La proposition et la remarque ci-dessous découlent donc aussi (en travaillant localement pour la remarque) de la proposition 2.42.

Proposition 2.43 *Soient M,N deux variétés, $f : N \to M$ un C^∞-difféomorphisme et ∇ une connexion sur M, de tenseurs de torsion T^∇ et de courbure R^∇. Alors les tenseurs de torsion $T^{(Tf)^*\nabla}$ et de courbure $R^{(Tf)^*\nabla}$ de la connexion image réciproque $(Tf)^*\nabla$ sur le fibré tangent à N vérifient, pour tous les $X,Y,Z,W \in \Gamma(TN)$,*

(1) $T^{(Tf)^*\nabla}(X,Y) = f^*\big(T^\nabla((f^{-1})^*X,(f^{-1})^*Y)\big)$,

(2) $R^{(Tf)^*\nabla}(X,Y)Z = f^*\big(R^\nabla((f^{-1})^*X,(f^{-1})^*Y)(f^{-1})^*Z\big)$,

(3) $\big(((Tf)^*\nabla)_W R^{(Tf)^*\nabla}\big)(X,Y,Z) = f^*\big((\nabla_{(f^{-1})^*W}R^\nabla)((f^{-1})^*X,(f^{-1})^*Y,(f^{-1})^*Z)\big)$.

Démonstration. Les deux premières affirmations se vérifient facilement en utilisant la formule (·29·) et le fait que $[X,Y] = f^*\big([(f^{-1})^*X,(f^{-1})^*Y]\big)$ (car $(f^{-1})^* : \Gamma(TN) \to \Gamma(TM)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie).

La dernière affirmation découle facilement de la seconde et des formules (·22·) et (·29·) : en posant pour simplifier $g = f^{-1}$, $R = R^\nabla$, $\nabla' = (Tf)^*\nabla$ et $R' = R^{\nabla'}$, nous avons

$$\begin{aligned}(\nabla'_W R')(X,Y,Z) &= \nabla'_W(R'(X,Y)Z)\\ &\qquad - R'(\nabla'_W X,Y)Z - R'(X,\nabla'_W Y)Z - R'(X,Y)(\nabla'_W Z)\\ &= f^*\big(\nabla_{g^*W}(R(g^*X,g^*Y)(g^*Z))\big)\\ &\qquad - f^*\big(R(\nabla_{g^*W}g^*X,g^*Y)(g^*Z)\big)\\ &\qquad - f^*\big(R(g^*X,\nabla_{g^*W}g^*Y)(g^*Z)\big)\\ &\qquad - f^*\big(R(g^*X,g^*Y)(\nabla_{g^*W}g^*Z)\big)\\ &= f^*\big((\nabla_{g^*W}R)(g^*X,g^*Y)(g^*Z)\ . \quad \square\end{aligned}$$

Remarque 2.44 Si $f : N \to M$ est un C^∞-difféomorphisme local, si ∇ est sans torsion, alors la connexion image réciproque $(Tf)^*\nabla$ est sans torsion, et si g est un tenseur $(m,0)$ sur M qui est parallèle pour ∇, alors le tenseur image réciproque f^*g est parallèle pour $(Tf)^*\nabla$.

- **Transport parallèle d'une connexion.**

Soient M une variété, $\pi : TM \to M$ son fibré tangent, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ∇ une connexion sur un fibré vectoriel ξ de projection $p : E \to M$. Nous noterons $\frac{d}{dt}$ le champ de vecteurs sur I défini par $\frac{d}{dt}f = \dot{f}$ pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(I)$. Pour toute courbe lisse $c : I \to M$ dans M, nous noterons encore ∇ la connexion image réciproque $c^*\nabla$, sur le fibré vectoriel $c^*\xi$ image réciproque de ξ, de la connexion ∇ sur ξ.

Pour tout champ de vecteurs X lisse le long de c à valeurs dans ξ (c'est-à-dire une section lisse de $c^*\xi$, ou encore une application lisse $t \mapsto X(t)$ de I dans E telle que $X(t) \in \xi_{c(t)}$ pour tout $t \in I$), nous dirons que X est *parallèle le long de* c pour la connexion ∇ si

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} X = 0\ .$$

Comme le $\mathrm{C}^\infty(I)$-module $\Gamma(TI)$ est de rang 1, lorsque le vecteur vitesse ne s'annule pas, ceci équivaut à dire que la section X du fibré vectoriel $c^*\xi$ est parallèle pour la connexion $c^*\nabla$ au sens de la remarque (2) de la partie 2.3.2. Nous donnerons une interprétation géométrique de cette notion de champ de vecteurs parallèle dans la remarque (1) ci-dessous.

L'équation $\nabla_{\frac{d}{dt}} X = 0$ s'écrit comme une équation différentielle linéaire du premier ordre. En effet, le fibré vectoriel image réciproque $c^*\xi$ est trivialisable, car I est contractile (voir le corollaire 2.21). Fixons-en une trivialisation, c'est-à-dire un isomorphisme de $c^*\xi$ dans le fibré vectoriel trivial $I \times \mathbb{R}^n \to I$. En utilisant le tenseur de Christoffel Γ de

la connexion $c^*\nabla$ dans cette trivialisation lorsque $\dot{c}$ ne s'annule pas, ou en utilisant des coordonnées locales sinon (voir la formule (· 24 ·)), l'équation $\nabla_{\frac{d}{dt}} X = 0$ s'écrit

$$\dot{X}(t) + \Gamma(t)X(t) = 0$$

où $X : I \to \mathbb{R}^n$ et $\Gamma : I \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ sont des applications lisses. Par les propriétés des solutions des équations différentielles linéaires du premier ordre, pour toute condition initiale (t_0, X_0) où $t_0 \in I$ et $X_0 \in \xi_{t_0}$, il existe donc un et un seul champ de vecteurs $X = X_{t_0, X_0}$ parallèle le long de c à valeurs dans ξ tel que $X(t_0) = X_0$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur la connexion ∇ ni sur le chemin c, pour tous les t_0, t_1 dans I, nous noterons

$$\|_{t_0}^{t_1} : \xi_{t_0} \to \xi_{t_1}$$

l'isomorphisme linéaire $v \mapsto X_{t_0, v}(t_1)$ où $X_{t_0, v}$ est l'unique champ de vecteurs à valeurs dans ξ parallèle le long de c, qui vaut v en t_0. Cet isomorphisme linéaire est appelé le *transport parallèle* le long de c entre les temps t_0 et t_1 pour la connexion ∇.

Notons que, par la propriété de flot des solutions d'équations différentielles linéaires du premier ordre, pour tous les t_0, t_1, t_2 dans I, nous avons

$$\|_{t_1}^{t_2} \circ \|_{t_0}^{t_1} = \|_{t_0}^{t_2} \quad \text{et} \quad (\|_{t_0}^{t_1})^{-1} = \|_{t_1}^{t_0} \ .$$

Rappelons qu'une *courbe lisse par morceaux* dans M est une application continue $c : I \to M$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle qu'il existe une partie discrète S dans I telle que les restrictions de c aux adhérences des composantes connexes du complémentaire de S dans I soient des applications lisses. Si $c : I \to M$ est une courbe lisse par morceaux, pour tous les t_0, t_1 dans I, si $x_0 = t_0 < x_1 < \cdots < x_n = t_1$ sont tels que la restriction de c à $[x_{i-1}, x_i]$ soit lisse pour tout $i = 1, \ldots, n$, alors nous appellerons *transport parallèle* le long de c entre les temps t_0 et t_1 pour la connexion ∇ la composition

$$\|_{t_0}^{t_1} \ = \ \|_{t_0}^{x_1} \ \circ \ \|_{x_1}^{x_2} \ \circ \cdots \circ \ \|_{x_{n-1}}^{x_n} \ .$$

Ceci ne dépend pas du choix d'une telle subdivision de $[t_0, t_1]$.

Remarques. (1) **(Interprétation géométrique du transport parallèle.)** Comme les connexions ont une interprétation géométrique (voir la remarque (7) de la partie 2.3.2), la notion de champ de vecteurs parallèle se comprend géométriquement de la manière suivante.

Soient ξ un fibré vectoriel de projection $p : E \to M$ et H un sous-fibré horizontal du fibré vectoriel $\pi_E : TE \to E$. Une courbe lisse $\gamma : I \to TE$ sera dite *horizontale* si elle est à valeurs dans H.

Soient $c : I \to M$ une courbe lisse et $X : I \to E$ un champ de vecteurs lisse le long de c. Alors $\dot{X} : I \to TE$ est une courbe lisse dans TE. Nous dirons que X est *parallèle le long de c pour le fibré horizontal H* si la courbe $\dot{X} : I \to TE$ est horizontale.

Par définition de la connexion ∇^H associée à une connexion d'Ehresmann linéaire H, avec $\mathrm{pr}_H : TE \to V$ la projection sur le fibré vertical parallèlement au fibré horizontal, nous avons

$$\nabla^H_{\frac{d}{dt}} X = \mathrm{pr}_H(\dot{X}) \ .$$

Ainsi, il est équivalent à demander que X soit parallèle le long de c pour H et que X soit parallèle le long de c pour $\nabla = \nabla^H$.

Il est immédiat de vérifier que la propriété d'être parallèle le long de c est invariant par précomposition par des difféomorphismes d'intervalles : si $\varphi : J \to I$ est un difféomorphisme lisse, alors $X \circ \varphi$ est un champ de vecteurs le long de $c \circ \varphi$ à valeurs dans ξ, qui est parallèle si et seulement si X l'est.

(2) Une connexion ∇ est déterminée par son transport parallèle, de la manière explicite suivante. Pour tous les $x \in M$, $X \in \Gamma(TM)$ et $\sigma \in \Gamma(\xi)$, soit $c :]-\epsilon, +\epsilon[\to M$ une courbe lisse telle que $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = X(x)$ (par exemple un germe de courbe intégrale de X). Alors $t \mapsto \sigma(c(t))$ est un champ de vecteurs lisse le long de c à valeurs dans ξ. Notons $\|$ le transport parallèle le long de c pour la connexion ∇. Alors on peut vérifier que

$$\nabla_X \sigma\ (x) = \lim_{t \to 0,\, t \neq 0} \frac{\|_t^0\ \sigma(c(t))\ -\ \sigma(c(0))}{t}\ , \qquad (\cdot 34 \cdot)$$

où la limite est prise dans l'espace vectoriel ξ_x.

• **Groupes d'holonomie d'une connexion.**

Soient ∇ une connexion sur un fibré vectoriel ξ de base une variété M.

Pour tout $x \in M$, si $c : [0,1] \to M$ est un lacet lisse par morceaux en x (c'est-à-dire une courbe (continue) lisse par morceaux telle que $c(0) = c(1) = x$), alors le transport parallèle le long de c, qui est un isomorphisme linéaire τ_c de ξ_x dans lui-même, est un élément du groupe linéaire $\mathrm{GL}(\xi_x)$, appelé l'*holonomie* (le long) de c pour ∇. Par les propriétés du transport parallèle, l'ensemble des holonomies des lacets lisses par morceaux en x est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\xi_x)$, appelé le *groupe d'holonomie* en x de la connexion ∇, et noté $\mathrm{Hol}(x) = \mathrm{Hol}^{\nabla}(x)$.

Rappelons que deux lacets (continus) $c, d : [0,1] \to M$ en x sont *homotopes* s'il existe une application continue $h : [0,1] \times [0,1] \to M$ telle que $h(t,0) = c(t)$, $h(t,1) = d(t)$ et $h(0,s) = h(1,s) = x$ pour tous les $s, t \in [0,1]$.

Le sous-groupe de $\mathrm{Hol}(x)$ constitué des holonomies des lacets lisses par morceaux en x qui sont homotopes à 0 (c'est-à-dire homotopes au lacet constant en x) est appelé le *groupe d'holonomie restreinte* en x de la connexion ∇, et noté $\mathrm{Hol}_0(x) = \mathrm{Hol}_0^{\nabla}(x)$.

Rappelons que si $\alpha, \beta : [0,1] \to M$ sont deux chemins (continus ou lisses par morceaux), alors le *chemin inverse* de α est le chemin (continu ou lisse par morceaux) $\alpha^{-1} : [0,1] \to M$ défini par $t \mapsto \alpha(1-t)$ et la *concaténation* de α et β est le chemin (continu ou lisse par morceaux) $\alpha \cdot \beta : [0,1] \to M$ défini par $t \mapsto \alpha(2t)$ si $t \leq \frac{1}{2}$ et $t \mapsto \beta(2t-1)$ si $t \geq \frac{1}{2}$.

À isomorphisme près, si M est connexe, les groupes $\mathrm{Hol}(x)$ et $\mathrm{Hol}_0(x)$ ne dépendent pas de x. Plus précisément, si $y \in M$, si $\gamma : [0,1] \to M$ est un chemin lisse de y à x (qui existe plus généralement si x et y sont dans la même composante connexe de M), alors l'application $c \mapsto (\gamma \cdot c) \cdot \gamma^{-1}$ induit un isomorphisme de groupes du groupe d'holonomie (respectivement groupe d'holonomie restreinte) en x sur celui en y.

• **Géodésiques d'une connexion sur une variété.**

Soient M une variété de dimension n et ∇ une connexion sur M.

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et pour toute courbe lisse $c : I \to M$ tracée sur M, nous noterons $\frac{d}{dt}$ le champ de vecteurs sur I défini par $\frac{d}{dt} f = \dot{f}$ pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(I)$, et nous noterons encore ∇ la connexion image réciproque $c^*\nabla$ sur le fibré vectoriel c^*TM image réciproque de TM. Notons que $\dot{c} : t \mapsto \dot{c}(t)$ est un champ de vecteurs de M le long de c. Le champ de vecteurs $\nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c}$ le long de c est appelé *l'accélération covariante* de la courbe c.

Nous dirons qu'une courbe lisse c est une *géodésique* de ∇ si son champ de vecteurs tangents $\dot{c}$ est parallèle le long de c, c'est-à-dire si son accélération covariante est nulle, c'est-à-dire si

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c} = 0 \ .$$

Par l'interprétation géométrique du transport parallèle, une courbe lisse $c : I \to M$ dans M est une géodésique si et seulement si son *accélération* $\ddot{c} : I \to TTM$ est horizontale, c'est-à-dire vérifie $\ddot{c}(t) \in H_{\dot{c}(t)}$ pour tout $t \in I$, où $H \to TM$ est le fibré horizontal associé à la connexion ∇.

Lorsque $\dot{c}(t_0) \neq 0$, quitte à restreindre I à un petit voisinage de t_0, l'application $c : I \to M$ est un plongement et il existe un champ de vecteurs lisse X sur M tel que $X(c(t)) = \dot{c}(t)$ pour tout $t \in I$. Nous avons alors, par la définition des connexions images réciproques sur un fibré image réciproque (voir la formule ($\cdot 30 \cdot$)),

$$\big(\nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c}\big)\ (t) = \big(\nabla_X X\big)\big(c(t)\big) \ .$$

L'écriture abusive $\nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c} = \nabla_{\dot{c}}\ \dot{c}$ est donc souvent employée, en sous-entendant qu'elle vaut 0 à l'instant $t_0 \in I$ si $\dot{c}(t_0) = 0$ et que l'on étend à M (de manière lisse quelconque) le champ de vecteurs $t \mapsto \dot{c}(t)$ le long de la restriction de c à un voisinage de $c(t_0)$, si $t_0 \in I$ vérifie $\dot{c}(t_0) \neq 0$.

Soit $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ une carte locale de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Supposons quitte à réduire I que $c(I)$ est contenu dans U. Notons $\Gamma : x \mapsto \Gamma_x$ le tenseur $(2,1)$ de Christoffel de ∇ dans cette carte locale (qui est un élément de $\Gamma(T^*U^{\otimes 2} \otimes TU) = \Gamma(\mathscr{L}(TU, TU; TU))$. Soient $c^i(t) = x^i(c(t))$ et $\Gamma^k_{i,\,j}(x) = dx^k\big(\Gamma_x(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\big)$ les coordonnées locales de $c(t)$ et Γ_x pour $t \in I$ et $x \in U$ dans cette carte locale (nous avons donc $\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{dc^{\,i}}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $\Gamma_x(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_{1 \leq k \leq n} \Gamma^k_{i,\,j}(x)\ \frac{\partial}{\partial x^k}$). Alors, par la formule ($\cdot 24 \cdot$), l'équation $\nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c} = 0$ s'écrit comme le système suivant d'équations différentielles non linéaires du second ordre, où $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{d^2 c^{\,k}}{dt^2}(t)\ +\ \sum_{1 \leq i,\,j \leq n} \frac{dc^{\,i}}{dt}(t)\ \frac{dc^{\,j}}{dt}(t)\ \Gamma^k_{i,\,j}(c(t)) = 0 \ . \qquad (\cdot 35 \cdot)$$

- **Application exponentielle d'une connexion sur une variété.**

Soient M une variété, $\pi : TM \to M$ son fibré tangent et ∇ une connexion sur M.

Par les propriétés des équations différentielles du second ordre (dont le théorème de dépendance régulière des conditions initiales), voir par exemple [Pau4], il existe un unique couple (U, ϕ), où

- U est un ouvert de $\mathbb{R} \times TM$ contenant $\{0\} \times TM$ et
- $\phi : U \to M$ une application lisse,

tel qu'en définissant, pour tout $v \in TM$, une partie I_v de $\mathbb{R}$ par $I_v \times \{v\} = U \cap (\mathbb{R} \times \{v\})$ et une application $c_v : I_v \to M$ par $c_v(t) = \phi(t, v)$, alors I_v est l'intervalle ouvert maximal de $\mathbb{R}$ tel que $c_v : I_v \to M$ soit l'unique géodésique de ∇ telle que $c_v(0) = \pi(v)$ et $\dot{c}_v(0) = v$. De plus, si $s \neq 0$, nous avons $I_{sv} = s^{-1} I_v$ et $c_{sv}(t) = c_v(st)$ par les propriétés d'homogénéité en temps de la formule ($\cdot 35 \cdot$). Notons que l'ensemble des $v \in TM$ tels que $1 \in I_v$, ou, de manière équivalente, tels que $(1, v) \in U$, est ouvert et contient les vecteurs nuls 0.

Définition 2.45 *Soit ∇ une connexion sur une variété M. L'application $v \mapsto c_v(1)$, définie sur l'ouvert $\{v \in TM\ :\ 1 \in I_v\}$ de TM et à valeurs dans M, est appelée* l'application

exponentielle *de* ∇. *Nous dirons que* ∇ *est* complète *si son application exponentielle est définie sur tout* TM.

Elle est notée exp, ou $\exp^\nabla$ quand il est utile de préciser la connexion. Pour tout $x \in M$, sa restriction à $T_xM \cap U$ est notée $\exp_x$. Cette application est définie et lisse sur un voisinage de 0 dans T_xM.

Proposition 2.46 *Soient* ∇ *une connexion sur une variété* M *et* $x \in M$. *L'application tangente de* $\exp_x$ *en l'origine* 0 *de* T_xM *est l'identité.*

De plus, l'application $v \mapsto (\pi(v), \exp(v))$ *est un* C^∞*-difféomorphisme local d'un voisinage ouvert de la section nulle dans* TM *sur un voisinage ouvert de la diagonale dans* $M \times M$.

Nous avons identifié de manière usuelle l'espace vectoriel T_xM et son espace tangent T_0T_xM en l'origine.

Démonstration. Pour tous les $x \in M$ et $v \in T_xM$, nous avons

$$T_0 \exp_x (v) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp_x(0 + tv) = \frac{d}{dt}_{|t=0} c_{tv}(1) = \frac{d}{dt}_{|t=0} c_v(t) = v \ .$$

Notons θ l'application $v \mapsto (\pi(v), \exp(v))$. Pour tout $x \in M$, soit $v \in TM$ le vecteur nul de T_xM. Notons V le sous-fibré vertical du fibré vectoriel TTM sur TM et H son sous-fibré horizontal défini par la connexion. Alors l'application linéaire $T_v\theta : T_vTM = H_v \oplus V_v \to T_xM \oplus T_xM$ a une écriture par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$, car $V_v = \ker T_v\pi$. Par ce qui précède, C est l'identité de $V_v = T_vT_xM = T_xM$ dans T_xM. L'opérateur linéaire A, qui est la restriction de $T_v\pi$ à H_v, est un isomorphisme linéaire, comme vu dans la remarque (7) de la partie 2.3.2. Donc $T_v\theta$ est inversible, et par le théorème d'inversion locale, θ est un C^∞-difféomorphisme d'un voisinage ouvert de v dans un voisinage ouvert de (x, x). $\square$

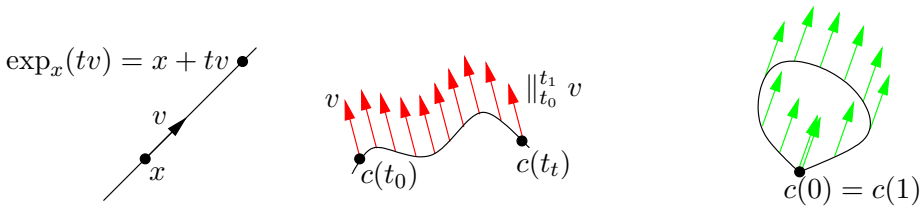
En particulier, par le théorème d'inversion locale, $\exp_x$ est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 dans T_xM à valeurs dans un voisinage ouvert de x dans M. Ceci fournit une carte locale de M au voisinage de x, appelée *carte exponentielle*.

Exemple. Par l'expression en carte locale des équations des géodésiques (voir la formule ($\cdot 35 \cdot$)), les géodésiques de la connexion triviale sur $M = \mathbb{R}^n$ sont, par annulation du tenseur de Christoffel, les segments de droites paramétrés proportionnellement à la longueur d'arc (y compris les applications constantes), et $\exp : TM = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to M = \mathbb{R}^n$ est l'application $(x, v) \mapsto x + v$.

La connexion triviale sur $\mathbb{R}^n$ est en particulier complète.

De plus, si $c : I \to \mathbb{R}^n$ est une courbe lisse et $s, t \in I$, un champ de vecteurs $X : I \to \mathbb{R}^n$ le long de c est parallèle si et seulement si $\nabla_{\frac{d}{dt}} X = \dot{X} = 0$, c'est-à-dire si et seulement s'il est constant. Le transport parallèle le long de c entre les temps s et t, pour la connexion triviale sur $\mathbb{R}^n$, est donc la translation de $c(s)$ à $c(t)$.

Les groupes d'holonomie (et donc les groupes d'holonomie restreinte) de la connexion triviale sur $\mathbb{R}^n$ sont donc réduits à $\{\mathrm{id}\}$.



• **Champs de Jacobi d'une connexion sur une variété.**

Soit ∇ une connexion sur une variété M, de torsion $T = T^\nabla$ et de courbure $R = R^\nabla$. Soit $c : I \to M$ une courbe lisse.

Remarquons que pour tout champ de vecteurs $t \mapsto J(t)$ le long de c, les applications $R_{\dot c,\, J}\dot c : t \mapsto R_{\dot c(t),\, J(t)}(\dot c(t))$ et $T_{\dot c,\, J} : t \mapsto T(\dot c(t), J(t))$ sont encore des champs de vecteurs le long de c.

Un *champ de Jacobi* le long de c est un champ de vecteurs $J : t \mapsto J(t)$ le long de c tel que

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\frac{d}{dt}} J \;-\; R_{\dot c,\, J}\dot c \;-\; \nabla_{\frac{d}{dt}} T_{\dot c,\, J} \;=\; 0\,.$$

Par linéarité en J de cette équation, l'ensemble des champs de Jacobi le long de c est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des champs de vecteurs le long de c. En trivialisant le fibré image réciproque c^*TM de base l'intervalle I, cette équation donne une équation différentielle linéaire du second ordre en J. Donc pour toutes les conditions initiales $t_0 \in I$ et $J_{t_0}, \dot J_{t_0} \in T_{c(t_0)}M$, il existe un et un seul champ de Jacobi $J = J_{c,\, t_0,\, J_{t_0},\, \dot J_{t_0}}$ le long de c tel que $J(t_0) = J_{t_0}$ et $(\nabla_{\frac{d}{dt}} J)(t_0) = \dot J_{t_0}$. En particulier, si M est de dimension n, alors l'espace vectoriel des champs de Jacobi le long de c est de dimension $2n$.

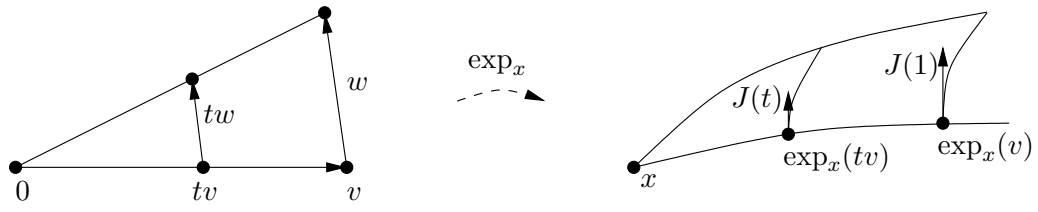
Les champs de Jacobi permettent de calculer l'application tangente de l'exponentielle en d'autres points que 0, et d'étudier le domaine sur lequel l'exponentielle est *étale* (c'est-à-dire un C^∞-difféomorphisme local).

Proposition 2.47 *Pour tous les $x \in M$ et $v, w \in T_xM$, si v appartient au domaine de définition de $\exp_x$, alors*

$$(T_v \exp_x)(w) = J_{c_v,\, 0,\, 0,\, w}(1)$$

est la valeur au temps $t = 1$ de l'unique champ de Jacobi $t \mapsto J(t)$ le long de la géodésique $c_v : t \mapsto \exp_x(tv)$ tel que $J(0) = 0$ et $(\nabla_{\frac{d}{dt}} J)(0) = w$.

Démonstration. Considérons la géodésique $c : t \mapsto \exp_x(tv)$ et le champ de vecteurs lisse $J : t \mapsto (T_{tv} \exp_x)(tw) \in T_{\exp_x(tv)}M = T_{c(t)}M$ le long de c, qui sont définis au temps $t = 1$ par les propriétés de l'application exponentielle.



Par unicité, il suffit de montrer que J vérifie l'équation des champs de Jacobi, et les conditions initiales du théorème. Nous avons $J(0) = (T_0 \exp_x)(0) = 0$.

Nous avons $\dot{J}(0) = T_0 \exp_x(w) + \ddot{c}(0) = w + \ddot{c}(0)$. Soit H le fibré vertical associé à la connexion ∇. Comme w est vertical (il est tangent à la fibre) et $\ddot{c}(0)$ est horizontal (sa projection verticale $\mathrm{pr}_H(\ddot{c}(0)) = (\nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c})(0)$ est nulle car c est une géodésique), nous avons donc

$$(\nabla_{\frac{d}{dt}} J)(0) = \mathrm{pr}_H(\dot{J}(0)) = w \ .$$

Notons $f : (t, s) \mapsto \exp_x(tv + tsw)$, qui est définie et lisse sur un voisinage ouvert N de $[0, 1] \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Reprenons les notations précédant l'énoncé de la proposition 2.42, en particulier celle $\overline{X} : x \mapsto T_x f(X(x))$ pour tout $X \in \Gamma(TN)$ et la notation $\overline{\nabla} = f^*\nabla$ pour la connexion image réciproque par f de ∇. Notons $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial s}$ les champs de vecteurs de coordonnées sur l'ouvert N de $\mathbb{R}^2$. Remarquons que $\dot{c}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, 0) = \overline{\frac{\partial}{\partial t}}(t, 0)$ et $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = \overline{\frac{\partial}{\partial s}}(t, 0)$.

Par la proposition 2.42 (1) et le lemme de Schwarz, nous avons

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}} = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} + \overline{[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}]} + \overline{T}(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial s}}) = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} + \overline{T}(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial s}}) \ . \qquad (\cdot 36 \cdot)$$

De plus, en utilisant respectivement la formule $(\cdot 36 \cdot)$, la proposition 2.42 (4) et le fait que les courbes $t \mapsto \exp_x(tv + tsw)$ sont des géodésiques, nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}} &= \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} + \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \Big(\overline{T}(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial s}}) \Big) \\
&= \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} + \overline{\nabla}_{[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}]} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} + \overline{R}\Big(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial s}}\Big) \overline{\frac{\partial}{\partial t}} + \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \Big(\overline{T}(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial s}}) \Big) \\
&= \overline{R}\Big(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial s}}\Big) \overline{\frac{\partial}{\partial t}} + \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \Big(\overline{T}(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial s}}) \Big) \ .
\end{aligned}$$

D'où

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\frac{d}{dt}} J(t) = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}}(t, 0) = R_{c(t)}(\dot{c}(t), J(t))(\dot{c}(t)) + \nabla_{\frac{d}{dt}} T(\dot{c}, J)(t) \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

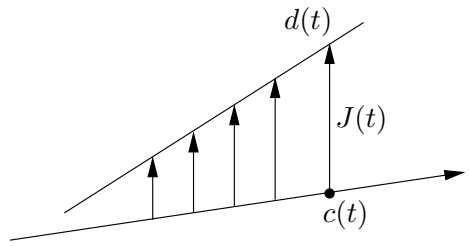
En particulier, puisque $J_{c,0,0,w}$ est le champ de vecteurs nul le long de c si et seulement si $w = 0$, l'application exponentielle $\exp_x$ est un C^∞-difféomorphisme local au voisinage de tout vecteur X de T_xM tel qu'il n'existe pas de champ de Jacobi non nul le long de la géodésique $t \mapsto \exp_x(tX)$ définie par X qui s'annule aux temps 0 et 1.

Soient $c : I \to M$ une géodésique et t_0, t_1 deux éléments distincts de I. Les deux points $c(t_0)$ et $c(t_1)$ sont dit *conjugués* le long de c s'il existe un champ de Jacobi le long de c non nul et s'annulant aux temps $t = t_0$ et $t = t_1$. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 2.47.

Corollaire 2.48 *Si M n'a pas de paire de points conjugués, alors $\exp_x$ est étale (c'est-à-dire un C^∞-difféomorphisme local) sur son domaine de définition.* □

Exemple. La connexion triviale sur $M = \mathbb{R}^n$ étant de courbure nulle, les champs de Jacobi le long d'une géodésique $c : I \to \mathbb{R}^n$ (qui vérifie $c(t) = c_0 + tv_0$ pour certains $c_0, v_0 \in \mathbb{R}^n$)

sont les applications $J : I \to \mathbb{R}^n$ vérifiant l'équation différentielle $\ddot{J} = 0$. Ce sont donc les applications $t \mapsto at + b$ où $a, b \in \mathbb{R}^n$. Remarquons que l'application $d : t \mapsto c(t) + J(t)$ est alors de nouveau une géodésique, et que tout champ de Jacobi le long de c s'écrit sous la forme $J = d - c$ où $d : I \to \mathbb{R}^n$ est une géodésique.



2.4 Exercices supplémentaires

Exercice E.34 Soit ξ un fibré vectoriel réel C^∞ sur une variété M réelle de classe C^∞.

(1) Soient $f : M \to \mathbb{R}^N$ une application C^∞. Montrer que pour tout fibré vectoriel η sur $\mathbb{R}^N$, le fibré vectoriel image réciproque $f^*\eta$ est trivialisable.

(2) Supposons M compacte. Montrer en utilisant une partition de l'unité de M qu'il existe un fibré vectoriel ξ' sur M tel que $\xi \oplus \xi'$ soit trivialisable.

Exercice E.35 Dans ce problème, toutes les variétés sont des variétés réelles C^∞, tous les fibrés vectoriels sont des fibrés vectoriels réels C^∞.

Pour toute variété M, nous noterons par $\mathrm{C}^\infty(M)$ l'anneau des applications lisses (c'est-à-dire de classe C^∞) de M dans $\mathbb{R}$, par $\Gamma(TM)$ le $\mathrm{C}^\infty(M)$-module des champs de vecteurs lisses sur M et pour tout fibré vectoriel ξ sur M, par $\Gamma(\xi)$ le $\mathrm{C}^\infty(M)$-module des sections lisses de ξ. Rappelons que si $X \in \Gamma(TM)$ et $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, nous notons $X(f)$ l'application $x \mapsto T_x f(X(x))$.

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ et $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| < 1\}$ la boule unité ouverte de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$. Soient ξ un fibré vectoriel de rang 1 sur $\mathbb{B}$ et ∇ une connexion sur ξ. Pour tout $x \in \mathbb{B}$, notons ξ_x la fibre de ξ au-dessus de x. Notons R^∇ la courbure de la connexion ∇.

(1) Montrer qu'il existe une section $\sigma_0 \in \Gamma(\xi)$ telle que l'application de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{B})$ dans $\Gamma(\xi)$ définie par $f \mapsto f\sigma_0$ soit un isomorphisme de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{B})$-modules.

Dans la suite, nous identifierons $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{B})$ et $\Gamma(\xi)$ par cet isomorphisme. Pour tout $x \in \mathbb{B}$, nous identifions $\mathbb{R}$ et ξ_x par l'application $u \mapsto u\,\sigma_0(x)$.

(2) Montrer qu'il existe une et une seule 1-forme différentielle α sur $\mathbb{B}$ telle que, pour tous les $X \in \Gamma(T\mathbb{B})$ et $f \in \Gamma(\xi)$,

$$\nabla_X f = X(f) + f\ \alpha(X)\ .$$

(3) Montrer que

$$R^\nabla(X, Y)f = f\ d\alpha(X, Y)$$

pour tous les $X, Y \in \Gamma(T\mathbb{B})$ et $f \in \Gamma(\xi)$. Construire un exemple de connexion sur ξ dont la courbure n'est nulle en aucun point de $\mathbb{B}$.

(4) Pour tout chemin lisse par morceaux $\gamma : [0,1] \to \mathbb{B}$, notons $\tau_\gamma : \xi_{\gamma(0)} \to \xi_{\gamma(1)}$ le transport parallèle le long de γ. Montrer que τ_γ est l'application

$$u \mapsto e^{-\int_0^1 \alpha_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\,dt}\, u\ .$$

(5) Soient M une variété connexe de dimension n, ξ un fibré vectoriel de rang 1 sur M, et ∇ une connexion sur ξ. Supposons qu'il existe un point $x \in M$ tel que, pour tout chemin lisse par morceaux $\gamma : [0,1] \to M$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$, le transport parallèle le long de γ est l'identité. Montrer que le fibré ξ est trivialisable.

(6) Dans cette question, nous supposons $n = 2$, et nous identifions $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ de manière usuelle. Soient Δ un disque fermé de centre $a \in \mathbb{B}$ et de rayon $r > 0$, contenu dans $\mathbb{B}$, et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{B}$ l'application définie par $t \mapsto a + re^{2i\pi t}$.

a) Montrer que τ_γ est l'application $u \mapsto e^{-\int_\Delta d\alpha}\, u$.

b) Supposons qu'il existe un point $x \in \mathbb{B}$ tel que, pour tout chemin lisse par morceaux $\gamma : [0,1] \to \mathbb{B}$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$, le transport parallèle le long de γ est l'identité. Montrer que la courbure R^∇ est l'application nulle.

Exercice E.36 Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq k \geq 1$. On note $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien standard de dimension n. On identifie le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n-k)$ avec son image dans $\mathrm{O}(n)$ par l'application $A \mapsto \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. On note $V_k(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des k-uplets $(v_1, \ldots, v_k)$ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ de norme 1 et deux à deux orthogonaux.

(1) Montrer que $V_k(\mathbb{R}^n)$ est une sous-variété C^∞ de $(\mathbb{R}^n)^k$ qui est C^∞-difféomorphe à la variété quotient $\mathrm{O}(n)/\,\mathrm{O}(n-k)$.

La variété $V_k(\mathbb{R}^n)$ est appelée la *variété de Stiefel* de rang k de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

(2) Montrer que l'application f de $V_k(\mathbb{R}^n)$ dans la variété grassmanienne $\mathscr{G}_k(\mathbb{R}^n)$ de rang k de $\mathbb{R}^n$, qui à $(v_1, \ldots, v_k)$ associe l'espace vectoriel engendré par $v_1, \ldots, v_k$, est une fibration C^∞ de fibre $\mathrm{O}(k)$.

Exercice E.37 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et M une variété de dimension n. Soit ω une *forme volume* sur M (c'est dire que $\omega \in \Gamma(\Lambda^n T^*M)$ est une n-forme différentielle qui ne s'annule en aucun point de M). On rappelle que si ∇ est une connexion sur M et si $\beta \in \Gamma(\Lambda^k T^*M)$ est une k-forme différentielle sur M, alors $\nabla_X \beta \in \Gamma(\Lambda^k T^*M)$ est la k-forme différentielle sur M telle que pour tous les $X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(TM)$,

$$\nabla_X \beta(X_1, \ldots, X_k) = X\big(\beta(X_1, \ldots, X_k)\big) - \sum_{i=1}^k \beta(X_1, \ldots, \nabla_X X_i, \ldots, X_k)\ .$$

(1) Montrer que tout fibré vectoriel sur M admet au moins une connexion. En déduire que M admet au moins une connexion sans torsion.

On fixe dans la suite une connexion sans torsion ∇ sur M.

(2) Montrer qu'il existe une 1-forme différentielle $\lambda \in \Gamma(\Lambda^1 T^*M)$ sur M telle que $\nabla_X \omega = \lambda(X)\omega$ pour tous les champs de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$.

(3) Montrer qu'il existe $\alpha \in \Gamma(\Lambda^1 T^*M \otimes \mathrm{End}(TM))$, une 1-forme différentielle sur M à valeurs dans $\mathrm{End}(TM)$, telle que, pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$\alpha(X)Y = \frac{1}{n+1}\big(\lambda(X)Y + \lambda(Y)X\big) .$$

Montrer que $\nabla + \alpha$ est une connexion sans torsion.

(4) Montrer que pour tout point x de M, il existe des champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_n \in \Gamma(TM)$ vérifiant $\omega(X_1, \ldots, X_n) = 1$ au voisinage de x.

(5) Montrer que ω est parallèle pour la connexion $\nabla + \alpha$.

Exercice E.38 Toutes les variétés sont des variétés réelles C^∞, tous les groupes et algèbres de Lie sont réels, tous les fibrés vectoriels sont des fibrés vectoriels réels C^∞.

Préliminaire. *Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, et ξ_V le fibré vectoriel trivial sur une variété N de fibre V. Pour tous les $f \in \mathrm{C}^\infty(N; V)$ et $X \in \Gamma(TN)$, nous définissons $X(f)$ comme dans le cas $V = \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, une k-*forme différentielle sur N à valeurs dans V *est un élément de $\Gamma(\Lambda^k T^*N \otimes \xi_V)$. Nous définissons la* différentielle extérieure *$d\omega$ de $\omega \in \Gamma(\Lambda^k T^*N \otimes \xi_V)$ comme dans le cas $V = \mathbb{R}$. En particulier, elle commute aux images réciproques, et pour tous les champs de vecteurs $X_0, \ldots, X_k \in \Gamma(TN)$,*

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \ldots, X_k) = &\sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i\big(\omega(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_k)\big) \\ &+ \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \omega\big([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_k\big) . \end{aligned}$$

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et M une variété de dimension n. Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Notons $L_h : g \mapsto hg$ et $R_h : g \mapsto gh$ les translations à gauche et à droite par $h \in G$. La *forme de Maurer-Cartan* (à gauche) $\varpi = \varpi_G$ de G est la 1-forme différentielle sur la variété G à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ définie en posant, pour tous les $g \in G$ et $v \in T_g G$,

$$\varpi_g(v) = T_g L_{g^{-1}}(v) \in \mathfrak{g} .$$

(1) Montrer que ϖ est invariante à gauche. En déduire que pour tout champ de vecteurs Z invariant à gauche sur G, la fonction $\varpi(Z) : G \to \mathfrak{g}$ est constante, égale à $Z(e)$.

(2) Montrer que, pour tous les $g \in G$ et $u, v \in T_g G$,

$$d\varpi_g(u, v) + [\varpi_g(u), \varpi_g(v)] = 0 .$$

Cette égalité s'appelle *l'équation de structure de Maurer-Cartan.*

(3) Notons $\mu : G \times G \to G$ la multiplication $(g, h) \mapsto gh$ et $\iota : G \to G$ l'inversion $g \mapsto g^{-1}$. Soient $g, h \in G$ et $w = (u, v) \in T_{(g,h)}(G \times G) = T_g G \times T_h G$.

a) Montrer que $T_{(g,h)}\mu(w) = T_g R_h(u) + T_h L_g(v)$ et que $T_g\,\iota\,(u) = -T_e R_{g^{-1}} \circ T_g L_{g^{-1}}(u)$.

b) Montrer que

$$\begin{aligned} (\mu^*\varpi)_{(g,h)}(w) &= \mathrm{Ad}(h^{-1})\big(\varpi_g(u)\big) + \varpi_h(v) \\ (\iota^*\varpi)_g(u) &= -\,\mathrm{Ad}(g)(\varpi_g(u)) . \end{aligned}$$

(4) Pour toute application lisse $f : M \to G$, appelons *dérivée de Darboux* (à gauche) de f la 1-forme différentielle sur M à valeurs dans $\mathfrak{g}$ définie par

$$\omega_f = f^*\varpi \ .$$

Soient f_1 et f_2 des applications lisses de M dans G.

a) Posons $h : x \mapsto f_1(x)f_2(x)^{-1}$. Montrer que, pour tout $x \in M$,

$$(h^*\varpi)_x = \mathrm{Ad}(f_2(x))\big((\omega_{f_1})_x - (\omega_{f_2})_x\big) \ .$$

b) Montrer que si M est connexe et si $\omega_{f_1} = \omega_{f_2}$ alors il existe une constante $g_0 \in G$ telle que $f_1 = g_0 f_2$.

(5) Soit ω une 1-forme différentielle sur M à valeurs dans $\mathfrak{g}$ telle que, pour tous les $x \in M$ et $u, v \in T_xM$

$$(d\omega)_x(u, v) + [\omega_x(u), \omega_x(v)] = 0 \ .$$

Soient $\pi_M : M \times G \to M$ et $\pi_G : M \times G \to G$ les projections canoniques $(x, g) \mapsto x$ et $(x, g) \mapsto g$ sur les premier et second facteurs. Notons $\Omega = \pi_M^*\omega - \pi_G^*\varpi$ et $\mathscr{D}_{(x,\,g)} = \ker \Omega_{(x,\,g)} \subset T_{(x,\,g)}(M \times G)$ pour tout $(x, g) \in M \times G$.

a) Montrer que pour tout $(x, g) \in M \times G$, l'application linéaire $T_{(x,\,g)}\pi_M$ du sous-espace vectoriel $\mathscr{D}_{(x,\,g)}$ dans l'espace vectoriel T_xM est un isomorphisme, et que $\mathscr{D} = \bigcup_{(x,\,g)\in M\times G} \mathscr{D}_{(x,\,g)}$ est un sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel tangent à $M \times G$.

b) Montrer que le champs de n-plans $(x,\, g) \mapsto \mathscr{D}_{(x,\,g)}$ sur $M \times G$ est intégrable. Notons $\mathscr{F}$ le feuilletage de $M \times G$ intégrant ce champs de n-plans.

c) Soit $(x, g) \in M \times G$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans M, une application lisse $f : U \to G$ telle que $f(x) = g$, et un voisinage V de (x, g) dans la feuille de $\mathscr{F}$ passant par (x, g) tels que V soit le graphe de f.

d) Montrer que $\omega_{|U} = \omega_f$.

Exercice E.39 Soient $n, p \in \mathbb{N} - \{0\}$. Notons $\mathbb{T}^n$ le groupe de Lie quotient $\mathbb{Z}^n\backslash\mathbb{R}^n$, et $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ le morphisme de projection canonique. Notons $\widetilde{\xi}$ le fibré vectoriel trivial sur $\mathbb{R}^n$ de fibre $\mathbb{R}^p$, et $\widetilde{p} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ la première projection. Notons $\widetilde{\nabla}$ la connexion triviale sur $\widetilde{\xi}$. Soit $\rho : \mathbb{Z}^n \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^p)$ un morphisme de groupes.

(1) Montrer que l'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ définie par $\gamma(x, y) = (x + \gamma, \rho(\gamma)y)$ est propre et libre. Notons $\widetilde{\pi} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to E = \mathbb{Z}^n\backslash(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$ la projection canonique.

(2) Montrer que $\widetilde{p}$ passe au quotient en une application $p : E = \mathbb{Z}^n\backslash(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) \to \mathbb{T}^n = \mathbb{Z}^n\backslash\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique structure de fibré vectoriel ξ de projection p telle que $(\widetilde{\pi}, \pi)$ soit un morphisme de fibrés vectoriels de $\widetilde{\xi}$ dans ξ.

(3) Montrer que pour toute section $\sigma \in \Gamma(\xi)$, il existe une et une seule section $\widetilde{\sigma} \in \Gamma(\widetilde{\xi})$ telle que $\sigma \circ \pi = \widetilde{\pi} \circ \widetilde{\sigma}$. Montrer qu'il existe une et une seule connexion ∇ sur ξ telle que pour tous les $X \in \Gamma(T\mathbb{T}^n)$ et $\sigma \in \Gamma(\xi)$,

$$(\nabla_X \sigma) \circ \pi = \widetilde{\pi} \circ (\widetilde{\nabla}_{\pi^*X}\, \widetilde{\sigma}) \ .$$

(4) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $c_i : [0,1] \to \mathbb{T}^n$ est l'application $t \mapsto \pi(t\, e_i)$, calculer l'holonomie pour la connexion ∇ du lacet c_i (c'est-à-dire le transport parallèle le long de c_i).

(5) Supposons dans cette question que $n = 1$. À quelle condition sur ρ le fibré vectoriel ξ est-il trivialisable ?

2.5 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.32 (1) Si $b \mapsto \langle \cdot\,, \cdot \rangle_b$ est une métrique euclidienne (respectivement hermitienne) sur ξ, alors l'application de ξ dans ξ^* (respectivement $\overline{\xi}^*$), définie par

$$x \mapsto \{y \mapsto \langle x, y \rangle\}$$

est un isomorphisme.

(2) Notons $p : E \to M$ la projection de ξ. Soit g une métrique euclidienne (respectivement hermitienne) sur le fibré vectoriel ξ. Pour tout $x \in M$, notons ξ''_x l'orthogonal de ξ'_x pour g_x. Alors $E'' = \bigcup_{x \in M} \xi''_x$ est une sous-variété lisse de E, et l'application $p_{|E''} : E'' \to M$ définit un sous-fibré vectoriel ξ'' de ξ. Clairement, l'application évidente de $\xi' \oplus \xi''$ dans ξ (définie par $(v, w) \mapsto v + w$) est un isomorphisme de fibrés vectoriels.

Schème E.33 La formule est immédiate par la propriété (dans la proposition 2.34) de commutation avec l'unique contraction sur $\xi^* \otimes \xi$. Mais voici une autre méthode.

Rappelons que nous identifions $\xi^* \otimes \xi$ et $\mathrm{End}(\xi)$ par l'unique isomorphisme de fibrés vectoriels tel que, pour tous les $\ell \in \Gamma(\xi^*)$ et $\sigma \in \Gamma(\xi)$,

$$\ell \otimes \sigma \mapsto \{\sigma' \mapsto \ell(\sigma')\sigma\}\ .$$

Par définition, la connexion sur $\mathrm{End}(\xi)$ définie par ∇ est la connexion $\nabla^* \otimes \nabla$. Nous avons, pour tout $u = \ell \otimes \sigma$, où $\ell \in \Gamma(\xi)$ et $\sigma, \sigma' \in \Gamma(\xi)$,

$$\begin{aligned}
(\nabla^* \otimes \nabla)_X\, u\,(\sigma') &= (\nabla^*_X \ell) \otimes \sigma\,(\sigma') + \ell \otimes (\nabla_X \sigma)\,(\sigma') \\
&= (\nabla^*_X \ell)(\sigma')\,\sigma + \ell(\sigma')\,\nabla_X \sigma \\
&= X(\ell(\sigma'))\,\sigma - \ell(\nabla_X \sigma')\,\sigma + \ell(\sigma')\,\nabla_X \sigma \\
&= \nabla_X(\ell(\sigma')\sigma) - \ell(\nabla_X \sigma')\,\sigma = \nabla_X(u(\sigma')) - u(\nabla_X \sigma')\ .
\end{aligned}$$

Schème E.34 (1) Comme $\mathbb{R}^N$ est contractile, tout fibré vectoriel sur $\mathbb{R}^N$ est trivialisable. L'image réciproque d'un fibré trivialisable est trivialisable : si $\phi : E \to M \times F$ est une trivialisation d'un fibré vectoriel ξ de projection $p : E \to M$ et si $f : N \to M$ est une application lisse, alors l'application ϕ' de l'espace total du fibré image réciproque $f^*\xi$ à valeurs dans $N \times F$ définie par

$$\forall\, x \in N,\ \ \forall v \in (f^*\xi)_x = \xi_{f(x)},\ \ \phi'(v) = (x, \mathrm{pr}_2 \circ \phi\,(v))$$

est une trivialisation de $f^*\xi$. Le résultat en découle.

(2) Notons $p : E \to M$ la projection de ξ, n le rang de ξ et m la dimension de M. Par compacité, soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de M tel qu'il existe une carte locale (U_i, φ_i) de M, de domaine U_i et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, et une trivialisation locale $\phi_i : p^{-1}(U_i) \to$

$U_i \times \mathbb{R}^n$ de ξ au-dessus de U_i. Soit $(\theta_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité de M subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de M. Considérons le fibré vectoriel trivial η sur $(\mathbb{R}^m)^I$ de fibre $(\mathbb{R}^n)^I$. L'application $f : x \mapsto (\theta_i(x)\varphi_i(x))_{i\in I}$ est un plongement de M dans $(\mathbb{R}^m)^I$, et $v \mapsto (f(p(v)), \mathrm{pr}_2 \circ \phi_i(v))_{i\in I}$ un plongement de E dans $(\mathbb{R}^m)^I \times (\mathbb{R}^n)^I$, qui est un isomorphisme linéaire de la fibre ξ_x sur la fibre $\eta_{f(x)}$ pour tout $x \in M$. Donc ξ est isomorphe à un sous-fibré vectoriel du fibré image réciproque $f^*\eta$. La question (1) et l'exercice E.32 (2) concluent.

Schème E.35 (1) Puisque la boule $\mathbb{B}$ est contractile, tout fibré vectoriel sur $\mathbb{B}$ est trivialisable. Soient E l'espace total de ξ et $\theta : E \to \mathbb{B} \times \mathbb{R}$ une trivialisation du fibré vectoriel ξ (qui est de rang 1). Posons $\sigma_0 : x \mapsto \theta^{-1}(x, 1)$. Alors σ_0 est une section lisse de ξ. Par linéarité de θ sur les fibres, toute section lisse σ s'écrit de la forme $f\sigma_0$ où $f : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ est une application qui est lisse, car $f = \mathrm{pr}_2 \circ \theta \circ \sigma$, où $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{B} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la seconde projection. Cette écriture est unique, car σ_0 ne s'annule en aucun point. Le résultat en découle.

(2) Pour tout $X \in \Gamma(T\mathbb{B})$, notons f_X l'unique élément de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{B})$ tel que $\nabla_X \sigma_0 = f_X \sigma_0$. Par les propriétés des connexions, l'application $X \mapsto f_X$ est $\mathrm{C}^\infty(M)$-linéaire, donc par le lemme de tensorialité, il existe une unique 1-forme différentielle α sur $\mathbb{B}$ telle que $\alpha_x(X(x)) = f_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{B}$.

Par les propriétés des connexions, nous avons

$$\nabla_X(f\sigma_0) = X(f)\sigma_0 + f\nabla_X\sigma_0 = \big(X(f) + f\,\alpha(X)\big)\sigma_0 \,.$$

Le résultat en découle, par l'identification entre $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{B})$ et $\Gamma(\xi)$.

(3) En utilisant le fait que $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ et que $Z(gh) = Z(g)h + gZ(h)$ pour tous les $g, h \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{B})$ et $Z \in \Gamma(T\mathbb{B})$, nous avons

$$R^\nabla(X, Y)f = f\,\big(X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])\big).$$

Par une formule vue en cours, nous avons $d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$. Le premier résultat en découle.

Soit $\alpha = x_1 dx_2$, qui est une 1-forme différentielle sur $\mathbb{B}$, en notant $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Alors $d\alpha = dx_1 \wedge dx_2$, et si f est la fonction constante 1 et X, Y les champs de vecteurs constants de valeurs e_1, e_2, alors $R^\nabla(X, Y)f$ est la fonction constante 1 sur $\mathbb{B}$.

(4) Un champ de vecteurs lisse par morceaux le long de γ à valeurs dans ξ est une application $X : t \mapsto y(t)\sigma_0(\gamma(t))$, où $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est lisse par morceaux. Par définition, il est parallèle le long de γ si $\nabla_{\frac{d}{dt}} X = 0$, c'est-à-dire par la question (2) si, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t)\,\alpha_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)) = 0 \,.$$

La solution de cette équation différentielle linéaire du premier ordre de condition initiale $y(0) = u$ est $y : t \mapsto e^{-\int_0^t \alpha_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))}\, u$. Comme $\tau_\gamma(u) = y(1)$, le résultat en découle.

(5) Pour tout $y \in M$, notons ξ_y la fibre de ξ au-dessus de y. Notons $p : E \to M$ la projection de ξ.

Fixons v_0 un élément non nul de ξ_x. Pour tout $y \in M$, soit γ_y un chemin lisse de y à x (qui existe par la connexité de M). Pour tout $u \in \xi_y$, notons $f(u)$ l'unique réel

tel que $\tau_{\gamma_y}(u) = f(u)\, v_0$. L'application f ne dépend pas du choix du chemin γ_y, car par l'hypothèse, si γ'_y est un autre chemin lisse de y à x, alors $\tau_{\gamma_y} \circ \tau_{\gamma'_y}^{-1}$, qui est le transport parallèle le long du chemin concaténé du chemin inverse de γ' et de γ, est l'application identité de ξ_x.

Montrons que f est une application lisse en tout point $y \in M$. Considérons une carte locale $\varphi : U \to \mathbb{B}$ de M en y à valeurs dans $\mathbb{B}$ telle que $\varphi(y) = 0$. Quitte à remplacer ξ par $(\varphi^{-1})^*\xi_{|U}$, nous pouvons supposer que $M = \mathbb{B}$ et que $y = 0$. Pour tout $z \in \mathbb{B}$, notons $r_z : [0,1] \to \mathbb{B}$ l'application définie par $t \mapsto (1-t)z$, qui est un chemin lisse de z à $y = 0$, de vecteur vitesse $-z$. Par composition avec τ_{γ_y}, il suffit de montrer que l'application $u \mapsto \tau_{r_{p(u)}}(u)$ de E dans ξ_y est lisse. Or, par la question (2), il existe une 1-forme différentielle α sur $\mathbb{B}$ telle que

$$\tau_{r_z} : u \mapsto e^{-\int_0^1 \alpha_{(1-t)z}(-z)\, dt}\, u \ ,$$

qui est lisse en z.

Notons $\theta : E \to M \times \mathbb{R}$ l'application $u \mapsto (p(u), f(u))$. Il est immédiat de vérifier que θ est une trivialisation de ξ.

(6) a) Le résultat découle de la formule de Stokes et de la question (4).

b) Pour tout disque fermé Δ contenu dans $\mathbb{B}$, en prenant un chemin lisse de x à un point du bord de Δ, et par la propriété de composition des transports parallèles, l'hypothèse dit que le transport parallèle le long du bord de Δ est l'identité. Par la question a), nous avons donc $e^{\int_\Delta d\alpha} = 1$, donc $\int_\Delta d\alpha = 0$. Ceci implique que la 2-forme différentielle $d\alpha$ est nulle, donc par la question (3) que la courbure de ∇ est nulle.

Schème E.36 (1) Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Le groupe de Lie compact $\mathrm{O}(n)$ agit diagonalement sur $(\mathbb{R}^n)^k$ par

$$(g, (v_1, \dots, v_k)) \mapsto (gv_1, \dots, gv_k) \ .$$

Cette action est lisse, car polynomiale. L'orbite de $(e_1, \dots, e_k)$ est égale à $V_k(\mathbb{R}^n)$, car elle est contenue dans $V_k(\mathbb{R}^n)$ puisque $\mathrm{O}(n)$ préserve l'orthogonalité et la norme, et puisque tout k-uplet de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux peut être prolongé en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (en lui rajoutant une base orthonormée de l'orthogonal de l'espace qu'il engendre), et comme $\mathrm{O}(n)$ agit (simplement) transitivement sur l'ensemble des bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$. Puisque $\mathrm{O}(n)$ est compact, son orbite $\mathrm{O}(n)\cdot(e_1, \dots, e_k)$ est compacte, donc localement fermée, donc est une sous-variété de $(\mathbb{R}^n)^k$ par le théorème 1.62 (2). Puisque le stabilisateur du point $(e_1, \dots, e_k)$ est le sous-groupe $\mathrm{O}(n-k)$, l'application orbitale en $(e_1, \dots, e_k)$ induit donc un C^∞-difféomorphisme de $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k)$ dans $\mathrm{O}(n)\cdot(e_1, \dots, e_k) = V_k(\mathbb{R}^n)$, par le théorème 1.62 (3).

(2) Identifions le groupe orthogonal $\mathrm{O}(k)$ avec son image dans $\mathrm{O}(n)$ par l'application $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$. Les actions par translations à droite des sous-groupes $\mathrm{O}(k)$ et $\mathrm{O}(n-k)$ sur $\mathrm{O}(n)$ commutent. Donc celle de $\mathrm{O}(k)$ induit par passage au quotient une action lisse de $\mathrm{O}(k)$ sur $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k)$. Cette action est libre et propre (car $\mathrm{O}(k)$ est compact), donc la projection canonique

$$\pi : \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k) \ \to \ \big(\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k)\big)/\mathrm{O}(k) = \mathrm{O}(n)/\big(\mathrm{O}(n-k) \times \mathrm{O}(k)\big)$$

est une fibration de fibre $\mathrm{O}(k)$, par un résultat du cours. Les applications d'évaluation en $a = (e_1, \dots, e_k)$ et en $b = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ induisent respectivement des difféomorphismes $\Theta_a : \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k) \to V_k(\mathbb{R}^n)$ et $\Theta_b : \mathrm{O}(n)/\big(\mathrm{O}(n-k) \times \mathrm{O}(k)\big) \to \mathscr{G}_k(\mathbb{R}^n)$ rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k) & \xrightarrow{\Theta_a} & V_k(\mathbb{R}^n) \\ \pi \downarrow & & \downarrow f \\ \mathrm{O}(n)/\big(\mathrm{O}(n-k) \times \mathrm{O}(k)\big) & \xrightarrow{\Theta_b} & \mathscr{G}_k(\mathbb{R}^n) \ . \end{array}$$

Le résultat en découle.

Schème E.37 (1) Soit $p : E \to M$ la projection d'un fibré vectoriel ξ sur M. Notons $V \to E$ le sous-fibré vectoriel vertical du fibré tangent $TE \to E$ de E (noyau du morphisme de fibrés vectoriels $Tp : TE \to TM$). Nous avons vu qu'il existe au moins une métrique euclidienne sur le fibré vectoriel $TE \to E$. Alors le sous-fibré vectoriel $H = V^\perp$ de $TE \to E$ orthogonal à V est un sous-fibré lisse supplémentaire à V. Le sous-espace H_v dépend linéairement de v, comme V_v (voir le lemme 2.39), et donc définit par la proposition 2.40 une connexion ∇ sur ξ, en posant, pour tout $x \in M$,

$$\nabla_X \sigma(x) = \mathrm{pr}_H \circ T_x\sigma(X(x)) \ ,$$

où $\mathrm{pr}_H : TE \to V$ est, en restriction à T_vE pour tout $v \in E$, la projection sur V_v parallèlement à H_v.

Certes, on pouvait répondre ensuite que toute variété admet au moins une métrique riemannienne, et que la connexion de Levi-Civita de cette métrique riemannienne est sans torsion, mais on n'était pas sensé utiliser ce résultat. Soit ∇ une connexion sur M, qui existe comme nous venons de le voir. Soit T^∇ le tenseur $(2,1)$ de torsion de ∇. Par la structure d'espace affine sur $\Gamma(T^*M \otimes \mathrm{End}(TM))$ de l'ensemble des connexions, l'application $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y - \frac{1}{2}T(X,Y)$ est encore une connexion, et il est immédiat de montrer qu'elle est sans torsion.

[Autre méthode : Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement localement fini de M par des ouverts distingués pour un fibré vectoriel ξ sur M de projection $p : E \to M$. Soient $\phi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$ une trivialisation locale de ξ au-dessus de U_i, et $\nabla^{(i)}$ la connexion de $\xi_{|U_i}$ image réciproque par ϕ_i de la connexion triviale sur U_i, qui est sans torsion. Soit $(\varphi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$. Pour tous les $X \in \Gamma(TM)$ et $\sigma \in \Gamma(\xi)$, notons

$$\nabla_X \sigma = \sum_{i\in I} \varphi_i \nabla^{(i)}_{X_{|U_i}}(\sigma_{|U_i}) \ ,$$

(en étendant par la section nulle l'application $\varphi_i \nabla^{(i)}_{X_{|U_i}}(\sigma_{|U_i})$ en dehors de U_i), qui est bien une connexion car $\sum_{i\in I} \varphi_i = 1$ et par la structure affine de l'espace des connexions, et puisque la notion de connexion est locale. Il est immédiat que ∇ est sans torsion, car les $\nabla^{(i)}$ le sont.]

(2) Puisque $\nabla_X \omega$ est une n-forme différentielle, puisque ω ne s'annule en aucun point de M, et puisque l'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n est de dimension 1, il existe une unique application lisse $\lambda(X) : M \to \mathbb{R}$ telle $\nabla_X \omega = \lambda(X)\,\omega$. Puisque $X \mapsto \nabla_X \omega$ est $\mathrm{C}^\infty(M)$-linéaire et par unicité, l'application

$X \mapsto \lambda(X)$ de $\Gamma(TM)$ dans $\mathrm{C}^\infty(M)$ est aussi $\mathrm{C}^\infty(M)$-linéaire. Par le lemme de tensorialité, elle définit donc une 1-forme différentielle sur M, qui répond au problème.

(3) L'application $(X,Y) \to \alpha(X)Y$ ainsi définie est $\mathrm{C}^\infty(M)$-bilinéaire, donc définit bien, par lemme de tensorialité, un élément de $\Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$, c'est-à-dire une 1-forme différentielle à valeurs dans $\mathrm{End}(TM)$, ou encore un tenseur $(2,1)$ sur M. Par la structure d'espace affine sur $\Gamma(T^*M \otimes \mathrm{End}(TM))$ de l'ensemble des connexions, $\nabla + \alpha$ est une connexion, et comme l'application $(X,Y) \to \alpha(X)Y$ est symétrique et ∇ est sans torsion, la connexion $\nabla + \alpha$ est aussi sans torsion :

$$(\nabla + \alpha)_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X)Y = \nabla_Y X + [X,Y] + \alpha(Y)X = (\nabla + \alpha)_Y X + [X,Y] \ .$$

(4) Par la trivialité locale du fibré tangent, pour tout point x_0 de M, il existe une carte locale au voisinage de x_0 de domaine U et une base $(Z_1, \dots, Z_n)$ du $\mathrm{C}^\infty(U)$-module $\Gamma(TU)$. Soit $\phi \in \mathrm{C}^\infty(M)$ nulle en dehors de U et valant 1 sur un voisinage de x_0. Posons $Y_1 = \phi Z_1, \dots, Y_n = \phi Z_n$ (étendus par 0 en dehors de U). Comme ω est une forme volume, la fonction lisse $f = \omega(Y_1, \dots, Y_n)$ ne s'annule pas sur un voisinage de x_0. Posons alors $X_1 = \frac{1}{f} Y_1$ et $X_i = Y_i$ pour $i > 1$, qui conviennent.

(5) Puisque la propriété $(\nabla + \alpha)_X \omega = 0$ est locale, nous pouvons supposer par la question précédente qu'il existe une base $(X_1, \dots, X_n)$ du $\mathrm{C}^\infty(M)$-module $\Gamma(TM)$ telle que $\omega(X_1, \dots, X_n) = 1$. Il suffit de montrer que, pour tout X, nous avons

$$((\nabla + \alpha)_X \omega)(X_1, \dots, X_n) = 0 \ .$$

En écrivant $X = \sum_{i=1}^n f_i X_i$ dans la base $(X_1, \dots, X_n)$, où les f_i appartiennent à $\mathrm{C}^\infty(M)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&((\nabla + \alpha)_X \omega)(X_1, \dots, X_n) \\
&= X(\omega(X_1, \dots, X_n)) - \sum_{i=1}^n \omega(X_1, \dots, (\nabla + \alpha)_X X_i, \dots, X_n) \\
&= (\nabla_X \omega)(X_1, \dots, X_n) - \sum_{i=1}^n \omega(X_1, \dots, \alpha(X) X_i, \dots, X_n) \\
&= \lambda(X)\omega(X_1, \dots, X_n) - \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \omega(X_1, \dots, \lambda(X)X_i + \lambda(X_i)X, \dots, X_n) \\
&= \lambda(X) - \frac{1}{n+1} \Big(\lambda(X) \sum_{i=1}^n \omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) + \sum_{i=1}^n \omega(X_1, \dots, \lambda(X_i) f_i X_i, \dots, X_n) \Big) \\
&= \lambda(X) - \frac{1}{n+1} \Big(\lambda(X) n + \sum_{i=1}^n \lambda(X_i) f_i \Big) \\
&= \lambda(X) - \frac{1}{n+1} \big(\lambda(X) n + \lambda(X) \big) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Schème E.38 Attention : la définition de la différentielle extérieure donnée en préliminaire ne fonctionnerait pas pour des formes différentielles à valeurs dans un fibré vectoriel non trivial.

(1) Pour tous les $g, h \in G$ et $v \in T_gG$, nous avons

$$\begin{aligned}((L_h)^*\varpi)_g(v) &= \varpi_{hg}(T_gL_h(v)) = T_{hg}L_{(hg)^{-1}}(T_gL_h(v)) = T_g(L_{(hg)^{-1}} \circ L_h)(v) \\ &= T_gL_{g^{-1}}(v) = \varpi_g(v) \ .\end{aligned}$$

En particulier, pour tous les $h \in G$ et $v \in \mathfrak{g} = T_eG$, nous avons $\varpi_h(T_eL_h(v)) = v$. Donc pour tout champ de vecteurs Z invariant à gauche sur G, la fonction $\varpi(Z) : G \to \mathfrak{g}$ est constante, égale à $Z(e)$.

(2) Soient X et Y les champs de vecteurs invariants à gauche sur G tels que $X(g) = u$ et $Y(g) = v$. Montrons que

$$d\varpi(X, Y) + [\varpi(X), \varpi(Y)] = 0 \ ,$$

ce qui conclut. Or, en utilisant le fait que les fonctions $\varpi(Y)$ et $\varpi(X)$ sont constantes, le fait que le champ de vecteurs $[X, Y]$ est aussi invariant à gauche, et le fait que $X \mapsto X(e)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche à valeurs dans $\mathfrak{g}$, nous avons

$$\begin{aligned}d\varpi(X, Y) &= X(\varpi(Y)) + Y(\varpi(X)) - \varpi([X, Y]) = -[X, Y](e) = -[X(e), Y(e)] \\ &= -[\varpi(X), \varpi(Y)] \ .\end{aligned}$$

(3) a) Nous avons vu en cours que, pour tous les $u, v \in T_eG$,

$$T_{(e,\,e)}\mu\,(u, v) = u + v \quad \text{et} \quad T_e\iota\,(u) = -u \ .$$

Le résultat s'y ramène par dérivation des fonctions composées, car pour tous les $g, h \in G$, en notant $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : G \times G \to G$ les projections sur le premier et second facteur,

$$\mu = R_h \circ L_g \circ \mu \circ ((L_{g^{-1}} \circ \mathrm{pr}_1) \times (R_{h^{-1}} \circ \mathrm{pr}_2)) \ ,$$

et

$$\iota = R_{g^{-1}} \circ \iota \circ L_{g^{-1}} \ .$$

b) Nous avons, par les questions (3) a) et (1), puisque les translations à droite et à gauche commutent et par la définition de la représentation Ad,

$$\begin{aligned}(\mu^*\varpi)_{(g,\,h)}(w) &= \varpi_{gh}(T_{(g,\,h)}\mu(w)) = \varpi_{gh}(T_gR_h(u) + T_hL_g(v)) \\ &= T_{gh}L_{(gh)^{-1}}(T_gR_h(u)) + \varpi_{gh}(T_hL_g(v)) \\ &= T_hL_{h^{-1}} \circ T_eR_h(T_gL_{g^{-1}}(u)) + ((L_g)^*\varpi)_h(v) \\ &= \ \mathrm{Ad}(h^{-1})\big(\varpi_g(u)\big) + \varpi_h(v) \ .\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}(\iota^*\varpi)_g(u) &= \varpi_{g^{-1}}(T_g\iota\,(u)) = -T_{g^{-1}}L_g(T_eR_{g^{-1}} \circ T_gL_{g^{-1}}(u)) \\ &= -\,\mathrm{Ad}(g)(\varpi_g(u)) \ .\end{aligned}$$

(4) a) Notons que $h = \mu \circ (f_1 \times (\iota \circ f_2))$. Pour tous les $x \in M$ et $v \in T_x M$, nous avons donc par la question (3)

$$\begin{aligned}(h^*\varpi)_x(v) &= ((f_1 \times (\iota \circ f_2))^* \mu^* \varpi)_x(v) = (\mu^*\varpi)_{(f_1(x),\, f_2(x)^{-1})}(T_x f_1(v), T_{f_2(x)}\iota \circ T_x f_2(v)) \\ &= \mathrm{Ad}(f_2(x))\big(\varpi_{f_1(x)}(T_x f_1(v))\big) + \varpi_{f_2(x)^{-1}}(T_{f_2(x)}\iota \circ T_x f_2(v)) \\ &= \mathrm{Ad}(f_2(x))\big((f_1^*\varpi)_x(v)\big) + (\iota^*\varpi)_{f_2(x)}(T_x f_2(v)) \\ &= \mathrm{Ad}(f_2(x))\big((f_1^*\varpi)_x(v) - (f_2^*\varpi)_x(v)\big)\ .\end{aligned}$$

b) Par la question précédente, nous avons

$$h^*\varpi = (\mathrm{Ad} \circ f_2)(\omega_{f_1} - \omega_{f_2}) = 0\ .$$

Par la définition de la forme de Maurer-Cartan (les translations à gauche étant des difféomorphismes), pour tout $v \in TG$, le vecteur $\varpi(v)$ est nul si et seulement si v est nul. Donc $T_x h(v) = 0$ pour tout $v \in T_x M$. Puisque M est connexe, ceci n'est possible que si h est constante, ce qui montre le résultat.

(5) a) Montrons tout d'abord que $T_{(x,\,g)}\pi_M$ est injective. Soit (u, v) un élément de

$$\mathscr{D}_{(x,\,g)} = \{(u, v) \in T_x M \times T_g G \ :\ \omega_x(u) = \varpi_g(v)\}$$

tel que $T_{(x,\,g)}\pi_M(u, v) = 0$. Alors $u = T_{(x,\,g)}\pi_M(u, v) = 0$, donc $\varpi_g(v) = \omega_x(u) = 0$, donc $v = 0$ (car les translations à gauche sont des difféomorphismes). Donc $(u, v) = 0$, et le résultat en découle.

Montrons maintenant que $T_{(x,\,g)}\pi_M$ est surjective. Soit $u \in T_x M$, posons

$$v = (T_g L_{g^{-1}})^{-1}(\omega_x(u))\ ,$$

qui appartient à $T_g G$. Alors $\omega_x(u) = \varpi_g(v)$ par la définition de la forme de Maurer-Cartan, et $T_{(x,\,g)}\pi_M(u, v) = u$, ce qui montre le résultat.

Notons que Ω est un morphisme de fibrés vectoriels du fibré tangent $T(M \times G)$ dans le fibré vectoriel trivial $\xi_{\mathfrak{g}}$. Puisqu'il est de rang constant n par ce qui précède, et par l'exemple (3) de la partie 2.2.2, son noyau est un sous-fibré vectoriel du fibré tangent $T(M \times G)$.

b) Nous allons utiliser le critère d'intégrabilité de Frobenius. Soient U un ouvert de M et X, Y deux champs de vecteurs sur U tels que $\Omega(X) = \Omega(Y) = 0$. Montrons que $\Omega([X, Y]) = 0$ en tout point de U, ce qui conclut puisque $\mathscr{D} = \ker \Omega$. Puisque les images réciproques commutent aux crochets de Lie des champs de vecteurs et aux différentielles extérieures, par la question (2) et la propriété analogue pour la forme différentielle ω, et par la définition de Ω qui implique que $\pi_M^*\omega = \pi_G^*\varpi + \Omega$, nous avons, en tout point de U,

$$\begin{aligned}d\Omega(X, Y) &= d\pi_M^*\omega(X, Y) - d\pi_G^*\varpi(X, Y) = \pi_M^* d\omega(X, Y) - \pi_G^* d\varpi(X, Y) \\ &= -[\pi_M^*\omega(X), \pi_M^*\omega(Y)] + [\pi_G^*\varpi(X), \pi_G^*\varpi(Y)] \\ &= -[\pi_G^*\varpi(X), \Omega(Y)] - [\Omega(X), \pi_G^*\varpi(Y)] - [\Omega(X), \Omega(Y)] = 0\ .\end{aligned}$$

Donc

$$\Omega([X, Y]) = X(\Omega(Y)) - Y(\Omega(X)) - d\Omega(X, Y) = 0\ .$$

Le résultat en découle.

c) Soit $\mathscr{F}_{(x,g)}$ la feuille locale passant par (x,g) du feuilletage $\mathscr{F}$ auquel $\mathscr{D}$ est tangent en tout point. Par le théorème d'inversion locale, la restriction de π_M à $\mathscr{F}_{(x,g)}$ est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de (x,g) dans $\mathscr{F}_{(x,g)}$ à valeurs dans un voisinage ouvert U de x dans M, car sa différentielle en (x,g) est bijective, comme vu dans la question a). Notons $F : U \to F(U) \subset \mathscr{F}_{(x,g)}$ le difféomorphisme inverse. Puisque $\pi_M \circ F = \mathrm{id}_U$, il existe une fonction lisse $f : U \to G$ telle que $F(y) = (y, f(y))$ pour tout $y \in U$. En particulier $f(x) = g$, et le résultat en découle.

d) Puisque l'image de F est tangente à $\mathscr{D} = \ker \Omega$, nous avons, en tout point de U,

$$0 = F^*\Omega = F^*\big(\pi_M^*\omega - \pi_G^*\varpi\big) = (\pi_M \circ F)^*\omega - (\pi_G \circ F)^*\varpi = \omega - f^*\varpi \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Schème E.39 (1) L'action de $\mathbb{Z}^n$ par translations sur $\mathbb{R}^n$ est propre et libre. Il s'ensuit donc que l'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ définie par $\gamma(x,y) = (x+\gamma, \rho(\gamma)y)$ est propre et libre.

(2) Il s'agit d'un cas particulier de la proposition 2.7.

(3) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $\widetilde{\pi}$ réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels, noté $\widetilde{\pi}_x$, de $\widetilde{p}^{-1}(x)$ sur $p^{-1}(\pi(x))$. Il existe donc un unique élément $\widetilde{\sigma}(x)$ dans la fibre de x satisfaisant $\widetilde{\pi}(\widetilde{\sigma}(x)) = \sigma(\pi(x))$. L'application $x \mapsto \widetilde{\sigma}(x)$ est une section de $\widetilde{\xi}$ qui relève σ et une telle section est unique. Il nous reste à montrer que notre section $\widetilde{\sigma}$ est lisse en tout point x de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\widetilde{\pi}$ soit un difféomorphisme lisse de $\widetilde{p}^{-1}(U)$ sur $p^{-1}(\pi(U))$, dont nous notons $\widetilde{\pi}^{-1}$ l'inverse. Alors $\widetilde{\sigma}$ satisfait, sur U, l'identité

$$\widetilde{\sigma} = \widetilde{\pi}^{-1} \circ \sigma \circ \pi \ ,$$

ce qui montre que $\widetilde{\sigma}$ est lisse sur U.

Montrons à présent l'existence d'une unique connexion ∇ sur ξ satisfaisant, pour tous les $X \in \Gamma(T\mathbb{T}^n)$ et $\sigma \in \Gamma(\xi)$,

$$(\nabla_X \sigma) \circ \pi = \widetilde{\pi} \circ (\widetilde{\nabla}_{\pi^* X}\, \widetilde{\sigma}) \ .$$

(Il s'agit de la connexion image réciproque de $\widetilde{\nabla}$ par le morphisme $(\widetilde{\pi}, \pi)$, qui est bien définie et une connexion, car $\widetilde{\pi}$ est un isomorphisme linéaire sur son image en restriction à chaque fibre de $\widetilde{p}$, voir la proposition 2.36, mais nous allons donner des détails dans ce cas particulier.) Cette expression définit la section $(\nabla_X \sigma)$ correctement (et de manière unique) si nous montrons que pour tous les $x \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma \in \mathbb{Z}^n$,

$$\widetilde{\pi} \circ (\widetilde{\nabla}_{\pi^* X}\, \widetilde{\sigma})(x+\gamma) = \widetilde{\pi} \circ (\widetilde{\nabla}_{\pi^* X}\, \widetilde{\sigma})(x) \ .$$

Regardons la section $\widetilde{\sigma}$ du fibré trivial $\widetilde{\xi}$ comme une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Comme $\widetilde{\sigma}$ est la relevée d'une section de ξ, elle satisfait $\widetilde{\sigma}(x+\gamma) = \rho(\gamma)\widetilde{\sigma}(x)$ pour tous les $x \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma \in \mathbb{Z}^n$. Par ailleurs, $\pi^* X(x+\gamma) = \pi^* X(x)$. Puisque $\widetilde{\nabla}$ est la connexion triviale, nous avons donc

$$\widetilde{\nabla}_{\pi^* X}\, \widetilde{\sigma}(x+\gamma) = T_{x+\gamma}\widetilde{\sigma}(\pi^* X(x+\gamma)) = \rho(\gamma) T_x \widetilde{\sigma}(\pi^* X(x)) = \rho(\gamma)\nabla_{\pi^* X}\widetilde{\sigma}(x) \ .$$

Nous obtenons donc bien

$$\widetilde{\pi} \circ (\widetilde{\nabla}_{\pi^* X}\, \widetilde{\sigma})(x+\gamma) = \widetilde{\pi} \circ (\widetilde{\nabla}_{\pi^* X}\, \widetilde{\sigma})(x) \ .$$

Maintenant que nous savons que ∇ est correctement définie comme une application de $\Gamma(T\mathbb{T}^n) \times \Gamma(\xi)$ dans $\Gamma(\xi)$, il faut s'assurer qu'il s'agit bien d'une connexion. Or pour des ouverts U suffisamment petits de $\mathbb{R}^n$, nous avons vu que $\widetilde{\pi}$ réalise un isomorphisme de fibrés vectoriels entre $\widetilde{p}^{-1}(U)$ et $p^{-1}(\pi(U))$. La formule

$$(\nabla_X \sigma) \circ \pi = \widetilde{\pi} \circ (\widetilde{\nabla}_{\pi^* X}\, \widetilde{\sigma})$$

montre alors que sur $\pi(U)$, l'application ∇ coïncide avec la connexion image réciproque de $\widetilde{\nabla}$ par l'isomorphisme $(\widetilde{\pi}_{|\widetilde{p}^{-1}(U)}, \pi_{|p^{-1}(\pi(U))})$.

(4) Le couple $(\widetilde{\pi}, \pi)$ est un isomorphisme local de fibré, et $\widetilde{\nabla}$ est la connexion image réciproque de ∇ par $(\widetilde{\pi}, \pi)$. Aussi, si $\widetilde{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est un chemin lisse dans $\mathbb{R}^n$, et si $t \mapsto (\widetilde{c}(t), y(t))$ est une section de $\widetilde{\xi}$ parallèle pour $\widetilde{\nabla}$ le long de $\widetilde{c}$, alors $\widetilde{\pi}(\widetilde{c}(t), y(t))$ est une section de ξ parallèle pour ∇ le long de $t \mapsto \pi(\widetilde{c}(t))$.

Notons que c_i est bien un lacet, car $c_i(0) = c_i(1) = \pi(0)$. Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^p$, nous en déduisons que la section $t \mapsto \widetilde{\pi}(te_i, y_0)$ est parallèle le long de c_i. Comme $\widetilde{\pi}(e_i, y_0) = \widetilde{\pi}(0, \rho(e_i)^{-1} y_0)$, nous en concluons que l'holonomie le long de c_i est l'isomorphisme

$$\widetilde{\pi}_0 \circ \rho(e_i)^{-1} \circ \widetilde{\pi}_0^{-1} \ \in \mathrm{End}(\xi_{\pi(0)}) \ ,$$

où $\widetilde{\pi}_0$ désigne l'isomorphisme linéaire induit par $\widetilde{\pi}$ entre la fibre $\mathbb{R}^p$ du fibré trivial $\widetilde{\xi}$ en 0 et celle de ξ en $\pi(0)$.

(5) Supposons le fibré ξ trivialisable. Il existe alors p sections $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ de $\Gamma(\xi)$, linéairement indépendantes en chaque point de $\mathbb{T}^1$. Relevons ces sections en des sections $\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_p$ de $\widetilde{\xi}$, que nous voyons comme des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$. Le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\widetilde{\pi}$ soit un isomorphisme linéaire de $\widetilde{p}^{-1}(x)$ sur $p^{-1}(\pi(x))$, assure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\widetilde{\sigma}_1(x), \ldots, \widetilde{\sigma}_p(x)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^p$. Notons det le déterminant sur $\mathbb{R}^p$, vu comme une forme p-linéaire alternée, et nous introduisons l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \det(\widetilde{\sigma}_1(x), \ldots, \widetilde{\sigma}_p(x)) \ .$$

Comme les sections $\widetilde{\sigma}_i$ relèvent les σ_i, elles satisfont la relation d'équivariance $\widetilde{\sigma}_i(x+k) = \rho(k)\widetilde{\sigma}_i(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Aussi obtenons-nous que $\varphi(x+k) = \det(\rho(1))^k \varphi(x)$ pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}$. Les sections $\widetilde{\sigma}_i$ sont linéairement indépendantes en tout point, donc φ ne s'annule pas. Ainsi, le signe de $\det(\rho(1))^k$ doit être constant, et nous obtenons donc comme condition nécessaire à la trivialité de ξ :

$$\det(\rho(1)) > 0 \ .$$

Montrons que cette condition est suffisante. Nous savons, par exemple en utilisant la décomposition polaire, que le groupe de Lie

$$\mathrm{GL}_p^+(\mathbb{R}) = \{x \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \ : \ \det(x) > 0\}$$

est connexe par arcs. Choisissons un chemin continu $\alpha : [0,1] \to \mathrm{GL}_p^+(\mathbb{R})$ tel que $\alpha(0) = \rho$ et $\alpha(1) = \mathrm{id}$. Définissons une action de $\mathbb{Z}$ sur $[0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ par la formule

$$k \cdot (t, x, y) = (t, x+k, \alpha(t)^k y) \ .$$

Le quotient $E' = \mathbb{Z}^n \backslash ([0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)$ est l'espace total d'un fibré vectoriel de rang p, noté ξ', au-dessus de $[0,1] \times \mathbb{T}^1$. Les fibrés au-dessus de $\{0\} \times \mathbb{T}^1$ et $\{1\} \times \mathbb{T}^1$ sont homotopes donc isomorphes. Or le premier est isomorphe à ξ, tandis que le second est le fibré trivial.

3 Variétés riemanniennes

Sauf mention explicite du contraire, dans ce chapitre, toutes les variétés sont des variétés réelles de classe C^∞. Pour toute variété M, nous noterons $\mathrm{C}^\infty(M) = \mathrm{C}^\infty(M;\mathbb{R})$.

La convention utilisée pour la signature (p,q) d'une forme quadratique réelle Q non dégénérée est que p est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel sur lequel Q est définie négative.

3.1 Variétés pseudo-riemanniennes

Soient M une variété de dimension n et $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p + q = n$.

Une *métrique pseudo-riemannienne* de signature (p,q) sur M est une section lisse $g : x \mapsto g_x$ du fibré vectoriel S^2T^*M telle que, pour tout $x \in M$, la forme bilinéaire symétrique g_x sur T_xM soit non dégénérée et de signature (p,q). Si $p = 0$, c'est-à-dire si g_x est définie positive, nous dirons que g est une *métrique riemannienne*. Si $p = 1$ et $q > 0$, nous dirons que g est une *métrique lorentzienne*.

Une métrique pseudo-riemannienne sur M est en particulier un tenseur $(2,0)$ sur M, c'est-à-dire un élément de $\Gamma(\otimes^2 T^*M)$. Une métrique riemannienne sur M est une métrique euclidienne sur le fibré tangent de M, au sens de la partie 2.2.4. Ce qu'il est important de retenir est qu'une métrique riemannienne sur M est une application qui à tout point x de M associe un produit scalaire (euclidien) g_x sur l'espace tangent à M en x, qui dépend de manière lisse de x. Cette dernière affirmation se vérifie en carte locale, et nous n'aurons que rarement besoin de fibrés tensoriels.

Une *variété pseudo-riemannienne* (respectivement *riemannienne*, *lorentzienne*) est une variété munie d'une métrique pseudo-riemannienne (respectivement riemannienne, lorentzienne). Nous travaillerons surtout sur les variétés riemanniennes dans ces notes.

La notation g des métriques pseudo-riemanniennes est assez infortunée lorsque l'on travaille avec les groupes de Lie ou les surfaces de Riemann, mais elle est traditionelle. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons $g = ds^2_M = ds^2$, et pour tout $x \in M$,

$$g_x(\,\cdot\,,\,\cdot\,) = \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_x\ .$$

Lorsque g est riemannienne (qui est le cas qui nous intéresse de manière prépondérante), nous noterons $\|\cdot\| : TM \to [0,+\infty[$ l'application continue, lisse en dehors de l'image de la section nulle, qui est une norme (euclidienne) sur l'espace tangent en chaque point x de M, définie par, pour tout $v \in T_xM$,

$$\|v\| = \|v\|_x = \sqrt{g_x(v,v)} = \sqrt{\langle v,v\rangle_x}\ .$$

Si X et Y sont des champs de vecteurs lisses sur M, nous noterons (comme déjà vu) $g(X,Y) = \langle X,Y\rangle \in \mathrm{C}^\infty(M)$ l'évaluation de g en X et Y, définie par $x \mapsto g_x(X(x),Y(x))$.

Soient (M,g) et (M',g') deux variétés pseudo-riemanniennes. Une application lisse $f : M \to M'$ est une *application isométrique* si $f^*g' = g$, où nous rappelons que f^*g' est la section lisse de S^2T^*M définie par

$$(f^*g')_x : (v,w) \mapsto g'_{f(x)}(T_xf(v), T_xf(w))\ .$$

Puisque g est non dégénérée, f est nécessairement une immersion, et nous parlerons donc d'*immersion isométrique*. Un *plongement isométrique* de (M,g) dans (M',g') est une application isométrique de (M,g) dans (M',g') qui est un plongement C^∞ de M dans M'.

Une *isométrie* entre deux variétés pseudo-riemanniennes (M, g) et (M', g') est une bijection isométrique, c'est-à-dire une immersion isométrique bijective, c'est-à-dire un C^∞-difféomorphisme $f : M \to M'$ tel que $f^*g' = g$. Nous noterons $\mathrm{Isom}(M, g)$ (ou par abus $\mathrm{Isom}(M)$) le *groupe des isométries* de (M, g), qui est bien un groupe pour la composition des applications, car $(f \circ h)^*g = h^*(f^*g)$ pour toutes les applications lisses f, h de M dans M. Une variété pseudo-riemannienne (M, g) est dite *homogène* si son groupe des isométries agit transitivement sur M. Si G est un groupe agissant par C^∞-difféomorphismes sur une variété M, une métrique pseudo-riemannienne g sur M est dite *invariante* par l'action de G si pour tout $\gamma \in G$, le C^∞-difféomorphisme $x \mapsto \gamma x$ de M est une isométrie de g.

Nous justifierons plus loin cette terminologie, en construisant une distance naturelle sur chaque variété riemannienne, et en montrant que les isométries pour les métriques riemanniennes et les isométries pour leurs distances associées sont les mêmes.

Le résultat suivant découle du théorème 2.19, car une métrique riemannienne sur M n'est pas autre chose qu'une métrique euclidienne sur le fibré tangent de M. Remarquons qu'il est spécifique au cas riemannien, car par exemple la variété $\mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|x\|^2 = 1\}$ n'admet pas de métrique lorentzienne (car par le théorème de non peignage de la sphère $\mathbb{S}_2$, il n'existe pas d'application lisse qui à tout point de $\mathbb{S}_2$ associe deux droites tangentes supplémentaires en ce point à la sphère).

Proposition 3.1 *Toute variété admet au moins une métrique riemannienne.* □

Rappelons qu'une *densité* sur M est une mesure sur M qui, en restriction à chaque domaine de carte locale (U, φ), est absolument continue par rapport à la mesure image $(\varphi^{-1})_*\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\varphi(U)$, de dérivée de Radon-Nykodym lisse strictement positive. Dans tout domaine de carte locale $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, une densité s'écrit donc

$$\mu_{|U} = f_{U,\varphi}\, dx^1 \, \dots \, dx^n \ , \tag{$\cdot 37 \cdot$}$$

où $f_{U,\varphi} \in \mathrm{C}^\infty(U,]0, +\infty[)$, qui est appelée la *densité locale* de la carte (U, φ) : cette équation signifie que pour toute application continue $h \colon M \to \mathbb{R}$ à support dans U, nous avons

$$\begin{aligned}\int_M h\, d\mu &= \int_U h\, f_{U,\varphi}\, d(\varphi^{-1})_*\lambda = \int_{\varphi(U)} h \circ \varphi^{-1} f_{U,\varphi} \circ \varphi^{-1}\, d\lambda \\ &= \int_{(t_1, \dots, t_n) \in \varphi(U)} h \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n)\, f_{U,\varphi} \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \, \dots \, dt_n \ .\end{aligned}$$

Le théorème de changement de variable dit donc que si (V, ψ) est une autre carte locale, alors en restriction à $U \cap V$, nous avons

$$f_{V,\psi} = f_{U,\varphi}\ \mathrm{jac}(\varphi \circ \psi^{-1}) \circ \psi \ , \tag{$\cdot 38 \cdot$}$$

où nous avons noté

$$\mathrm{jac}(\varphi \circ \psi^{-1})(x) = \Big(\frac{d(\varphi \circ \psi^{-1})_*\lambda}{d\lambda}(x) \Big)^{-1} = \big| \det d_x(\varphi \circ \psi^{-1}) \big|$$

le jacobien du difféomorphisme $\varphi \circ \psi^{-1} \mid_{\psi(U \cap V)}$ en un point $x \in \psi(U \cap V)$.

Réciproquement, la donnée pour toute carte locale (U, φ) d'un atlas de cartes $\mathscr{A}$ de M d'une fonction $f_{U,\varphi} \in \mathrm{C}^\infty(U,]0, +\infty[)$, telle que la condition de compatibilité ($\cdot 38 \cdot$) soit vérifiée pour toutes les paires de cartes (U, φ) et (V, ψ) dans $\mathscr{A}$, définit une unique densité μ sur M vérifiant la formule ($\cdot 37 \cdot$). pour toute carte locale (U, φ) de $\mathscr{A}$.

Si g est une métrique riemannienne sur M, nous appellerons *volume riemannien* de (M, g) l'unique densité vol_g (notée vol_M lorsque g est sous-entendue) sur M telle que pour tout $x \in M$, pour toute base orthonormée $(X_1, \ldots, X_n)$ de T_xM pour g_x, pour toute carte locale (U, φ) en x, la densité locale $f_{U,\varphi}$ de vol_g dans cette carte vérifie

$$f_{U,\varphi}(x)\, |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n(X_1, \ldots, X_n)| = 1 \ .$$

Cette formule permet, par l'invariance de la mesure de Lebesgue par rotations, de définir une unique densité sur M : pour toute carte locale $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ de M, et pour tout $x \in U$, on pose

$$f_{U,\varphi}(x) = \frac{1}{|dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n(X_1, \ldots, X_n)|}$$

pour une base orthonormée $(X_1, \ldots, X_n)$ de T_xM (dont le choix n'a pas d'importance, donc peut être choisie de manière lisse en x, par exemple en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour le produit scalaire $((\phi^{-1})^* g)_{\phi(x)}$ en tout point de $\phi(U)$) et on vérifie la condition de compatibilité ($\cdot 38 \cdot$).

Exemples. (i) **(Espaces pseudo-euclidiens standards)** Notons

$$g^{p,q} : (x, y) \mapsto -\sum_{i=1}^{p} x_i y_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i y_i$$

la forme bilinéaire symétrique non dégénérée de signature (p, q) standard sur $\mathbb{R}^n$, où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$. L'*espace pseudo-euclidien standard* $\mathbb{R}^{p,q}$ (appelé l'*espace euclidien standard* et noté $\mathbb{E}^n$ si $(p, q) = (0, n)$) est la variété $\mathbb{R}^n$, où $T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, munie de la métrique pseudo-riemannienne constante $ds^2_{\mathbb{R}^{p,q}} : x \mapsto g_x = g^{p,q}$ (notée ds^2_{euc} si $p = 0$). Notons $dx^1, \ldots, dx^n$ les 1-formes coordonnées et $dx_i^2 = dx^i \otimes dx^i$. En rappelant que $\Gamma(\otimes^2 T^*\mathbb{R}^n) = \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n; \otimes^2\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$ds^2_{\mathbb{R}^{p,q}} = -\sum_{i=1}^{p} dx_i^2 + \sum_{i=p+1}^{p+q} dx_i^2 \ .$$

L'inclusion canonique du groupe des rotations-translations $\mathbb{R}^{p+q} \rtimes \mathrm{O}(p, q)$ dans le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{p,q}, ds^2_{\mathbb{R}^{p,q}})$ des isométries de $\mathbb{R}^{p,q}$ est un morphisme de groupes injectif que nous montrerons dans l'exercice E.44 (1) être un isomorphisme de groupes de Lie.

(ii) **(Sous-variétés pseudo-riemanniennes)** Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne, N une variété et $i : N \to M$ une immersion. Remarquons que si la forme bilinéaire symétrique $(i^*g)_x$ est non dégénérée, alors sa signature est constante sur chaque composante connexe de N.

Si $(i^*g)_x$ est non dégénérée de signature constante pour tout $x \in N$, alors (N, i^*g) est une variété pseudo-riemannienne. La métrique pseudo-riemannienne i^*g est alors appelée la *première forme fondamentale* de la variété immergée N, et souvent notée par le chiffre latin majuscule I. Si N est une sous-variété de M et si i est l'inclusion, nous dirons aussi

que i^*g est la *restriction* de g à N, nous la noterons $g_{|N}$, et nous dirons que $(N, g_{|N})$ est une *sous-variété pseudo-riemannienne* (et *sous-variété riemannienne* si g est riemannienne).

Remarquons que si (M, g) est une variété riemannienne, alors i^*g est forcément définie positive, et donc (N, i^*g) est une variété riemannienne. Par exemple, si M est une sous-variété de l'espace euclidien standard $\mathbb{E}^n$, alors la restriction de la métrique riemannienne standard de $\mathbb{E}^n$ est une métrique riemannienne sur M.

Le résultat suivant, que nous admettons dans ces notes (voir [Nas]), dit que toute variété riemannienne est isométrique à une sous-variété riemannienne d'un espace euclidien standard (si la variété est de dimension n, l'espace euclidien standard de dimension $N = n^2 + 5n + 3$ suffit).

Théorème 3.2 (Théorème de plongement de Nash) *Pour toute variété riemannienne (M, g), il existe $N \in \mathbb{N}$ et un plongement C^∞ isométrique de M dans l'espace euclidien standard $\mathbb{E}^N$.* □

Sous-exemples. (a) Nous noterons

$$(\mathbb{S}_n, ds^2_{\mathrm{sph}})$$

la sous-variété riemannienne de $\mathbb{E}^{n+1}$ définie par la sous-variété $\mathbb{S}_n$, où $\mathbb{S}_n$ est la sphère

$$\mathbb{S}_n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

et ds^2_{sph} la restriction de la métrique riemannienne standard de $\mathbb{E}^{n+1}$, que nous appellerons la *métrique sphérique standard* sur $\mathbb{S}_n$.

L'application canonique de $\mathrm{O}(n+1)$ dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}_n, ds^2_{\mathrm{sph}})$, qui à une rotation de $\mathbb{R}^{n+1}$ associe sa restriction à la sphère $\mathbb{S}_n$, est un morphisme de groupes injectif que nous montrerons dans le corollaire 3.12 être un isomorphisme de groupes de Lie.

(b) Voici un exemple de restriction où la signature change. Considérons la sous-variété (déjà étudiée dans l'exemple (5) de la partie 1.5)

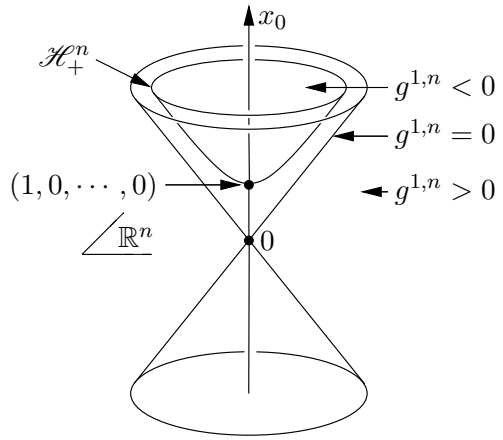
$$\mathscr{H}^n_+ = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_0 > 0 \ \text{ et } \ -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1\}$$

de $\mathbb{R}^{n+1}$. La *métrique hyperbolique* sur $\mathscr{H}^n_+$, notée ds^2_{hyp}, est la restriction à $\mathscr{H}^n_+$ de la métrique lorentzienne $g^{1,n}$ de $\mathbb{R}^{1,n}$. Il est facile de vérifier que

$$ds^2_{\mathrm{hyp}} = (-dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)_{|T_x\mathscr{H}^n_+}$$

est une métrique riemannienne. En effet, pour tout $v = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{H}^n_+$, le plan tangent $T_v\mathscr{H}^n_+$ à $\mathscr{H}^n_+$ en v est l'orthogonal de la droite $\mathbb{R}v$ pour la forme bilinéaire (symétrique non dégénérée) $g^{1,n}$. Comme la restriction de $g^{1,n}$ à $\mathbb{R}v$ est définie négative, la restriction de $g^{1,n}$ à $T_v\mathscr{H}^n_+$ est définie positive.

Nous dirons que $(\mathscr{H}^n_+, ds^2_{\text{hyp}})$ est le *modèle du demi-hyperboloïde supérieur* de l'*espace hyperbolique réel* $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ de dimension n. (Même si Gauss y avait pensé, c'est Bolyai [Bol] qui a donné la première définition du plan hyperbolique réel, bien qu'il n'ait publié son résultat en 1832 qu'après celui de Lobatchevski paru en 1829.)



Notons que l'application qui à un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^{n+1}$, préservant la forme quadratique $g^{1,n}$ et $\mathscr{H}^n_+$, associe sa restriction à $\mathscr{H}^n_+$ est un morphisme de groupes injectif canonique

$$\mathrm{O}_+(1,n) = \{x \in \mathrm{O}(1,n) \ : \ x(\mathscr{H}^n_+) \subset \mathscr{H}^n_+\} \to \mathrm{Isom}(\mathscr{H}^n_+, ds^2_{\text{hyp}}) \ ,$$

que nous montrerons dans le corollaire 3.12 être un isomorphisme de groupes de Lie.

Plus généralement, pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, considérons les sous-variétés de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension n définies par

$$\mathbb{S}_{n,p} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ g^{p,n-p+1}(x) = +1\}$$

et

$$\mathbb{H}_{n,p} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ g^{p+1,n-p}(x) = -1\} \ .$$

Alors il est facile de vérifier que $(\mathbb{S}_{n,p}, ds^2_{\mathbb{R}^{p,n+1-p}|\mathbb{S}_{n,p}})$ et $(\mathbb{H}_{n,p}, ds^2_{\mathbb{R}^{p+1,n-p}|\mathbb{H}_{n,p}})$ sont des variétés pseudo-riemanniennes de signature $(p, n-p)$. Nous avons $\mathbb{S}_{n,0} = \mathbb{S}_n$ et $\mathbb{H}_{n,0} = \mathbb{H}_n$.

(iii) **(Surfaces dans $\mathbb{R}^3$)** Étudions un peu plus le cas des surfaces immergées dans $\mathbb{E}^3$, munies de la métrique riemannienne induite. Notons $\| \ \|$ et $\langle \ , \ \rangle$ la norme et le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$. Localement, une telle surface S est l'image d'un plongement $f : U \to \mathbb{R}^3$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Nous noterons (x, y) un élément générique de U, fournissant via le plongement f des coordonnées locales sur S. Notons $dxdy = \frac{1}{2}(dx \otimes dy + dy \otimes dx)$ la forme bilinéaire associée à la forme quadratique sur chaque espace tangent définie par $(v_1, v_2) \mapsto v_1 v_2$.

Puisque f est une immersion, tout vecteur tangent à S en $f(x, y)$ s'écrit $v = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}$, où $a = dx(v)$ et $b = dy(v)$ sont les coordonnées locales de v dans la carte. La première forme fondamentale I_S de S est donc donnée par

$$I_S = ds^2_S = \Big\|\frac{\partial f}{\partial x}\Big\|^2 \, dx^2 + 2\Big\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big\rangle \, dxdy + \Big\|\frac{\partial f}{\partial y}\Big\|^2 \, dy^2 \ .$$

Il est traditionnel de noter $E = \|\frac{\partial f}{\partial x}\|^2$, $G = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle$ et $F = \|\frac{\partial f}{\partial y}\|^2$, de sorte que $ds^2_S = E \ dx^2 + 2G \ dxdy + F \ dy^2$. L'élément de volume, dit *élément d'aire*, de S est, en restriction à cette carte,

$$d\,\mathrm{vol}_S = \sqrt{EF - G^2} \ dxdy \ .$$

En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons $EF - G^2 > 0$. Si par exemple $E \neq 0$ en un point (x, y), alors $X_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}(1, 0)$ et $X_2 = \frac{1}{\sqrt{E(EF-G^2)}}(-G, E)$ sont deux vecteurs orthonormés pour ds_S^2, et donc $|dx \wedge dy(X_1, X_2)| = |\det(X_1, X_2)| = \frac{1}{\sqrt{(EF-G^2)}}$, et le résultat découle de la définition du volume riemannien.

(iv) **(Variétés riemanniennes conformes)** Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne et $\phi : M \to]0, +\infty[$ une application lisse. Alors $(M, \phi g)$ est une variété pseudo-riemannienne, de même signature que M, dite *conforme* à (M, g), de *facteur de conformité* ϕ.

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base orthonormée de T_xM pour g, alors $(\frac{X_1}{\sqrt{\phi(x)}}, \ldots, \frac{X_n}{\sqrt{\phi(x)}})$ est une base orthonormée de T_xM pour ϕg. Donc si M est de dimension n et si g est riemannienne, alors le volume riemannien $\mathrm{vol}_{\phi g}$ de $(M, \phi g)$ s'obtient à partir du volume riemannien vol_g de (M, g) par la formule

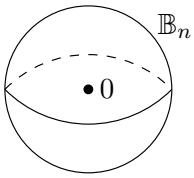
$$d\,\mathrm{vol}_{\phi g} = \phi^{\frac{n}{2}}\ d\,\mathrm{vol}_g\ .$$

Par exemple, en notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$, soit

$$\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ \|x\| < 1\}$$

la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$. Définissons la *métrique hyperbolique* ds^2_{hyp} sur $\mathbb{B}_n$ comme la métrique riemannienne conforme à la restriction de la métrique euclidienne standard sur $\mathbb{B}_n$, de facteur de conformité $x \mapsto \frac{4}{(1-\|x\|^2)^2}$:

$$ds^2_{\mathrm{hyp}} = \frac{4(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)}{(1 - \|x\|^2)^2}\ .$$



Nous dirons que $(\mathbb{B}_n, ds^2_{\mathrm{hyp}})$ est le *modèle de la boule (de Poincaré)* de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ de dimension n.

Son volume riemannien est

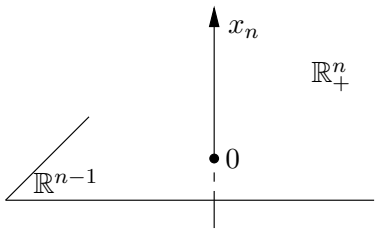
$$d\,\mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}} = \frac{2^n dx_1 \ldots dx_n}{(1 - \|x\|^2)^n}\ .$$

Par exemple, soit

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ :\ x_n > 0\}\ .$$

le demi-espace supérieur de $\mathbb{R}^n$. Définissons la *métrique hyperbolique* ds^2_{hyp}sur $\mathbb{R}^n_+$ comme la métrique riemannienne conforme à la restriction de la métrique euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n_+$, de facteur de conformité $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \frac{1}{x_n^2}$:

$$ds^2_{\mathrm{hyp}} = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{x_n^2}\ .$$



Nous dirons que $(\mathbb{R}^n_+, ds^2_{\mathrm{hyp}})$ est le *modèle du demi-espace supérieur (de Lobatchevski)* de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ de dimension n.

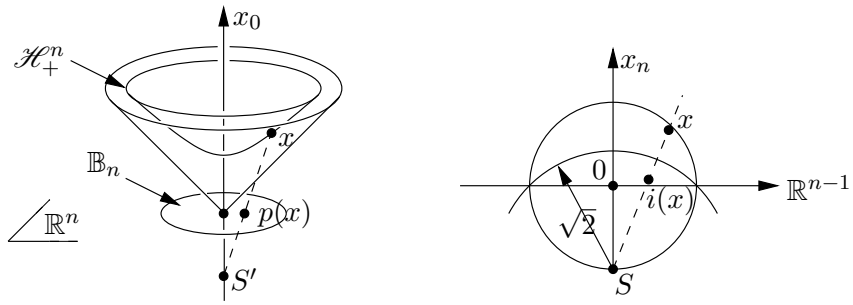
Son volume riemannien est

$$d\,\mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}} = \frac{dx_1 \ldots dx_n}{{x_n}^n}\ .$$

Notons $S' = (-1, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $p : \mathscr{H}_+^n \to \mathbb{B}_n$ l'application qui au point x de $\mathscr{H}_+^n$ associe l'intersection de la droite passant par x et S' avec l'hyperplan de coordonnées $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ (appelée la *projection stéréographique hyperbolique*, voir la figure de gauche ci-dessous). Il est facile de vérifier que

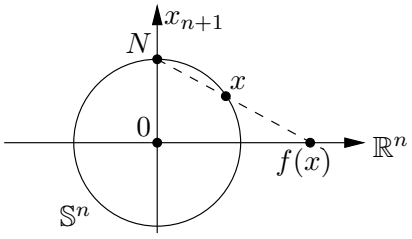
$$p\colon (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto \big(\frac{x_1}{1+x_0}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_0}\big)$$

est un C^∞-difféomorphisme de $\mathscr{H}_+^n$ dans $\mathbb{B}_n$, qui est une isométrie pour les métriques hyperboliques de $\mathscr{H}_+^n$ et de $\mathbb{B}_n$: nous avons $p^*(ds^2_{\mathrm{hyp}}) = ds^2_{\mathrm{hyp}}$.



Notons $S = (0 \ldots, 0, -1) \in \mathbb{R}^n$ le pôle sud de $\mathbb{S}_{n-1}$ et $i : \mathbb{B}_n \to \mathbb{R}^n_+$ la restriction à $\mathbb{B}_n$ de l'*inversion* de centre S et de rayon $\sqrt{2}$, c'est-à-dire, avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$, l'application qui au point x de $\mathbb{B}_n$ associe le point $\sqrt{2}\,\frac{x-S}{\|x-S\|^2} + S$ (voir la figure de droite ci-dessus). Il est facile de vérifier que i est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{B}_n$ dans $\mathbb{R}^n_+$, qui est une isométrie pour les métriques hyperboliques de $\mathbb{B}_n$ et de $\mathbb{R}^n_+$: nous avons $i^*(ds^2_{\mathrm{hyp}}) = ds^2_{\mathrm{hyp}}$.

Exercice E.40 *Soient $n \geq 1$ et $N = (0, \ldots, 0, 1)$ le pôle nord de la sphère $\mathbb{S}_n$. Considérons la* projection stéréographique *f de $\mathbb{S}_n - \{N\}$ dans l'hyperplan $\mathbb{R}^n$ des n premières coordonnées de $\mathbb{R}^{n+1}$, qui associe à un point x l'unique point d'intersection avec $\mathbb{R}^n$ de la droite passant par N et x.*



Montrer que f envoie la métrique sphérique standard de $\mathbb{S}_n - \{N\}$ sur la métrique riemannienne conforme à la métrique euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$ de rapport de conformité $\frac{4}{(1+\|x\|^2)^2}$:

$$(f^{-1})^* ds^2_{\mathrm{sph}} = \frac{4}{(1+\|x\|^2)^2}\, ds^2_{\mathrm{euc}} = \frac{4(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)}{(1+x_1^2+\cdots+x_n^2)^2} \ .$$

Montrer que le volume de la métrique sphérique standard de $\mathbb{S}_n$ est

$$\mathrm{vol}(\mathbb{S}_n) = \frac{2\,\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\ ,$$

où $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$*, pour* $x \geq 0$*, est la fonction Gamma d'Euler (qui vérifie* $\Gamma(n+1) = n!$ *si* $n \in \mathbb{N}$*).*

(v) Soit G un groupe de Lie réel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Une métrique pseudo-riemannienne g sur G est dite *invariante à gauche* si $(L_x)^*g = g$ pour tout $x \in G$, c'est-à-dire si l'action de G sur lui-même par translations à gauche est une action par isométries. On définit de même une métrique pseudo-riemannienne invariante à droite, en remplaçant les translations à gauche L_x par les translations à droite R_x. Par exemple, soit g_e une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de signature (p, q) sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Pour tous les $x \in G$ et $v, w \in T_xG$, notons

$$g_x(v, w) = g_e((T_eL_x)^{-1}(v), (T_eL_x)^{-1}(w)) \ .$$

Alors $x \mapsto g_x$ est une métrique pseudo-riemannienne de signature (p, q) sur G, invariante à gauche, et toute métrique pseudo-riemannienne de signature (p, q) sur G, invariante à gauche, est obtenue ainsi.

Une métrique pseudo-riemannienne sur G est dite *bi-invariante* si elle est invariante à la fois par les translations à droite et par les translations à gauche. Par exemple, soit g_e une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de signature (p, q) sur $\mathfrak{g}$, invariante par $\mathrm{Ad}(G)$. La métrique pseudo-riemannienne de signature (p, q) invariante à gauche sur G valant g_e en e est alors bi-invariante, et toute métrique pseudo-riemannienne de signature (p, q) sur G, qui est bi-invariante, est obtenue ainsi. Bien sûr, si G est abélien, toute métrique riemannienne invariante à gauche est bi-invariante. Par exemple, la métrique pseudo-riemannienne standard $ds^2_{\mathbb{R}^{p,\,q}}$ sur le groupe de Lie $\mathbb{R}^{p,\,q}$ est bi-invariante.

Si G est semi-simple (c'est-à-dire si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple), alors la forme de Killing B de G est une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée sur $\mathfrak{g}$, invariante par $\mathrm{Ad}(G)$, donc définit une métrique pseudo-riemannienne bi-invariante sur G.

Tout groupe de Lie compact admet une métrique riemannienne bi-invariante. En effet, si G est compact, notons μ_G la *mesure de Haar* normalisée de G, c'est-à-dire l'unique mesure (borélienne) de probabilité sur G invariante par translations à gauche et à droite (voir par exemple [Wei, Coh]). Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$. Alors

$$(v, w) \mapsto \int_G \langle \mathrm{Ad}\, g(v), \mathrm{Ad}\, g(w) \rangle \, d\mu_G(g)$$

est un produit scalaire invariant par $\mathrm{Ad}(G)$ sur $\mathfrak{g}$, qui définit une métrique riemannienne bi-invariante sur G, comme ci-dessus.

(vi) Soient (M, g) et (M', g') deux variétés pseudo-riemanniennes, de signature (p, q) et (p', q') respectivement. Sur la variété produit $M \times M'$, la section $g \oplus g'$ de $S^2(T^*(M \times M'))$ qui à $(x, x') \in M \times M'$ associe l'application $(g \oplus g')_{(x,\,x')} : (T_xM \times T_{x'}M') \times (T_xM \times T_{x'}M') \to \mathbb{R}$ définie par

$$((v, v'), (w, w')) \mapsto g(v, w) + g'(v', w')$$

est une métrique pseudo-riemannienne, de signature $(p + p', q + q')$, dite *produit*. Le couple $(M \times M', g \oplus g')$ est appelé la *variété pseudo-riemannienne produit* de (M, g) et (M', g'). Notons que les deux sous-espaces vectoriels $T_xM \times \{0\}$ et $\{0\} \times T_{x'}M'$ de l'espace vectoriel $T_{(x,\,x')}(M \times M') = T_xM \times T_{x'}M'$ sont orthogonaux pour $(g \oplus g')_{(x,\,x')}$. Lorsque (M, g) et (M', g') sont des variétés riemanniennes, $(M \times M, g \oplus g')$ est une variété riemannienne,

appelée le *produit riemannien* de (M, g) et de (M', g'). La norme riemannienne d'un vecteur tangent $(v, v') \in T_{(x,x')}(M \times M') = T_x M \times T_{x'} M'$ est alors

$$\|(v, v')\|_{(x,x')} = \sqrt{\|v\|_x^2 + \|v'\|_{x'}^2}\ .$$

(vii) Soient $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ et (M, g) deux variétés pseudo-riemanniennes. Une application lisse $f : \widetilde{M} \to M$ est un *revêtement pseudo-riemannien* si f est un revêtement isométrique. Nous dirons *revêtement riemannien* si $\widetilde{g}$ et g sont riemanniennes.

Par exemple, soit Γ un groupe discret agissant (à gauche) librement et proprement sur $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ par isométries (c'est-à-dire tel que l'application $x \mapsto \gamma x$ soit une isométrie de $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ pour tout $\gamma \in \Gamma$). Alors il existe une et une seule métrique pseudo-riemannienne g sur la variété quotient $M = \Gamma \backslash \widetilde{M}$ telle que la projection canonique $\pi : \widetilde{M} \to M$ soit isométrique pour $\widetilde{g}$ et g, et π est alors un revêtement pseudo-riemannien. La signature de g est la même que celle de $\widetilde{g}$, et en particulier g est riemannienne si $\widetilde{g}$ l'est. Nous dirons que (M, g) est une *variété pseudo-riemannienne quotient* (et une *variété riemannienne quotient* si $\widetilde{g}$ est riemannienne).

En effet, pour tout $x \in M$, choissisons $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ tel que $\pi(\widetilde{x}) = x$. L'application $T_{\widetilde{x}}\pi : T_{\widetilde{x}}\widetilde{M} \to T_x M$ est un isomorphisme linéaire. Posons, pour tous les $v, w \in T_x M$,

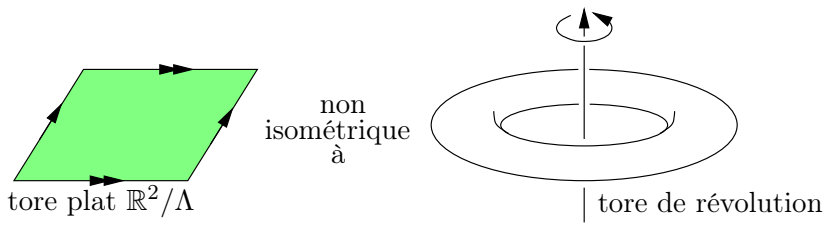
$$g_x(v, w) = \widetilde{g}_{\widetilde{x}}\big((T_{\widetilde{x}}\pi)^{-1}(v), (T_{\widetilde{x}}\pi)^{-1}(w)\big)\ .$$

Puisque Γ agit par isométries transitivement sur les fibres de π, ceci ne dépend pas du choix de $\widetilde{x}$. Par l'existence de sections locales lisses de π, l'application $x \mapsto g_x$ est lisse, et la métrique pseudo-riemannienne g ainsi définie est l'unique solution qui convient.

Par exemple, si Λ est un *réseau* de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$, engendrant $\mathbb{R}^n$ en tant qu'espace vectoriel), pour tous les $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p + q = n$, la variété pseudo-riemannienne quotient (qui est compacte, de signature (p, q))

$$T = \Lambda \backslash \mathbb{R}^{p,q}$$

est appelée un *tore plat*. Deux tels tores plats $\Lambda \backslash \mathbb{R}^{p,q}$ et $\Lambda' \backslash \mathbb{R}^{p,q}$ sont isométriques si et seulement s'il existe une isométrie $h \in \mathrm{O}(p, q)$ de la forme quadratique standard $g^{p,q}$ telle que $h(\Lambda) = \Lambda'$. En particulier, si $n \geq 2$ et $p = 0$, l'ensemble des classes d'isométrie (et même des classes d'homothétie) de tores plats est non dénombrable. Nous décrirons plus tard cet ensemble, appelé *espace des modules de tores plats*.



Par exemple, la variété riemannienne produit $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ où le groupe de Lie (abélien) $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ est muni de l'unique métrique riemannienne invariante à gauche dont la norme, sur $T_1\mathbb{S}_1 \times T_1\mathbb{S}_1 = i\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$, vaut $(ix, iy) \mapsto \frac{x^2+y^2}{(2\pi)^2}$, est isométrique à la

variété riemannienne quotient $\mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{E}^2$. Par contre, un *tore de révolution* dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire la sous-variété riemannienne de $\mathbb{E}^3$ obtenue en prenant un cercle dans un plan vertical, disjoint de l'axe vertical, et en le faisant tourner autour de l'axe vertical, n'est isométrique à aucun tore plat, comme nous le verrons plus tard (voir l'exercice E.41 et la partie 3.6).

(viii) **(Variétés riemanniennes homogènes)** Soient (M, g) et (M', g') deux variétés riemanniennes. Une *submersion riemannienne* $f : M \to M'$ est une application de M dans M' telle que pour tout $x \in M$, l'application $T_x f : \ker(T_x f)^\perp \to T_{f(x)}M'$ soit une isométrie.

Comme une isométrie est en particulier surjective, une submersion riemannienne est une submersion.

Proposition 3.3 *Soit M une variété riemannienne, munie d'une action isométrique, lisse, libre et propre d'un groupe de Lie réel G. Il existe une et une seule métrique riemannienne sur la variété quotient $G\backslash M$ telle que la projection canonique $\pi : M \to G\backslash M$ soit une submersion riemannienne.*

Démonstration. L'unicité est immédiate.

Par le théorème 2.3 et les propriétés des submersions, pour tout x dans M, l'orbite $G \cdot x = \pi^{-1}(x)$ est une sous-variété lisse de M et l'application $T_x\pi : T_xM \to T_{\pi(x)}(G\backslash M)$ induit un isomorphisme linéaire $(T_x(G\cdot x))^\perp \to T_{\pi(x)}(G\backslash M)$, dépendant de manière lisse de x, dont nous noterons l'inverse $(T_x\pi)^{-1}$. Pour tout $x \in M$ et tous les $v, w \in T_{\pi(x)}(G\backslash M)$, notons

$$\langle v, w\rangle_{\pi(x)} = \langle (T_x\pi)^{-1}(v), (T_x\pi)^{-1}(w)\rangle_x \ .$$

Montrons que le membre de droite ne dépend que de l'orbite de x, et donc définit une métrique riemannienne sur $G\backslash M$.

Pour tout γ dans G, notons $f_\gamma : M \to M$ l'application $z \mapsto \gamma z$, qui est une isométrie telle que $\pi \circ f_\gamma = \pi$, et en particulier envoie $T_x(G \cdot x) = \ker T_x\pi$ sur $T_{\gamma x}(G \cdot x) = \ker T_{\gamma x}\pi$. Si $y = \gamma x$, nous avons donc

$$\begin{aligned}\langle (T_y\pi)^{-1}(v), (T_y\pi)^{-1}(w)\rangle_y &= \langle (T_y f_\gamma)^{-1} \circ (T_x\pi)^{-1}(v), (T_y f_\gamma)^{-1} \circ (T_x\pi)^{-1}(w)\rangle_y \\ &= \langle (T_x\pi)^{-1}(v), (T_x\pi)^{-1}(w)\rangle_x \ ,\end{aligned}$$

comme voulu. □

Corollaire 3.4 *Soient G un groupe de Lie réel et H un sous-groupe fermé de G. Soit g une métrique riemannienne sur G invariante par translations à gauche par G et invariante par translations à droite par H. Alors il existe une et une seule métrique riemannienne sur la variété quotient G/H invariante par l'action à gauche de G telle que, si $\pi : G \to G/H$ est la projection canonique, alors $T_e\pi$ est une isométrie de l'orthogonal (dans l'algèbre de Lie de G) de l'algèbre de Lie de H à valeurs dans $T_{eH}G/H$.*

De plus, $\pi : G \to G/H$ est une submersion riemannienne.

Démonstration. Comme une métrique riemannienne invariante à gauche sur G/H est déterminée par le produit scalaire qu'elle définit en un point donné de G/H, l'unicité est immédiate.

Par la proposition 3.3 ci-dessus, puisque l'action par translations à droite de H sur G est isométrique, lisse, libre et propre, il existe une (unique) métrique riemannienne sur G/H

telle que $\pi : G \to G/H$ soit une submersion riemannienne. Montrons que cette métrique riemannienne sur G/H est invariante par G, ce qui conclut.

Pour tous les $x, y \in G$, notons $L_{yx^{-1}} : G \to G$ le difféomorphisme $\gamma \mapsto yx^{-1}\gamma$, et $M_{yx^{-1}} : G/H \to G/H$ le difféomorphisme $\gamma H \mapsto yx^{-1}\gamma H$, qui vérifient

$$\pi \circ L_{yx^{-1}} = M_{yx^{-1}} \circ \pi \ . \tag{$\cdot 39 \cdot$}$$

Puisque la métrique riemannienne sur G est invariante à gauche, l'application $T_x L_{yx^{-1}} : T_x G \to T_y G$ est une isométrie. Elle envoie $\ker T_x\pi$ dans $\ker T_y\pi$, en prenant l'application tangente en x de la formule ($\cdot 39 \cdot$) ci-dessus. Donc le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\ker T_x\pi)^\perp & \xrightarrow{T_x\pi} & T_{xH}G/H \\ T_x L_{yx^{-1}} \downarrow & & \downarrow T_{xH} M_{yx^{-1}} \\ (\ker T_y\pi)^\perp & \xrightarrow{T_y\pi} & T_{yH}G/H \end{array} \ .$$

Les flèches gauche, haut et bas étant des isométries, la flèche de droite l'est aussi. Le résultat en découle. □

3.2 Connexion de Levi-Civita

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne.

Théorème 3.5 *Il existe une et une seule connexion sans torsion sur M pour laquelle g est parallèle.*

Cette connexion $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$, notée $\nabla^{M,g}$ ou ∇^g ou ∇^M lorsqu'il est utile de préciser, s'appelle la *connexion de Levi-Civita* de (M, g). Sauf mention explicite du contraire, toute variété pseudo-riemannienne sera munie de sa connexion de Levi-Civita. Dire qu'elle est sans torsion signifie que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$. Dire que le $(2, 0)$-tenseur g est parallèle (c'est-à-dire que $\nabla g = 0$) signifie que

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

pour tous les $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Cette condition est aussi appelée la condition de *compatibilité* de ∇ avec g. L'application exponentielle exp de la connexion de Levi-Civita de (M, g) s'appelle *l'application exponentielle* de (M, g). Le tenseur de courbure $R = R^\nabla$ de la connexion de Levi-Civita de (M, g) s'appelle le *tenseur de courbure (de Riemann)* de (M, g) (ou par abus la *courbure* de (M, g), mais ce terme peut aussi désigner d'autres objets, voir la partie 3.6).

Les isométries de (M, g) préservent la connexion de Levi-Civita de (M, g), son tenseur de courbure et son application exponentielle : pour tous les $\gamma \in \mathrm{Isom}(M, g)$ et $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$\begin{aligned} \gamma^*(\nabla_X Y) &= \nabla_{\gamma^* X}(\gamma^* Y)\,, \\ \gamma^*(R(X, Y)Z) &= R(\gamma^* X, \gamma^* Y)(\gamma^* Z)\,, \\ \exp_{\gamma x} \circ T_x\gamma &= \gamma \circ \exp_x \ . \end{aligned}$$

(Avec la définition de connexion image réciproque (voir la remarque (3) de la partie 2.3.2), la première égalité s'écrit tout simplement $(T\gamma)^*\nabla = \nabla$: le groupe des isométries d'une variété pseudo-riemannienne est contenu dans le groupe de jauge de sa connexion de Levi-Civita.)

Démonstration. Si ∇ est une connexion sans torsion sur M pour laquelle g est parallèle, alors pour tous les $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \ ,$$

$$Y(g(Z,X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \ ,$$

$$Z(g(X,Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \ .$$

En ajoutant les deux premières équations et en enlevant la troisième, nous avons, puisque g est symétrique et ∇ sans torsion,

$$\begin{aligned} 2\, g(\nabla_X Y, Z) = \quad & X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ & -g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) + g([X,Y],Z) \ . \end{aligned} \tag{$\cdot\, 40\, \cdot$}$$

Comme g est non dégénérée en tout point (et puisque tout vecteur tangent peut se prolonger en un champ lisse de vecteurs tangents par le lemme 2.26), ceci montre l'unicité de ∇.

Pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$, il est facile de vérifier que l'application $\ell_{X,Y}$ de $\Gamma(TM)$ dans $\mathrm{C}^\infty(M)$ qui à $Z \in \Gamma(TM)$ associe le membre de droite de l'équation $(\cdot\, 40\, \cdot)$ précédente est $\mathrm{C}^\infty(M)$-linéaire. Puisque g est non dégénérée en tout point, l'application Φ de $\Gamma(TM)$ dans le $\mathrm{C}^\infty(M)$-module dual $\mathscr{L}_{\mathrm{C}^\infty(M)}(\Gamma(TM); \mathrm{C}^\infty(M))$ définie par

$$X \mapsto \{Y \mapsto g(X,Y)\}$$

est un isomorphisme de $\mathrm{C}^\infty(M)$-modules. Pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$, notons

$$\nabla_X Y = \Phi^{-1}\big(\frac{1}{2}\, \ell_{X,Y}\big) \ .$$

Il est facile de vérifier que $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ est une connexion sans torsion rendant g parallèle. $\square$

Exemples. (i) La connexion de Levi-Civita de l'espace pseudo-euclidien standard $\mathbb{R}^{p,q}$ est la connexion triviale sur $\mathbb{R}^{p+q}$. En effet, celle-ci est sans torsion et rend la métrique pseudo-riemannienne constante $ds^2_{\mathbb{R}^{p,q}} : x \mapsto g^{p,q}$ parallèle, par dérivation des applications bilinéaires.

(ii) **(Connexion de Levi-Civita des sous-variétés pseudo-riemanniennes)** Soit $i : N \to M$ une immersion lisse (par exemple l'inclusion si N est une sous-variété de M). Supposons (ce qui est toujours le cas lorsque g est riemannienne) que la première forme fondamentale $\overline{g} = i^*g$ de N soit non dégénérée et de signature constante sur l'espace tangent en chaque point de N. Notons $\overline{\nabla} = \nabla^{\overline{g}}$ la connexion de Levi-Civita de la variété pseudo-riemannienne $(N, \overline{g})$, et $\nabla = \nabla^g$ celle de (M, g). Le fibré tangent TN est isomorphe à un sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel image réciproque i^*TM, par l'application qui à $v \in T_xN$ associe $T_xi(v) \in T_{i(x)}M = (i^*TM)_x$ pour tout $x \in N$. Pour tout $x \in N$, l'espace tangent $T_{i(x)}M$ est somme directe orthogonale pour g_x de $T_xi(T_xN)$ et de son

orthogonal $(T_x i(T_x N))^\perp$. Notons $v \mapsto v^\parallel$ la projection orthogonale (c'est-à-dire parallèlement à $T_x i(T_x N)^\perp$) de $T_{i(x)}M$ sur $T_x i(T_x N)$, ainsi que $Z \mapsto Z^\parallel : x \mapsto (T_x i)^{-1}\big(Z(x)^\parallel\big)$ l'application $\mathrm{C}^\infty(M)$-linéaire de $\Gamma(i^*TM)$ dans $\Gamma(TN)$ qu'elle induit puisque $T_x i$ est un isomorphisme linéaire sur son image. Rappelons que pour tout $Y \in \Gamma(TN)$, la section i_*Y du fibré vectoriel i^*TM est définie par $x \mapsto T_x i(Y(x))$, et que $i^*\nabla$ est la connexion image réciproque de ∇ sur le fibré image réciproque i^*TM.

Proposition 3.6 *La connexion de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de la variété pseudo-riemannienne $(N, \overline{g})$ immergée dans (M, g) est uniquement déterminée par la propriété que, pour tous les $X, Y \in \Gamma(TN)$, nous avons*

$$\overline{\nabla}_X Y = \big((i^*\nabla)_X (i_* Y)\big)^\parallel .$$

Une manière équivalente (et c'est celle que nous utiliserons en pratique) de comprendre cette formule est la suivante. Supposons que N soit une sous-variété de M (on s'y ramène localement) et que i soit l'inclusion. Par partition de l'unité, tout champ de vecteurs lisse $\overline{W} \in \Gamma(TN)$ sur N s'étend en un champ de vecteurs lisse $W \in \Gamma(TM)$ sur M. Alors, pour tout $x \in N$ et tous les $\overline{X}, \overline{Y} \in \Gamma(TN)$, par la définition des connexions images réciproques sur les fibrés vectoriels images réciproques, et puisque l'inclusion i de N dans M induit l'inclusion de $T_x N$ dans $T_x M$ pour tout $x \in N$, nous avons

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}\ (x) = \big(\nabla_X Y\ (x)\big)^\parallel .$$

Démonstration. La propriété étant locale, nous pouvons supposer que N est une sous-variété de M et que i est l'inclusion. Pour tous les $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in \Gamma(TN)$ étendus localement en X, Y, Z sur M, remarquons que la restriction à N du crochet de Lie $[X, Y]$ coïncide avec $[\overline{X}, \overline{Y}]$ (puisque les flots des champs de vecteurs X et Y préservent N). Donc par l'équation ($\cdot 40 \cdot$) et la définition de la première forme fondamentale $\overline{g} = i^*g$, nous avons

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}, \overline{Z}) = g(\nabla_X Y, Z)_{|N} ,$$

c'est-à-dire $g_x(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}(x), \overline{Z}(x)) = g_x(\nabla_X Y(x), Z(x))$ pour tout $x \in N$. Le résultat en découle, puisque g est non-dégénérée en tout point et puisque $\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$ doit être tangent à N en tout point. □

(iii) **(Connexion de Levi-Civita des variétés pseudo-riemanniennes conformes)** Pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, notons $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad}^g f \in \Gamma(TM)$ l'unique champ de vecteurs lisse défini par $g(\operatorname{grad} f, Y) = Y(f)$ pour tout $Y \in \Gamma(TM)$, appelé le *gradient* de f. Ceci est bien défini car la métrique pseudo-riemannienne g, étant non dégénérée en tout point, induit un isomorphisme de $\mathrm{C}^\infty(M)$-modules de $\Gamma(TM)$ dans son $\mathrm{C}^\infty(M)$-module dual $\mathscr{L}_{\mathrm{C}^\infty(M)}(\Gamma(TM); \mathrm{C}^\infty(M))$ par $X \mapsto \{Y \mapsto g(X, Y)\}$.

Proposition 3.7 *Soit g' une métrique pseudo-riemannienne sur M conforme à g, de facteur de conformité e^{2f}. Alors la connexion de Levi-Civita de g' est uniquement déterminée par la propriété que, pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$,*

$$\nabla^{g'}_X Y = \nabla^g_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y) \operatorname{grad}^g f .$$

Notons que pour tout $h \in \mathrm{C}^\infty(M)$,

$$\operatorname{grad}^{g'} h = e^{-2f} \operatorname{grad}^g h .$$

Démonstration. Il est immédiat que l'application $\nabla^{g'} : \Gamma(TM)^2 \to \Gamma(TM)$ définie par le membre de droite est une connexion sans torsion. En effet, $\nabla^{g'} - \nabla^g$ est une application $\mathrm{C}^\infty(M)$-bilinéaire symétrique. Par le lemme de tensorialité 2.24, c'est donc un élément de $\Gamma\big((T^*M)^{\otimes 2} \otimes TM\big)$, et le résultat découle de la structure d'espace affine de l'espace des connexions (voir la remarque (5) de la partie 2.3.2). Un petit calcul montre que g' est parallèle pour $\nabla^{g'}$: pour tous les $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$\begin{aligned}
X(g'(Y,Z)) &= X(e^{2f})g(Y,Z) + e^{2f}X(g(Y,Z)) \\
&= 2X(f)e^{2f}g(Y,Z) + e^{2f}\big(g(\nabla^g_X Y, Z) + g(Y, \nabla^g_X Z)\big) \\
&= 2X(f)g'(Y,Z) + g'(\nabla^{g'}_X Y, Z) + g'(Y, \nabla^{g'}_X Z) \\
&\quad - g'(X(f)Y + Y(f)X - g(X,Y)\operatorname{grad}^g f, Z) \\
&\quad - g'(Y, X(f)Z + Z(f)X - g(X,Z)\operatorname{grad}^g f) \\
&= g'(\nabla^{g'}_X Y, Z) + g'(Y, \nabla^{g'}_X Z)\ .
\end{aligned}$$

Par la propriété d'unicité des connexions de Levi-Civita, ceci montre que l'application $\nabla^{g'}$ ainsi définie est bien la connexion de Levi-Civita de g'. □

(iv) **(Connexion de Levi-Civita des variétés pseudo-riemanniennes produits)** Soient (M, g) et (M', g') deux variétés pseudo-riemanniennes, et soit $(M \times M', g \oplus g')$ la variété pseudo-riemannienne produit.

Proposition 3.8 *La connexion de Levi-Civita de $(M \times M', g \oplus g')$ est la connexion produit des connexions de Levi-Civita de (M, g) et (M', g').*

Ainsi, en notant $X + X'$ le champ de vecteurs sur $M \times M'$ défini par $(x, x') \mapsto (X(x), X'(x'))$ pour tous les $X \in \Gamma(TM)$ et $X' \in \Gamma(TM')$, la connexion de Levi-Civita $\nabla^{g \oplus g'}$ est l'unique connexion sur $M \times M'$ telle que

$$\nabla^{g \oplus g'}_{X+X'}(Y + Y') = \nabla^g_X Y + \nabla^{g'}_{X'} Y'$$

pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $X', Y' \in \Gamma(TM')$.

Démonstration. Par la propriété d'unicité des connexions de Levi-Civita, il suffit de montrer que la connexion produit $\nabla'' = \nabla^g \times \nabla^{g'}$ définie dans la proposition 2.33 est sans torsion, ce qui a été fait dans l'exemple (2) de la partie 2.3.5, et que $g'' = g \oplus g'$ est parallèle pour ∇''. Or l'équation signifiant que g'' est parallèle pour ∇'' :

$$\forall\, X'', Y'', Z'' \in \Gamma(M \times M'), \quad X''(g''(Y'', Z'')) - g''(\nabla''_{X''} Y'', Z'') - g''(Y'', \nabla''_{X''} Z'') = 0\ ,$$

est ponctuelle et $\mathrm{C}^\infty(M)$-trilinéaire en X'', Y'', Z''. Rappelons que tout champ de vecteurs sur $M \times M'$ est, en restriction à $U \times U'$, combinaison linéaire à coefficients dans $\mathrm{C}^\infty(M \times M')$ de champs de vecteurs tangents à M ou à M' (voir la démonstration de la proposition 2.33). Il suffit donc de vérifier l'équation ci-dessus lorsque $X'' = X + X'$, $Y'' = Y + Y'$ et $Z'' = Z + Z'$ où $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $X', Y', Z' \in \Gamma(TM')$, ce qui est immédiat par la propriété caractéristique des connexions produits (voir la proposition 2.33), et le fait que g et g' sont parallèles pour ∇^g et $\nabla^{g'}$ respectivement. □

- **Transport parallèle des connexions de Levi-Civita.**

Le résultat suivant dit que le transport parallèle le long de courbes défini par la connexion de Levi-Civita est isométrique.

Proposition 3.9 *Soient $c : I \to M$ une courbe lisse et $s, t \in I$. Alors le transport parallèle $\|_s^t : T_{c(s)}M \to T_{c(t)}M$ le long de c pour la connexion de Levi-Civita est une isométrie entre les formes bilinéaires $g_{c(s)}$ et $g_{c(t)}$: pour tous les $v, w \in T_{c(s)}M$,*

$$g_{c(t)}(\|_s^t\, v, \|_s^t\, w) = g_{c(s)}(v, w)\ .$$

En particulier, les groupes d'holonomie (et donc les groupes d'holonomie restreinte) de la connexion de Levi-Civita en un point x de M sont des sous-groupes du groupe orthogonal $\mathrm{O}(g_x) \simeq \mathrm{O}(p, q)$ de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée g_x de signature (p, q) sur T_xM.

Démonstration. Soient $X, Y : I \to TM$ deux champs de vecteurs lisses le long de c. Notons $\overline{\nabla}$ la connexion image réciproque de ∇ sur le fibré image réciproque c^*TM. Notons $\overline{g}$ l'image réciproque de g sur le fibré image réciproque c^*TM. Par la proposition 2.42 (3), nous avons, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(g_{c(t)}(X(t), Y(t))\big) &= \frac{d}{dt}\big(\overline{g}(X, Y)\big)(t) = \overline{g}(\overline{\nabla}_{\frac{d}{dt}} X, Y)(t) + \overline{g}(X, \overline{\nabla}_{\frac{d}{dt}} Y)(t)\\ &= g_{c(t)}(\nabla_{\frac{d}{dt}} X\,(t), Y(t)) + g_{c(t)}(X(t), \nabla_{\frac{d}{dt}} Y\,(t))\ .\end{aligned}$$

En particulier, si X et Y sont parallèles pour ∇, alors l'application $t \mapsto g(X(t), Y(t))$ est constante, ce qui montre le résultat. □

• **Fonction angle d'une variété riemannienne.**

Supposons que (M, g) soit une variété riemannienne. Pour tout $x \in M$ et tous les $v, w \in T_xM - \{0\}$, définissons l'*angle* entre v et w comme l'unique réel $\angle_x(v, w)$ dans $[0, \pi]$ tel que

$$\cos\ \angle_x(v, w) = \frac{\langle v, w\rangle_x}{\|v\|_x\ \|w\|_x}\ .$$

Nous appellerons *fonction angle* de (M, g) l'application lisse, définie sur le sous-espace ouvert $(TM \oplus TM)_\angle$ des $v \oplus w \in TM \oplus TM$ tels que $v \neq 0$ et $w \neq 0$, à valeurs dans $[0, \pi]$, par $v \oplus w \mapsto \angle_{\pi(v)}(v, w)$, où $\pi : TM \to M$ est le fibré tangent de M.

Remarques. (1) Les isométries et le transport parallèle préservent les angles : pour toute isométrie γ de M, pour tous les $x \in M$ et $v, w \in T_xM - \{0\}$, nous avons

$$\angle_{\gamma x}(T_x\gamma(v), T_x\gamma(w)) = \angle_x(v, w)$$

et si $c : I \to M$ est une courbe lisse, pour tous les $s, t \in I$ et $v, w \in T_{c(s)}M - \{0\}$, nous avons

$$\angle_{c(t)}(\|_s^t\, v, \|_s^t\, w) = \angle_{c(s)}(v, w)\ .$$

Ceci découle du fait que les isométries préservent les normes et les produits scalaires sur les espaces tangents, et de la proposition 3.9.

(2) Deux métriques riemanniennes sur une même variété M sont conformes si et seulement si elles ont les mêmes fonctions angles $(TM \oplus TM)_\angle \to [0, \pi]$.

En effet, soient $x \mapsto \langle\ ,\ \rangle_x$ et $x \mapsto \langle\ ,\ \rangle'_x$ deux métriques riemanniennes sur M, de fonctions normes $x \mapsto \|\ \|_x$ et $x \mapsto \|\ \|'_x$, ayant même fonction angle. Puisqu'un triangle euclidien est déterminé à homothétie près par ses angles, pour tout $x \in M$, il existe un

unique $a_x > 0$ tel que $\|v\|'_x = a_x \|v\|_x$ pour tout $v \in T_xM$. Par définition des angles, ceci implique que $\langle v, w\rangle'_x = a_x^2 \langle v, w\rangle_x$ pour tous les $v, w \in T_xM$. Par trivialité locale du fibré tangent, et puisque la propriété d'être C^∞ est locale, l'application $x \mapsto a_x^2$ est C^∞. Donc les deux métriques riemanniennes sont conformes. La réciproque est immédiate.

Par exemple, pour tout $n \geq 2$, dans les modèles de la boule et du demi-espace supérieur de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, les angles euclidiens et hyperboliques coïncident.

(3) La fonction d'angle d'une sous-variété riemannienne plongée dans M est la restriction de la fonction d'angle de M, et plus généralement, si $i : N \to M$ est une immersion isométrique, alors

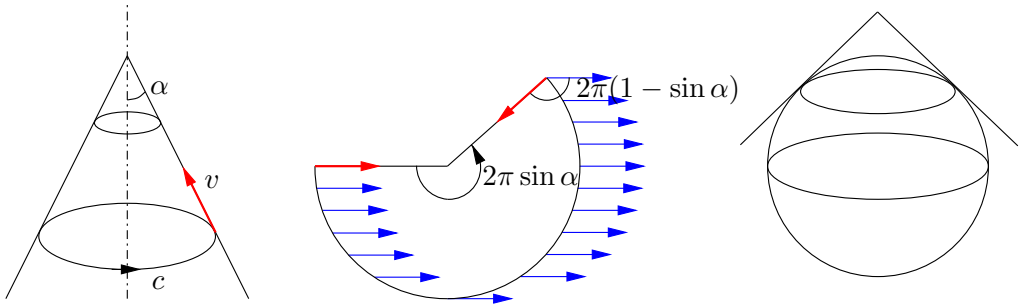
$$\forall\, x \in N,\ \ \forall\, v, w \in T_xN - \{0\},\quad \angle_x(v, w) = \angle_{i(x)}(T_xi(v), T_xi(w))\ .$$

Exemples. (1) Supposons que M soit une surface (c'est-à-dire que sa dimension soit $n = 2$). Soient $c : I \to M$ une géodésique plongée de M et $s, t \in I$. Puisque le champ de vecteurs vitesses de c est parallèle le long de c, il découle de la remarque (1) ci-dessus que le transport parallèle le long de c entre les instants s et t d'un vecteur $v \in T_{c(s)}M$ faisant un angle θ avec $\dot{c}(s)$ est le vecteur tangent en $c(t)$ faisant un angle θ avec $\dot{c}(t)$, et situé du même côté de c.

(2) Nous avons vu que le transport parallèle le long d'une courbe pour la connexion de Levi-Civita de l'espace euclidien standard $\mathbb{E}^n$, qui est la connexion triviale, est une translation. Soient $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ un angle aigu non nul et

$$C_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z < 0\ \text{ et }\ x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \alpha = 0\}$$

le cône épointé d'axe vertical et d'angle au sommet α, muni de la métrique riemannienne induite par celle de $\mathbb{E}^3$. Soit $c : [0, 2\pi] \to C_\alpha$, défini par $\theta \mapsto (r \sin\theta, r\cos\theta, -r\cot\alpha)$ où $r > 0$ est fixé, un cercle méridien de C_α et soit $v \in T_{c(0)}C_\alpha$. L'application développante de C_α privé de toute demi-droite issue du sommet à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ étant une isométrie riemannienne sur un ouvert du plan euclidien $\mathbb{E}^2$, le transport parallèle de v le long de c fait un angle $2\pi(1 - \sin\alpha)$ avec v (voir les figures de gauche ci-dessous).



Exercice E.41 *a) En utilisant des cônes de contact avec la sphère (voir le dessin de droite ci-dessus), calculer le transport parallèle le long d'un parallèle (ce sont les courbes de latitude constante), par exemple le long du tropique du cancer, dans la sphère standard* $(\mathbb{S}_2, ds^2_{\mathrm{sph}})$. *En déduire que* $(\mathbb{S}_2, ds^2_{\mathrm{sph}})$ *et le plan euclidien* $\mathbb{E}^2$ *ne sont pas localement isométriques.*

b) Montrer qu'un tore plat et qu'un tore de révolution ne sont pas localement isométriques.

• **Calcul en coordonnées locales.**

Soit $(U, (x^1, \dots, x^n))$ une carte locale de M. Notons $(dx^1, \dots, dx^n)$ la base correspondante du $\mathrm{C}^\infty(U)$-module $\Gamma(T^*U)$, formée des différentielles des fonctions coordonnées, et $(\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n})$ la base duale du $\mathrm{C}^\infty(U)$-module $\Gamma(TU)$ (c'est-à-dire que $dx^i(\partial_j) = \delta^i_j$, où δ^i_j, qui vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$, est le *symbole de Kronecker*). Dans la base correspondante $(dx^i \otimes dx^j)_{1 \leq i,\, j \leq n}$ du $\mathrm{C}^\infty(U)$-module $\Gamma(\otimes^2 T^*U)$, nous avons

$$g_{|U} = \sum_{1 \leq i,\, j \leq n} g_{i,\, j}\; dx^i \otimes dx^j$$

où $(g_{i,\, j} = g(\partial_i, \partial_j))_{1 \leq i,\, j \leq n}$ est une matrice symétrique à coefficients dans $\mathrm{C}^\infty(U)$, inversible, de signature (p, q) en tout point (donc définie positive en tout point si g est une métrique riemannienne), appelée la *matrice de* g dans la carte locale considérée.

Si $(V, (y^1, \dots, y^n))$ est une autre carte locale de M, et si $(g'_{k,\, \ell})_{1 \leq k,\, l \leq n}$ est la matrice de g dans cette carte, nous avons, en restriction à $U \cap V$,

$$g'_{k,\, \ell} = \sum_{1 \leq i,\, j \leq n} g_{i,\, j}\; \frac{dx^i}{dy^k}\, \frac{dx^j}{dy^\ell}\ .$$

Notons $\Gamma^k_{i,\, j} \in \mathrm{C}^\infty(U)$ les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita ∇ dans la carte locale $(U, (x^1, \dots, x^n))$. Par définition, ils vérifient

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{i,\, j}\; \partial_k\ .$$

Puisque $[\partial_i, \partial_j] = 0$, la condition que ∇ est sans torsion est équivalente à ce que, pour tous les $1 \leq i, j, k \leq n$, nous ayons

$$\Gamma^k_{i,\, j} = \Gamma^k_{j,\, i}\ .$$

L'équation (·40·) donne

$$2g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) = \partial_i\, g_{j,\, k} + \partial_j\, g_{k,\, i} - \partial_k\, g_{i,\, j}\ .$$

D'où, en notant $(g^{i,\, j})_{1 \leq i,\, j \leq n}$ l'inverse de la matrice $(g_{i,\, j})_{1 \leq i,\, j \leq n}$, nous avons

$$\Gamma^k_{i,\, j} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n\; g^{\ell,\, k}\, (\partial_i\, g_{j,\, \ell} + \partial_j\, g_{\ell,\, i} - \partial_\ell\, g_{i,\, j})\ ,$$

une formule qui n'est que rarement utilisée. Par la définition du tenseur de Christoffel comme différence de la connexion ∇ restreinte à U et de l'image réciproque par la trivialisation locale de la connexion triviale, elle permet de calculer localement la connexion de Levi-Civita, en disant que pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$, si $X_{|U} = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$ et $Y_{|U} = \sum_{i=1}^n Y^i \partial_i$, alors

$$(\nabla_X Y)_{|U} = \sum_{1 \leq i,\, j \leq n} X^i\, \partial_i Y^j\; \partial_j + \sum_{1 \leq i,\, j,\, k \leq n} \Gamma^k_{i,\, j}\; X^i\, Y^j\; \partial_k\ ,$$

une formule qu'il n'est pas plus utile de retenir.

Si g est une métrique riemannienne, il est facile de voir que le volume riemannien de g est la mesure sur M définie localement dans chaque carte locale $(U, (x^1, \dots, x^n))$ par

$$d\,\mathrm{vol}_{g|U} = \sqrt{\det(g_{i,\,j})_{1 \le i,\,j \le n}}\ dx^1 \dots dx^n\ .$$

Nous pouvons vérifier que ceci est bien défini d'une part parce que la matrice de g est définie positive, donc de déterminant strictement positif, et par la formule de changement de carte locale de g.

Si R est le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita de (M, g), alors ses coordonnées dans la carte locale considérée sont les applications $R^{\ell}_{i,\,j,\,k} \in \mathrm{C}^\infty(U)$ définies par

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{\ell=1}^{n} R^{\ell}_{i,\,j,\,k}\, \partial_\ell\ , \tag{$\cdot 41 \cdot$}$$

de sorte que pour tous les $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

$$R(X, Y)Z\ _{|U} = \sum_{i,\,j,\,k,\,\ell=1}^{n} R^{\ell}_{i,\,j,\,k}\, X^i\, Y^j\, Z^k\ \partial_\ell\ .$$

La définition du tenseur de courbure

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{[\partial_i,\,\partial_j]}\partial_k$$

(dont le dernier terme est nul puisque $[\partial_i, \partial_j] = 0$) donne immédiatement

$$R^{\ell}_{i,\,j,\,k} = \partial_i\, \Gamma^{\ell}_{j,\,k} - \partial_j\, \Gamma^{\ell}_{i,\,k} + \sum_{m=1}^{n} \left(\Gamma^{m}_{j,\,k}\Gamma^{\ell}_{i,\,m} - \Gamma^{m}_{i,\,k}\Gamma^{\ell}_{j,\,m}\right)\ ,$$

une formule qui n'est toujours pas à retenir.

• **Métrique pseudo-riemannienne induite sur le fibré tangent.**

Notons $\pi : TM \to M$ le fibré tangent de M et ∇ la connexion de Levi-Civita de (M, g). Rappelons que le fibré tangent TTM de TM est la somme directe $TTM = V \oplus H$ de deux sous-fibrés V et H, dits vertical et horizontal, telle que

- $V_v = \mathrm{Ker}\, T_v\pi = T_v(T_xM) = T_xM$ pour tout $v \in T_xM$,
- si $\mathrm{pr}_H : TTM \to V$ est la projection sur V parallèlement à H, alors la restriction $(T\pi)_{|H_v} : H_v \to T_xM$ à H_v de l'application tangente de π est un isomorphisme linéaire pour tout $v \in T_xM$, et
- pour tous les champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$\nabla_X Y = \mathrm{pr}_H \circ TY \circ X\ .$$

Munissons TM de l'unique métrique pseudo-riemannienne $\widetilde{g}$ telle que, pour tous les $x \in M$ et $v \in T_xM$, les sous-espaces H_v et V_v soient orthogonaux pour $\widetilde{g}_v$, et les deux applications $(T\pi)_{|H_v} : H_v \to T_xM$ et $\mathrm{id} : V_v \to T_xM$ soient des isométries entre les deux restrictions de $\widetilde{g}_v$ et g_x. Notons que la signature de $\widetilde{g}$ est $(2p, 2q)$. En particulier, si g est riemannienne, alors cette métrique $\widetilde{g}$ sur TM est riemannienne, appelée la *métrique de Sasaki* de TM.

• **Champs de Killing.**

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. Un *champ de Killing* de (M, g) est un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ tel que $\mathscr{L}_X g = 0$, où la dérivée de Lie des tenseurs par un champ de vecteurs a été définie dans la partie 2.3.1. De manière équivalente par la première question de l'exercice ci-dessous, $X \in \Gamma(TM)$ est un champ de Killing si et seulement si l'endomorphisme $\nabla X : Y \mapsto \nabla_Y X$ du $\mathrm{C}^\infty(M)$-module $\Gamma(TM)$ est antisymétrique pour la forme $\mathrm{C}^\infty(M)$-bilinéaire $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \mathrm{C}^\infty(M)$.

Exercice E.42 *Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne, et ∇ sa connexion de Levi-Civita.*

(1) Montrer que

$$(\mathscr{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) \ .$$

(2) Montrer que l'ensemble des champs de Killing de (M, g) est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $(\Gamma(TM), [\cdot, \cdot])$.

(3) Montrer qu'un champ de vecteurs X est de Killing si et seulement si son flot local (ϕ_t) est formé d'isométries locales de (M, g).

3.3 Géodésiques

Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne et ∇ sa connexion de Levi-Civita. Nous appellerons *géodésique* de (M, g) les géodésiques de ∇. Ce sont les courbes lisses $c : I \to M$ dont l'accélération covariante pour ∇ est nulle, c'est-à-dire dont le champ de vecteurs vitesse est parallèle (pour la connexion de Levi-Civita), c'est-à-dire vérifiant

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c} = 0 \ .$$

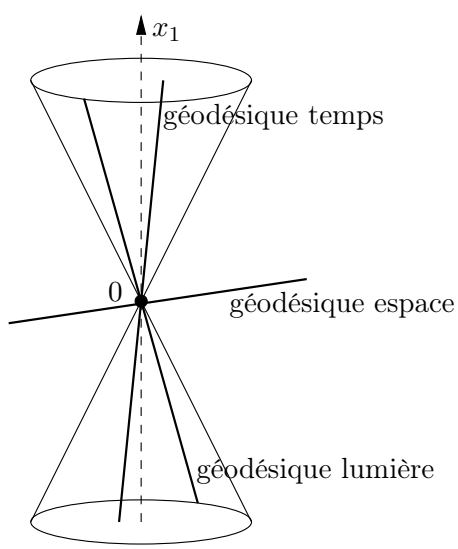
Notons que comme

$$\frac{d}{dt} g(\dot{c}, \dot{c}) = 2g(\nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c}, \dot{c}) \ ,$$

l'application $t \mapsto g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$ est constante pour toute géodésique c.

Une géodésique c de (M, g) est dite *de type temps*, *de type lumière*, *de type espace* si cette constante est respectivement strictement négative, nulle, strictement positive.

Dans l'espace pseudo-euclidien $\mathbb{R}^{1,n}$ muni de la métrique lorentzienne constante $g^{1,n}$, ces géodésiques non constantes passant par 0 sont respectivement les droites rencontrant l'intérieur du cône de lumière (où $g^{1,n} < 0$), les droites contenues dans le cône de lumière (où $g^{1,n} = 0$), les droites rencontrant l'extérieur du cône de lumière (où $g^{1,n} > 0$).

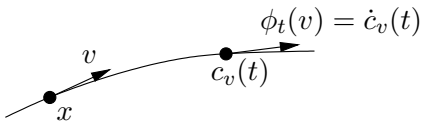


En particulier, si g est riemannienne, alors toute géodésique non constante est de type espace, et la norme $\|\dot{c}\|$ du vecteur vitesse d'une géodésique c est constante. Si g est riemannienne, nous dirons qu'une courbe c de classe C^1 par morceaux est *paramétrée à vitesse constante* si la norme $\|\dot{c}\|$ de son vecteur vitesse est constante le long de c. Il découle immédiatement de l'équation des géodésiques que tout reparamétrage à vitesse constante d'une géodésique est encore une géodésique.

Nous avons démontré dans la partie 2.3.7 que pour tout $x \in M$ et tout $v \in T_xM$, il existe une unique géodésique $c_v : I_v \to M$ de (M, g), définie sur un intervalle ouvert maximal I_v contenant 0, telle que $c_v(0) = x$ et $\dot{c}_v(0) = v$. De plus, $U = \bigcup_{v \in TM} I_v \times \{v\}$ est un voisinage ouvert de $\{0\} \times TM$ dans $\mathbb{R} \times TM$, et l'application $(t, v) \mapsto c_v(t)$ de U dans M est lisse.

L'application lisse $\phi : U \to TM$ définie par

$$(t, v) \mapsto \phi_t(v) = \dot{c}_v(t)$$



s'appelle le *flot géodésique* de (M, g).

Remarques. (1) C'est un flot local, au sens que pour tout $v \in TM$, nous avons $\phi_0(v) = v$ et pour tous les $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $t, s + t \in I_v$, alors $s \in I_{\phi_t(v)}$ et

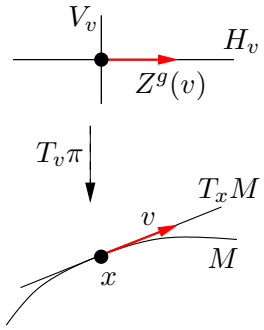
$$\phi_s(\phi_t(v)) = \phi_{s+t}(v) \ .$$

(2) Le champ de vecteurs lisse $Z^g \in \Gamma(TTM)$ défini par

$$v \mapsto Z^g(v) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi_t(v) \in T_vTM$$

est appelé le *champ de vecteurs géodésique* de g.

Si $TTM = V \oplus H$ est la décomposition du fibré tangent de TM en sous-fibré vertical V et sous-fibré horizontal H défini par la connexion de Levi-Civita de (M, g), alors $Z^g(v)$ est l'unique élément de H_v tel que, si $\pi : TM \to M$ est la projection canonique, alors $T_v\pi(Z^g(v)) = v$.



(3) Si la connexion de Levi-Civita de (M, g) est complète (ce qui sera le cas dans la plupart des situations que nous rencontrerons), le flot géodésique est défini sur tout $\mathbb{R} \times TM$. Alors $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre lisse de C^∞-difféomorphismes de TM, c'est-à-dire que l'application $\phi : \mathbb{R} \times TM \to TM$ est lisse, vérifie $\phi_0 = \mathrm{id}_{TM}$ et

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$$

pour tous les $s, t \in \mathbb{R}$. En particulier, l'application $\phi_t : TM \to TM$ est un C^∞-difféomorphisme pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(4) Supposons que g soit riemannienne et que M soit de dimension n. L'application norme $\|\cdot\| : TM \to \mathbb{R}$ de g est homogène ($\|tv\| = t\|v\|$ si $t > 0$), donc est une submersion lisse en dehors de (l'image de) la section nulle. Le sous-espace $T^1M = \{v \in TM \ : \ \|v\| = 1\}$ est donc une sous-variété lisse de TM, et la restriction à T^1M de la projection canonique $\pi : TM \to M$, encore notée π, est une fibration sur M de fibre la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$ de dimension

$n-1$. Cette fibration $\pi : T^1M \to M$ est appelée le *fibré unitaire tangent* de (M,g). Remarquons que T^1M est compacte si M l'est, alors que TM n'est jamais compacte si $n \geq 1$. Les géodésiques étant paramétrées à vitesse constante, le flot géodésique ϕ_t au temps $t \in \mathbb{R}$ préserve le fibré unitaire tangent T^1M de M. Plus généralement, le flot géodésique d'une variété riemannienne préserve la norme des vecteurs tangents.

Le flot géodésique d'une variété riemannienne (et en particulier le flot géodésique sur son fibré tangent unitaire) est un exemple fondamental de système dynamique (voir [KH]).

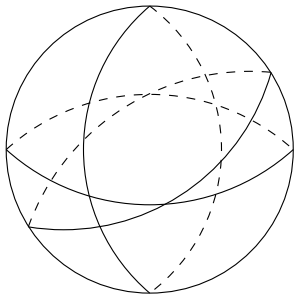
Exemples. (i) Nous avons vu que les géodésiques de l'espace pseudo-euclidien standard $\mathbb{R}^{p,q}$ (dont la connexion de Levi-Civita est la connexion triviale) sont les segments de droites paramétrés de manière affine. Si $n = p+q$, son flot géodésique ϕ_t au temps $t \in \mathbb{R}$ est l'application de $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par

$$\phi_t : (x,v) \mapsto (x+tv, v) \ .$$

Plus généralement, si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^{p,q}$, dont la première forme fondamentale est non dégénérée en tout point de M, alors les géodésiques de M sont les courbes c tracées sur M dont l'accélération $\ddot{c}$ est normale à M : si $c : I \to M$ est une courbe lisse, et si $v \mapsto v^{\parallel}$ est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^{p,q}$ sur T_xM, alors nous avons vu que

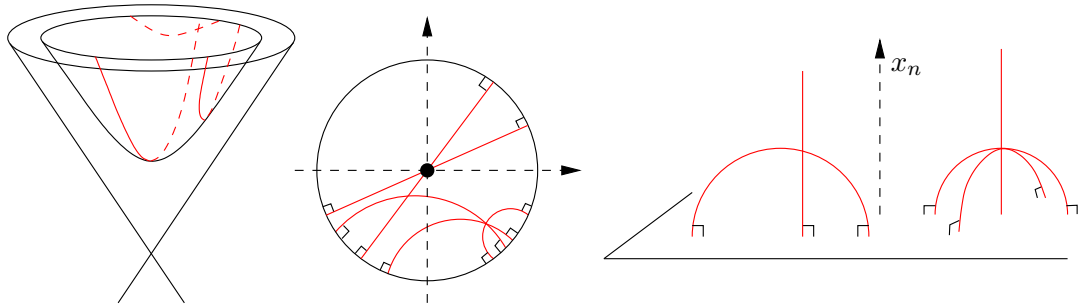
$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c}\,(t) = \big(\ddot{c}(t)\big)^{\parallel} \ .$$

En particulier, les arcs de grands cercles de la sphère $\mathbb{S}_n$, paramétrés à vitesse constante, dont l'accélération est centrifuge, c'est-à-dire normale à la sphère, sont des géodésiques de $(\mathbb{S}_n, ds^2_{\text{sph}})$, et par unicité ce sont les seules.



Dans le modèle du demi-hyperboloïde supérieur $(\mathscr{H}^n_+, ds^2_{\text{hyp}})$ de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, les arcs des intersections de $\mathscr{H}^n_+$ avec des plans vectoriels de $\mathbb{R}^{n+1}$ paramétrés à vitesse constante (pour la métrique lorentzienne), sont des géodésiques car leur accélération est normale (pour la métrique lorentzienne) à $\mathscr{H}^n_+$, et par unicité ce sont les seules. En utilisant les isométries entre modèles, il en découle que les géodésiques du modèle de la boule de Poincaré $(\mathbb{B}_n, ds^2_{\text{hyp}})$ de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ sont les arcs de demi-cercles et de segments de droites perpendiculaires au bord de la boule, paramétrés à vitesse constante. De même, les géodésiques du modèle du demi-espace supérieur de Lobatchevski $(\mathbb{R}^n_+, ds^2_{\text{hyp}})$ de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ sont les arcs de demi-cercle et demi-droites perpendiculaires au bord du demi-espace, paramétrés à vitesse constante (voir la figure ci-dessous).

Pour tout $x \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, l'application $\exp_x : T_x\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ est un C^∞-difféomorphisme (voir plus généralement le théorème de Cartan-Hadamard 3.40).



(ii) Si $p : \widetilde{M} \to M$ est un revêtement pseudo-riemannien, alors, par unicité et par le théorème de relèvement des courbes (et puisque un revêtement pseudo-riemannien est une isométrie locale), les géodésiques de M sont les composées par p des géodésiques de $\widetilde{M}$. Si la connexion de Levi-Civita de $\widetilde{M}$ est complète, celle de M l'est donc. Dans ce cas, si $(\widetilde{\phi}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot géodésique de $\widetilde{M}$, alors le flot géodésique de M est l'unique flot $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur TM tel que le diagramme suivant commute pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} T\widetilde{M} & \xrightarrow{\widetilde{\phi}_t} & T\widetilde{M} \\ {\scriptstyle Tp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Tp} \\ TM & \xrightarrow{\phi_t} & TM \end{array} ,$$

et réciproquement, si $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot géodésique de M, alors le flot géodésique de $\widetilde{M}$ est l'unique flot $(\widetilde{\phi}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur $T\widetilde{M}$ tel que le diagramme ci-dessus commute. En particulier, les géodésiques des tores plats $\mathbb{E}^n/\Lambda$, où Λ est un réseau de $\mathbb{R}^n$, sont les images des segments de droites de $\mathbb{R}^n$ paramétrés à vitesse constante. Les géodésiques des espaces projectifs réels $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ sont les images, par la projection canonique $\mathbb{S}_n \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_n/\{\pm 1\}$, des arcs de grands cercles de $\mathbb{S}_n$ paramétrés à vitesse constante. Les géodésiques des variétés hyperboliques quotients $\Gamma\backslash\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, où Γ est un sous-groupe du groupe des isométries de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ agissant librement et proprement sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, sont les composées par la projection canonique $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} \to \Gamma\backslash\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ des géodésiques de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$.

(iii) Soit g' une métrique pseudo-riemannienne sur M conforme à g, de facteur de conformité e^{2f}. Alors il découle de la proposition 3.7 que les géodésiques de g' sont les courbes lisses $c : I \to M$ telles que, pour tout $t \in I$,

$$\nabla^g_{\frac{d}{dt}} \dot{c}(t) \;=\; g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \;\operatorname{grad} f\,(c(t)) \;-\; 2\,\frac{d(f\circ c)}{dt}(t)\;\dot{c}(t)\;,$$

une formule qui n'est en général pas d'usage pratique. En particulier, si M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et si $g = ds^2_{\text{euc}}$ est la restriction à M de la métrique euclidienne de $\mathbb{E}^n$, alors une courbe lisse $c : I \to M$ est une géodésique de $g' = e^{2f} ds^2_{\text{euc}}$ si et seulement si elle vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{c} = \|\dot{c}\|^2\, \nabla f \circ c - 2\dot{f} \circ c\,(\dot{c})^2\;. \qquad (\cdot\,42\,\cdot)$$

(iv) Soient (M, g) et (M', g') deux variétés pseudo-riemanniennes. Les géodésiques de la variété pseudo-riemannienne produit $(M \times M', g \oplus g')$ sont les applications lisses $t \mapsto (c(t), d(t))$ telles que $t \mapsto c(t)$ et $t \mapsto d(t)$ sont des géodésiques de (M, g) et (M', g') respectivement.

En effet, nous avons vu dans la proposition 3.8 que la connexion de Levi-Civita de $(M \times M', g \oplus g')$ est la connexion produit des connexions de Levi-Civita de (M, g) et (M', g') :

$$\nabla^{g \oplus g'} = \nabla^g \times \nabla^{g'} .$$

Comme $T(M \times M') = TM \times TM'$, si $c : I \to M \times M'$ est une courbe lisse, de composantes $c_1 : I \to M$ et $c_2 : I \to M'$, alors $\dot{c}$ est le champ de vecteurs le long de I produit $t \mapsto (\dot{c_1}(t), \dot{c_2}(t))$. Donc par la propriété caractéristique des connexions produits (voir la proposition 2.33), nous avons

$$\nabla^{g \oplus g'}_{\frac{d}{dt}} \dot{c} = \left(\nabla^g_{\frac{d}{dt}} \dot{c_1} \, , \; \nabla^{g'}_{\frac{d}{dt}} \dot{c_2} \right) ,$$

ce qui montre le résultat.

Une manière géométrique de montrer ceci est la suivante. Soient V^M et H^M (respectivement $V^{M'}$ et $H^{M'}$) les fibrés verticaux et horizontaux sur TM (respectivement TM') définis par la connexion de Levi-Civita de (M, g) (respectivement (M', g')). Nous avons vu dans l'exemple (2) juste avant la partie 2.3.5 que le fibré vertical $V^{M \times M'}$ sur $T(M \times M') = TM \times TM'$ vérifie $V^{M \times M'}_{(v, v')} = V^M_v \times V^{M'}_{v'}$ pour tout $(v, v') \in TM \times TM'$, et que le fibré horizontal $H^{M \times M'}$ pour la connexion produit vérifie $H^{M \times M'}_{(v, v')} = H^M_v \times H^{M'}_{v'}$, pour tout $(v, v') \in TM \times TM'$. Une courbe lisse $c : I \to M \times M'$, de composantes $c_1 : I \to M$ et $c_2 : I \to M'$, est géodésique si et seulement si son accélération $\ddot{c} : I \to TT(M \times M')$ est horizontale, donc si et seulement si ses composantes, qui sont les accélérations $\ddot{c}_1 : I \to TTM$ et $\ddot{c}_2 : I \to TTM'$ sont horizontales, donc si et seulement si c_1 et c_2 sont des géodésiques.

(v) Soient G un groupe de Lie réel, d'élément neutre e, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et g une métrique riemannienne bi-invariante sur G.

Exercice E.43 *(1) Montrer que l'application inverse $i : G \to G$, définie par $x \mapsto x^{-1}$, est une isométrie de (G, g) fixant e telle que $T_e i = -\operatorname{id}_{\mathfrak{g}}$. En déduire que G est globalement symétrique (voir la partie 4.1), c'est-à-dire que pour tout $x \in G$, il existe une isométrie s_x de (G, g) fixant x telle que $T_x s_x = -\operatorname{id}_{T_x G}$.*

(2) Pour tout $v \in \mathfrak{g}$, soit c la géodésique maximale définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ telle que $c(0) = e$ et $\dot{c}(0) = v$. Montrer que c est définie sur tout $\mathbb{R}$, et que c est un sous-groupe à un paramètre de G. En déduire que la connexion de Levi-Civita de (G, g) est complète, et que les géodésiques de (G, g) sont les courbes intégrales des champs de vecteurs invariants à gauche.

(3) Montrer que l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to G$ du groupe de Lie G coïncide avec l'application exponentielle $\exp_e : T_e G \to G$ de la variété riemannienne (G, g).

(4) Si ∇ est la connexion de Levi-Civita de (G, g), montrer que pour tous les champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TG)$ invariants à gauche, nous avons

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] .$$

Nous concluons cette partie par une utilisation de l'application exponentielle pour étudier le groupe des isométries d'une variété pseudo-riemannienne.

Rappelons que si X et Y sont deux espaces métrisables localement compacts, la *topologie compacte-ouverte* (ou topologie de la convergence uniforme sur les compacts) est

la topologie sur l'ensemble $\mathscr{C}(X;Y)$ des applications continues de X dans Y telle pour tout $f \in \mathscr{C}(X;Y)$, pour toute distance d induisant la topologie de Y, les ensembles $\{f' \in \mathscr{C}(X;Y) \ : \ \sup_{x\in K} d(f'(x), f(x)) < \epsilon\}$ où K est un compact de X et $\epsilon > 0$ forment un système fondamental de voisinages ouverts de f. Nous renvoyons par exemple à [Hel] pour une démonstration du résultat suivant.

Théorème 3.10 (Théorème de Myers-Steenrod) *Pour toute variété pseudo-riemannienne (M, g), le groupe $\mathrm{Isom}(M, g)$ des isométries de (M, g), muni de la topologie compacte-ouverte, admet une unique structure de groupe de Lie réel, et l'action de $\mathrm{Isom}(M, g)$ sur M est lisse.* □

Remarque. L'action de $G = \mathrm{Isom}(M, g)$ sur M étant lisse, pour tout $x \in M$ le stabilisateur $G_x = \{\gamma \in G \ : \ \gamma x = x\}$ de x dans G, appelé le *sous-groupe d'isotropie* de (M, g) en x, est un sous-groupe de Lie plongé (donc fermé) de G (voir le lemme 1.58). L'application de G_x dans le groupe orthogonal $\mathrm{O}(g_x) \simeq \mathrm{O}(p, q)$ de la forme bilinéaire symétrique g_x sur T_xM, définie par $\gamma \mapsto T_x\gamma$, est un morphisme de groupes de Lie, appelé la *représentation d'isotropie* de (M, g) en x.

Proposition 3.11 *Pour toute variété pseudo-riemannienne connexe (M, g), la représentation d'isotropie $\gamma \mapsto T_x\gamma$ du stabilisateur dans $\mathrm{Isom}(M, g)$ d'un point x de M est un isomorphisme sur un sous-groupe fermé de $\mathrm{O}(g_x)$.*

Démonstration. Soit γ un élément dans le noyau de la représentation d'isotropie en x. Notons A l'ensemble des points y de M où $\gamma(y) = y$ et $T_y\gamma = \mathrm{id}_{T_yM}$. Il est non vide car $x \in A$. Il est clairement fermé, par continuité de γ et de $T\gamma$. Montrons qu'il est ouvert.

Soient $y \in A$ et U un voisinage ouvert de 0 dans T_yM tel que $\exp_y$ soit un difféomorphisme de U sur un voisinage ouvert de y dans M. Pour tout $v \in T_yM$, si $c : [0, 1] \to M$ est la géodésique de vecteur initial v d'origine y, alors $\gamma \circ c : [0, 1] \to M$ est la géodésique de vecteur initial $T_y\gamma(v)$ d'origine γy. Nous avons donc $\gamma \exp_y(v) = \exp_{\gamma y}(T_y\gamma(v)) = \exp_y(v)$ pour tout $v \in U$. Donc A contient le voisinage ouvert $\exp_y(U)$ de y. D'où A est ouvert, et par connexité de M, nous avons $A = M$. En particulier $\gamma = \mathrm{id}_M$. □

Le résultat précédent implique que si g est riemannienne, alors le stabilisateur dans $\mathrm{Isom}(M, g)$ d'un point x de M est compact, car le groupe orthogonal d'un produit scalaire l'est.

Il implique aussi que si M est une variété pseudo-riemannienne connexe, alors deux isométries ayant la même image en un point, et ayant même différentielle en ce point, sont égales ; en particulier, une isométrie fixant un point de M et dont la différentielle vaut l'identité sur l'espace tangent en ce point est l'identité. Ceci peut permettre de déterminer complètement les groupes d'isométries de variétés riemanniennes.

Corollaire 3.12 *L'inclusion canonique du groupe des rotations-translations $\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n)$ dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n, ds^2_{\mathrm{euc}})$ est un isomorphisme de groupes de Lie.*

L'application canonique de $\mathrm{O}(n + 1)$ dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}_n, ds^2_{\mathrm{sph}})$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

L'application canonique de $\mathrm{O}_+(1, n)$ dans $\mathrm{Isom}(\mathscr{H}^n_+, ds^2_{\mathrm{hyp}})$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

Démonstration. Il suffit de montrer, par la proposition précédente, que les sous-groupes en question agissent transitivement sur les bases orthonormées des espaces tangents aux divers points des variétés riemanniennes en question.

Pour montrer ceci, comme ces variétés sont homogènes, il suffit de montrer que le stabilisateur d'un point fixé agit transitivement sur les bases orthonormées de son espace tangent. Or les stabilisateurs des points $(0,\dots,0) \in \mathbb{E}^n$, $(1,0,\dots,0) \in \mathbb{S}_n$ et $(1,0\dots,0) \in \mathscr{H}^n_+$ sont respectivement

$$\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n)}(0,\dots,0) = \mathrm{O}(n) \ ,$$

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{O}(n+1)}(1,0,\dots,0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathrm{O}(n) \right\}$$

et

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{O}_+(1,n)}(1,0,\dots,0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathrm{O}(n) \right\} .$$

Leurs actions sur l'espace tangent en ces points sont conjuguées, par un isomorphisme linéaire isométrique, à l'action linéaire de $\mathrm{O}(n)$ sur $\mathbb{R}^n$. Celle-ci est clairement transitive sur les bases orthonormées, d'où le résultat. □

Exercice E.44 *(1) Pour tous les $p, q \in \mathbb{N}$, déterminer les groupes d'isométries des espaces pseudo-euclidiens standards $(\mathbb{R}^{p,q}, ds^2_{\mathbb{R}^{p,q}})$.*

(2) Déterminer les groupes d'isométries des variétés pseudo-riemanniennes $\mathbb{S}_{n,p}$ et $\mathbb{H}_{n,p}$ définies dans l'exemple (ii) de la partie 3.1.

Le but de la partie suivante est de donner, dans le cas riemannien qui nous intéresse de manière prépondérante, une interprétation non différentielle aux géodésiques.

3.4 Distance riemannienne

Soit (M, g) une variété riemannienne.

Rappelons qu'une courbe $c : [a, b] \to M$ est dite *de classe* C^1 *par morceaux* si elle est continue et s'il existe une subdivision finie $t_0 = a \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que la restriction de c à chaque morceau $[t_{i-1}, t_i]$ soit de classe C^1 pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$. Un *paramétrage* d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une application continue, monotone, surjective $\varphi : J \to I$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$. Notons que φ n'est pas forcément injective, mais qu'elle est différentiable presque partout (pour la mesure de Lebesgue). Si $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$, pour toute application continue $f : I \to \mathbb{R}$, avons avons

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_c^d f \circ \varphi(s)\, |\varphi'(s)|\ ds \ .$$

Pour toute courbe $c : [a, b] \to M$ de classe C^1, appelons *longueur* de c pour g et *énergie* de c pour g les quantités respectives

$$\mathrm{long}(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\ dt \quad \text{et} \quad E(c) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{c}(t)\|^2\ dt \ .$$

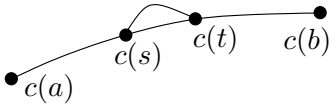
En sommant sur chaque morceau, on définit aussi la longueur $\mathrm{long}(c)$ et l'énergie $E(c)$ d'une courbe c de classe C^1 par morceaux. Notons que la longueur ne dépend pas du paramétrage C^1 par morceaux de c, par changement de variable, mais que l'énergie en

dépend. Bien sûr, si $c : [a, b] \to M$ est paramétrée à vitesse constante (par exemple si c est une géodésique), alors

$$\mathrm{long}(c) = \|\dot{c}(a)\| \, |b - a| \quad \text{et} \quad E(c) = \frac{1}{2} \, \|\dot{c}(a)\|^2 \, |b - a| \, .$$

La *distance riemannienne* de (M, g) est l'application $d = d_g : M \times M \to [0, +\infty[$, où, pour tous les $x, y \in M$, le réel $d(x, y)$ est la borne inférieure des longueurs des courbes C^1 par morceaux de x à y. Une courbe $c : I \to M$ de classe C^1 par morceaux, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, est dite *minimisante* si pour tous les $s \leq t$ dans I, la longueur de $c_{|[s,t]}$ est égale à $d(c(s), c(t))$, c'est-à-dire à la borne inférieure des longueurs des courbes C^1 par morceaux de $c(s)$ à $c(t)$.

Par additivité de la longueur, si $c : [a, b] \to M$ est une courbe C^1 par morceaux de longueur égale à $d(c(a), c(b))$, alors c est minimisante, sinon nous pourrions trouver une courbe C^1 par morceaux strictement plus courte entre $c(a)$ et $c(b)$.



Une courbe $c : I \to M$ de classe C^1 par morceaux est dite *localement minimisante* si pour tout $t_0 \in I$, il existe un voisinage I_0 de t_0 dans I tel que $c_{|I_0}$ soit minimisante.

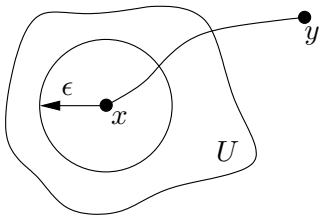
Le résultat suivant dit que la distance riemannienne est bien une distance (sur chaque composante connexe de M). L'importance de cette distance est cruciale en géométrie riemannienne. Il est possible de retrouver presque tous les objets introduits dans ce cours pour les variétés riemanniennes à partir de la distance riemannienne, et nous essaierons de donner, au moins en parallèle, une telle approche de manière systématique. Ce point de vue a été popularisé par Gromov, et nous conseillons fortement l'étude de ses livres [Gro1, Gro3].

Proposition 3.13 *Si M est connexe, la distance riemannienne est une distance sur M, induisant la topologie de M.*

Toute variété riemannienne sera désormais munie de sa distance riemannienne.

Démonstration. Par connexité de M, l'application d_g est bien définie et positive. Par réversibilité et additivité de la longueur, il est immédiat que d_g est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire.

Soient x et y deux points distincts de M. Quitte à prendre une carte locale, nous pouvons supposer qu'un petit voisinage ouvert U de x est contenu dans $\mathbb{R}^n$, dont nous notons $\|\cdot\|_{\mathrm{euc}}$ la norme usuelle. Soit $\epsilon > 0$ tel que la boule euclidienne B_ϵ de centre x et de rayon ϵ soit contenu dans U et ne contienne pas y.



Par continuité de la métrique g, il existe $a > 0$ tel que pour tout $z \in B_\epsilon$, pour tout $v \in T_z M = \mathbb{R}^n$, nous avons $\frac{1}{a^2} \|v\|^2_{\mathrm{euc}} \leq g_z(v, v) \leq a^2 \|v\|^2_{\mathrm{euc}}$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, toute courbe c de classe C^1 par morceaux de x à y devant traverser la sphère euclidienne S_ϵ de centre x et de rayon ϵ, sa longueur pour g est au moins $\frac{1}{a}$ fois la

longueur pour la distance euclidienne d'un chemin de x à S_ϵ, donc au moins $\frac{\epsilon}{a} > 0$. Donc d_g vérifie l'axiome de séparation des distances.

Ce qui précède montre que la longueur d'une courbe contenue dans U pour g est au plus a fois, et au moins $\frac{1}{a}$ fois, sa longueur pour la distance euclidienne. Comme la distance euclidienne entre deux points est la borne inférieure des longueurs euclidiennes des chemins entre ces points, la distance d_g est donc équivalente à la distance euclidienne en restriction à U. Comme U contient la boule pour d_g de centre x et de rayon $\frac{\epsilon}{a}$, ceci implique que la topologie définie par d_g et la topologie originale coïncident. $\square$

Nous allons montrer, après quelques définitions, que les courbes localement minimisantes, paramétrées à vitesse constante, sont les géodésiques, et donner une caractérisation purement en terme de la distance riemannienne des géodésiques.

(Carte exponentielle et rayon d'injectivité) Nous avons vu que pour tout $x \in M$, il existe $\epsilon > 0$ tel que l'application exponentielle $\exp_x$ de (M, g) en x est un C^∞-difféomorphisme sur son image, défini sur la boule ouverte B de centre 0 et de rayon ϵ dans l'espace euclidien T_xM, à valeurs dans M, appelé une *carte exponentielle* en x. Le *rayon d'injectivité de M en x*, noté $\mathrm{inj}_M(x) \in]0, +\infty]$, est la borne supérieure de ces $\epsilon > 0$. Le *rayon d'injectivité* de M, noté $\mathrm{inj}(M)$, est la borne inférieure des rayons d'injectivité de M en tous les points de M (il peut être n'importe quel élément de $[0, +\infty]$).

Par les propriétés de l'application $\exp : TM \to M$, l'application $x \mapsto \mathrm{inj}_M(x)$ est semi-continue inférieurement.

Par exemple, le rayon d'injectivité en tout point de l'espace euclidien standard $\mathbb{E}^n$ est $+\infty$, celui en tout point de la sphère standard $(\mathbb{S}_n, ds^2_{\mathrm{sph}})$ est π, et celui en tout point de chaque modèle de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ est $+\infty$.

Exercice E.45 *Montrer que la carte exponentielle (maximale) au point* 0 *du modèle de la boule (de Poincaré) du plan hyperbolique réel* $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ *est l'application* $\exp_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{B}_2$ *définie (en coordonnées polaires) par*

$$r\, e^{i\theta} \mapsto \log\big(\frac{1+r}{1-r}\big)\, e^{i\theta}\ .$$

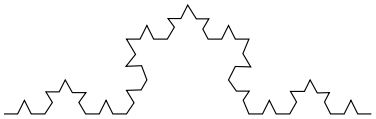
(Minimisation de l'énergie) Nous dirons qu'une courbe $c : I \to M$ de classe C^1 par morceaux, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, *minimise l'énergie* si pour tous les $s \leq t$ dans I, l'énergie de $c_{|[s,t]}$ est égale à la borne inférieure des énergies des courbes $\gamma : [s, t] \to M$ de classe C^1 par morceaux entre $c(s)$ et $c(t)$. Une courbe $c : I \to M$ de classe C^1 par morceaux *minimise localement l'énergie* si pour tout $t_0 \in I$, il existe un voisinage I_0 de t_0 dans I tel que $c_{|I_0}$ minimise l'énergie.

(Longueur des courbes continues et espaces de longueur) Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout chemin continu $c : [a, b] \to X$ dans X, appelons *longueur* de c pour la distance d, et notons $\mathrm{long}_d(c) \in [0, +\infty]$, la borne supérieure des $\sum_{i=0}^n d(c(t_i), c(t_{i+1}))$ où $n \in \mathbb{N}$ et $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t_{n+1} = b$ est une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. La longueur ne dépend pas du paramétrage : pour toute application continue, monotone et surjective $f : [a', b'] \to [a, b]$, les longueurs de c et de $c \circ f$ sont égales.

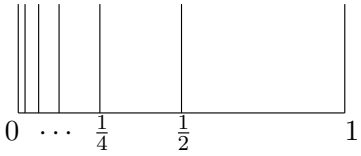
Un chemin continu $c : I \to X$ est dit *paramétré par longueur d'arc* (respectivement *proportionnellement à la longueur d'arc*) si $\mathrm{long}_d(c_{|_{[s,t]}}) = t - s$ pour tous les $s \leq t$ dans I (respectivement s'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tous les $s \leq t$ dans I, nous ayons $\mathrm{long}_d(c_{|_{[s,t]}}) = \lambda(t - s)$).

Un chemin continu $c : I \to X$ dans X est dit *rectifiable* pour d si la longueur de $c_{|_{[a,b]}}$ pour d est finie, pour tous les $a \leq b$ dans I. Si $c : [a,b] \to X$ est un chemin continu rectifiable, alors l'application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $t \mapsto \mathrm{long}_d(c_{|_{[a,t]}})$ est une application continue croissante (pas forcément injective) d'image un intervalle $[0,L]$. Soit $g : [0,L] \to [a,b]$ l'application continue à gauche (mais pas forcément à droite) définie par $g(t) = \inf\{s \in [a,b] \ : \ f(s) = t\}$, qui est égale à f^{-1} si f est de plus injective. L'application $c' = c \circ g : [0,L] \to X$ est un chemin continu paramétré par longueur d'arc tel que $c' \circ f = c$, appelé *reparamétrage* par longueur d'arc de c.

Pour tous les x, y dans X, notons $d_\ell(x,y) \in [0,+\infty]$ la borne inférieure des longueurs pour d des chemins continus de x à y. Notons que $d_\ell(x,y) \geq d(x,y)$, donc si X est connexe par chemins rectifiables (au sens évident), alors d_ℓ est une distance sur X, appelée la *distance de longueur* associée à d. Si X est une partie d'un espace métrique Y, alors la distance de longueur associée à la distance induite sur X par celle de Y est appelée la *distance de longueur induite* de X par la distance de Y. Nous prendrons bien garde à ne pas confondre la distance induite et la distance de longueur induite. Par exemple, deux points antipodaux du cercle sont à distance induite 2, mais à distance de longueur induite π.



Courbe de von Koch



Rappelons que la *courbe de von Koch* est le sous-espace fermé borné K de $\mathbb{R}^2$ obtenu de la manière suivante (voir la figure ci-dessus). Considérons la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de lignes polygonales du plan $\mathbb{R}^2$, où K_n est formé de 4^n segments consécutifs de longueurs $\frac{1}{3^n}$, qui est définie ainsi par récurrence : K_0 est l'intervalle unité horizontal $[0,1]$; K_{n+1} est obtenu à partir de K_n en subdivisant en trois chacun des 4^n segments de K_n, et en remplaçant le tiers du milieu τ par les deux autres côtés du triangle équilatéral ayant τ comme base (et situé à gauche en parcourant K_n, bien que ceci n'ait guère d'importance). L'application $c_n : [0,1] \to K_n$, obtenue en découpant l'intervalle $[0,1]$ en 4^n segments de longueurs égales, puis en prenant sur chacun de ces segments une application affine sur le segment correspondant de K_n, est uniformément de Cauchy, donc converge vers une application continue c de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$, dont l'image est K. Cette courbe c n'est pas rectifiable, car la longueur de c est supérieure ou égale à la longeur de c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la longueur de c_n est $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ qui tend vers $+\infty$. Si (X,d) est l'espace métrique K muni de la distance induite de $\mathbb{R}^2$, alors la distance de longueur d_ℓ associée n'est pas une distance : $d_\ell(x,y)$ vaut 0 si $x = y$ et $+\infty$ sinon.

Considérons le sous-espace X de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$X = \big([0,1] \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times [0,1]\big) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(\{\frac{1}{2^n}\} \times [0,1]\big) \ ,$$

muni de la distance d induite par celle de $\mathbb{R}^2$ (voir la figure de droite ci-dessus). Alors la topologie induite par la distance par longueur d_ℓ n'est pas la topologie de X : la suite de points $(\frac{1}{2^n}, 1)$ de X converge vers $(0,1)$ dans X pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$, mais pas pour la topologie induite par la distance de longueur d_ℓ.

Un espace métrique (X, d) est appelé un *espace de longueur* si la distance de longueur induite d_ℓ associée à d est égale à d.

Proposition 3.14 *Soit (M, g) une variété riemannienne.*

(1) Soient $x \in M$, $s \in [0, \mathrm{inj}_M(x)[$ et $v \in T_x^1 M$. L'application de $[0, s]$ dans M définie par $t \mapsto \exp_x tv$ est l'unique géodésique entre les points x et $\exp_x(sv)$ contenue dans $\exp_x(\overline{B}_{T_xM}(0, s))$. C'est l'unique courbe C^1 par morceaux, paramétrée à vitesse constante, minimisante entre ces deux points. La sphère (respectivement boule) de centre x et de rayon s pour la distance riemannienne est l'image par $\exp_x$ de la sphère (respectivement boule) de centre 0 et de rayon s dans l'espace euclidien (T_xM, g_x) :

$$B_M(x, s) = \exp_x \left(B_{T_xM}(0, s) \right) .$$

(2) Soit $x_0 \in M$. Il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans M tel que pour tous les x, y dans U, il existe une et une seule géodésique minimisante $c : [0, d(x, y)] \to M$ entre x et y.

(3) Soit $c : I \to M$ une courbe C^1 par morceaux. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- *c est une géodésique (donc est lisse) ;*
- *c est paramétrée à vitesse constante et est localement minimisante ;*
- *c est localement minimisante pour l'énergie ;*

(4) Si $c : [a, b] \to M$ est une courbe C^1 par morceaux, paramétrée à vitesse constante, de longueur égale à $d(c(a), c(b))$, alors c est une géodésique minimisante.

(5) Si $c : [a, b] \to M$ est une courbe continue dont la longueur pour la distance riemannienne est égale à la distance $d(c(a), c(b))$ entre ses extrémités, alors c admet un unique paramétrage lisse à vitesse constante (donc faisant de c une géodésique minimisante). Les géodésiques sont donc les courbes continues, paramétrées proportionnellement à la longueur d'arc, dont la longueur (pour la distance riemannienne) entre deux points suffisamment proches minimise la longueur des courbes continues entre ces deux points.

(6) Si M est connexe, la distance riemannienne d est égale à sa distance de longueur associée.

Remarques. (i) Nous verrons dans l'exercice E.56 que dans l'assertion (2), nous pouvons prendre U tel que l'image de la géodésique minimisante c entre deux points de U reste dans U.

(ii) Il découle de la propriété (5) que toute limite uniforme de géodésiques minimisantes $c_n : [0, 1] \to M$ est encore une géodésique minimisante.

(iii) Soient (M, g) et (M', g') deux variétés riemanniennes. Remarquons qu'une géodésique de la variété riemannienne produit $(M \times M', g \oplus g')$, de la forme $t \mapsto (c(t), d(t))$, définie sur un intervalle I, est paramétrée par longueur d'arc si et seulement si, en posant $a = \|\dot{c}(t)\|$ et $b = \|\dot{d}(t)\|$ (qui ne dépend pas de $t \in I$), nous avons $a^2 + b^2 = 1$. En particulier, si c et d sont paramétrées par longueur d'arc, alors $t \mapsto (c(\frac{t}{\sqrt{2}}), d(\frac{t}{\sqrt{2}}))$ l'est aussi.

Afin de démontrer la proposition 3.14, nous aurons besoin du lemme suivant, aussi utile par lui-même.

Lemme 3.15 (Lemme de Gauss) *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. Pour tous les $x \in M$ et $v, w \in T_xM$ tels que $\exp_x$ soit définie en v, nous avons*

$$\langle T_v \exp_x(v), T_v \exp_x(w)\rangle_{\exp_x v} \;=\; \langle v, w\rangle_x \;.$$

En particulier, si (M, g) est riemannienne, en identifiant $]0, \mathrm{inj}_M(x)[\times T^1_xM$ et la boule épointée $B_{T_xM}(0, \mathrm{inj}_M(x)) - \{0\}$ par $(r, u) \mapsto ru$, l'expression de la métrique g dans une carte exponentielle en x est

$$g_{(r,\,u)} = dr^2 + h_{r,\,u} \;,$$

où $h_{r,u}$ est un produit scalaire sur $T_uT^1_xM = u^\perp$.

Si g est riemannienne, ce lemme dit que l'application exponentielle préserve la norme des vecteurs radiaux

$$\|T_v \exp_x(v)\|_{\exp_x v} = \|v\|_x$$

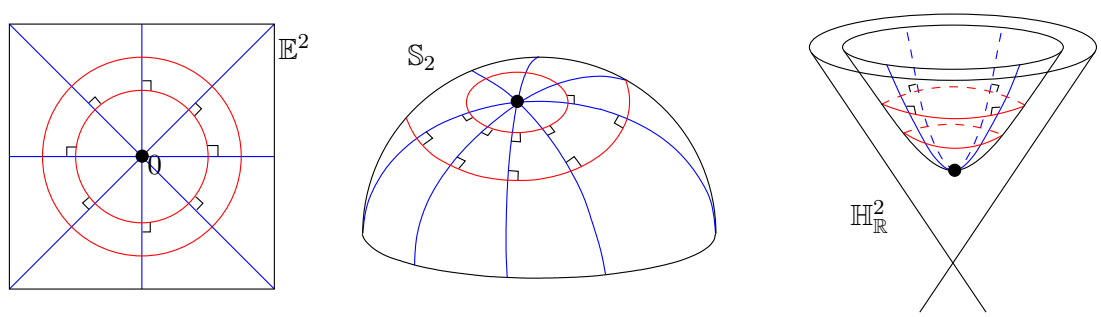
(prendre $v = w$ ci-dessus), ainsi que les produits scalaires avec les vecteurs radiaux. En particulier, elle est isométrique le long des droites vectorielles. De plus, les rayons géodésiques issus de x sont perpendiculaires aux sphères pour la distance riemannienne de centre x et de rayons strictement inférieurs à $\inf_M(x)$.

Par exemple, il est laissé en exercice de montrer que les métriques euclidiennes, sphériques, hyperboliques de $\mathbb{E}^2, \mathbb{S}_2, \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ sont, dans la carte exponentielle maximale en tout point et en notant $d\theta^2$ la métrique riemannienne sphérique sur le cercle, respectivement de la forme

$$ds^2_{\mathrm{euc}} = dr^2 + r^2 d\theta^2 \;\text{ où }\; r > 0 \;,$$

$$ds^2_{\mathrm{sph}} = dr^2 + \sin^2 r\; d\theta^2 \;\text{ où }\; 0 < r < \pi \;,$$

$$ds^2_{\mathrm{hyp}} = dr^2 + \sinh^2 r\; d\theta^2 \;\text{ où }\; r > 0 \;.$$



Démonstration. Pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, notons $N =]-\epsilon, 1+\epsilon[\times]-\epsilon, \epsilon[$ et $f : N \to M$ l'application

$$(t, s) \mapsto \exp_x(tv + tsw) \;,$$

qui est bien définie et est une immersion lisse si ϵ est assez petit. Reprenons les notations de la proposition 2.42 : pour $X \in \Gamma(TN)$, notons $\overline{X} \in \Gamma(f^*TM)$ la section lisse du fibré image réciproque f^*TM définie par $\overline{X}(x) = T_xf(X(x))$; notons $\overline{\nabla} = f^*\nabla$ la connexion image réciproque de ∇ sur f^*TM (qui est bien une connexion, voir la proposition 2.36) ; notons $\overline{g}$ la métrique pseudo-euclidienne sur le fibré vectoriel f^*TM définie par $\overline{g}_x = g_{f(x)}$.

Notons $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial s}$ les champs de vecteurs coordonnées de N. Rappelons que le crochet des champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial s}$ est nul, par le lemme de Schwarz.

En particulier, $c_{v+sw} : t \mapsto f(t,s)$ est une géodésique, et $\overline{\frac{\partial}{\partial t}}(t,s) = \dot{c}_{v+sw}(t)$, donc $\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} = 0$.

Par la proposition 2.42 (1) et (2), en utilisant pour l'avant-dernière égalité le fait que l'application $t \mapsto g_{a(t)}(\dot{a}(t), \dot{a}(t))$ est constante pour toute géodésique a, nous avons donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\, \overline{g}\Big(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial s}}\Big) &= \overline{g}\Big(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial s}}\Big) + \overline{g}\Big(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}}\Big) \\
&= \overline{g}\Big(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} + \overline{[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}]}\Big) = \overline{g}\Big(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}}\Big) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s}\, \overline{g}\Big(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial t}}\Big) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds}\, g\big(\dot{c}_{v+sw}(t), \dot{c}_{v+sw}(t)\big) \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{ds}\, g(v+sw, v+sw) = g(v,w) + s g(w,w)\ .
\end{aligned}$$

Notons $h :]-\epsilon, 1+\epsilon[\to \mathbb{R}$ l'application lisse définie par

$$t \mapsto \langle T_{tv} \exp_x(tv), T_{tv} \exp_x(tw) \rangle_{\exp_x(tv)}\ .$$

Remarquons que $\overline{\frac{\partial}{\partial t}}(t,0) = T_{tv} \exp_x(tv)$ et $\overline{\frac{\partial}{\partial s}}(t,0) = T_{tv} \exp_x(tw)$. Nous avons, par ce qui précède,

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\, \overline{g}\Big(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial s}}\Big)(t,0) = g(v,w)\ .$$

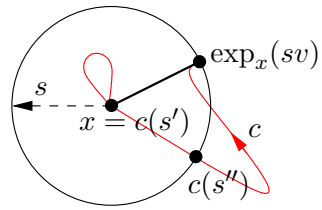
Comme $h(0) = 0$ par linéarité des applications tangentes, nous avons donc $h(t) = t\, g(v,w)$ pour tout $t \in]-\epsilon, 1+\epsilon[$. Donc $h(1) = g(v,w)$, ce qui est le résultat cherché. □

Démonstration de la proposition 3.14.

(1) Soient $x \in M$, $v \in T^1_x M$, $s \in [0, \mathrm{inj}_M(x)[$ et $c_v : [0,s] \to M$ la géodésique définie par $t \mapsto \exp_x(tv)$.

La première affirmation découle du fait que $\exp_x$ est un C^∞-difféomorphisme de $B(0,s')$ sur son image dans M pour tout $s' < \mathrm{inj}_M(x)$, et de l'unicité d'une géodésique de vecteur vitesse en son origine donné.

Soit $c : [a,b] \to M$ une courbe C^1 par morceaux entre x et $\exp_x(sv)$, montrons que $\mathrm{long}(c) \geq s$. Ceci montrera que c_v est minimisante, car $\mathrm{long}(c_v) = s$ par la première affirmation du lemme de Gauss. Soient $s' \in [0,s]$ le dernier instant où c passe par x, et $s'' \in [s', s]$ le premier instant après s' où c atteint la sphère $S(x,s) = \exp_x(S_{T_x M}(0,s))$, qui existent par continuité et compacité, et parce que c part de x à l'instant $t = 0$ et atteint cette sphère à l'instant $t = s$.



Alors $c_{|[s',s'']}$ reste dans la carte exponentielle en x, et en notant la coordonnée radiale $r(t) = \|(\exp_x)^{-1} c(t)\|$, il découle du lemme de Gauss que

$$\begin{aligned}
\mathrm{long}(c) \geq \mathrm{long}(c_{|[s',s'']}) &= \int_{s'}^{s''} \|\dot{c}(t)\|\, dt \geq \int_{s'}^{s''} |\dot{r}(t)|\, dt \\
&\geq \Big| \int_{s'}^{s''} \dot{r}(t)\, dt \Big| = \big| r(s'') - r(s') \big| = s\ .
\end{aligned}$$

Étudions maintenant le cas d'égalité. Soit $c : [a, b] \to M$ une courbe C^1 par morceaux entre x_0 et $\exp_x(sv)$, paramétrée à vitesse constante (ce qu'il est toujours possible de faire sans changer la longueur) telle que $\mathrm{long}(c) = s$. Les cas d'égalité dans la suite d'inégalités ci-dessus montrent que $s' = 0$ et $s'' = s$, que $\|\dot{c}(t)\| = 1$, que c est radiale dans une carte exponentielle en $c(0)$, donc de la forme $t \mapsto r(t)w$ où $w \in T_{c(0)}M$, et que $\dot{r}(t)$ est constant, donc que $c(t) = t\,\dot{c}(0)$. Puisque $c(s) = c_v(s)$, nous avons donc $c = c_v$ par la première affirmation de (1).

(2) Notons $\pi : TM \to M$ la projection canonique. Nous avons vu qu'il existe un voisinage U de la section nulle de TM telle que l'application de U dans $M \times M$ définie par $v \mapsto (\pi(v), \exp v)$ est un C^∞-difféomorphisme local sur un voisinage de la diagonale.

Donc pour tout x_0, il existe $\epsilon > 0$ et un voisinage ouvert V de x_0 tel que pour tous les x, y dans V, il existe une unique géodésique $c : [0, 1] \to M$ entre x et y telle que $\|\dot{c}(0)\| < \epsilon$. (Notons que la longueur de c est donc strictement inférieure à ϵ, mais qu'il pourrait exister une autre géodésique entre x et y dont la longueur est supérieure à ϵ.) Si V est assez petit, cette géodésique est contenue dans une carte exponentielle en x, donc est minimisante par (1).

(3) Pour obtenir l'équivalence des trois points de cette assertion, montrons tout d'abord que le troisième point implique le premier.

Soit $c : [a, b] \to M$ une courbe C^1 par morceaux. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$2\,E(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|^2\,dt \geq \frac{\left(\int_a^b \|\dot{c}(t)\|\,dt\right)^2}{\int_a^b 1^2\,dt} = \frac{\mathrm{long}(c)^2}{(b-a)}\,, \qquad (\cdot\,43\,\cdot)$$

avec égalité si et seulement si $\|\dot{c}(t)\|$ est constant, c'est-à-dire si c est paramétrée à vitesse constante. En particulier, une courbe qui minimise localement l'énergie est paramétrée à vitesse constante. De plus, si $\gamma : [a, b] \to M$ est une courbe C^1 par morceaux entre $c(a)$ et $c(b)$, si $\widetilde{\gamma}$ est son reparamétrage à vitesse constante par l'intervalle $[a, b]$, et si c minimise l'énergie, alors

$$\mathrm{long}(\gamma) = \mathrm{long}(\widetilde{\gamma}) = \big(2E(\widetilde{\gamma})|b-a|\big)^{\frac{1}{2}} \geq \big(2E(c)|b-a|\big)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{long}(c)\,.$$

Donc c est minimisante, et en particulier localement minimisante. Par (1), c est donc (localement) géodésique.

Montrons maintenant que le premier point implique le second. Nous avons montré au tout début de la partie 3.3 qu'une géodésique est paramétrée à vitesse constante. Le résultat découle alors de (1).

Montrons enfin que le second point implique le troisième. Soit $c : I \to M$ une courbe C^1 par morceaux, paramétrée à vitesse constante, localement minimisante. Montrons que c minimise localement l'énergie. Quite à restreindre I, nous pouvons supposer que c est minimisante. Pour tous les $a \leq b$ dans I, pour toute courbe $\gamma : [a, b] \to M$ de classe C^1 par morceaux entre $c(a)$ et $c(b)$, par la formule $(\cdot\,43\,\cdot)$, nous avons

$$2E(\gamma) \geq \frac{\mathrm{long}(\gamma)^2}{(b-a)} \geq \frac{\mathrm{long}(c)^2}{(b-a)} = 2E(c)$$

puisque c est minimisante et paramétrée à vitesse constante. Donc c minimise l'énergie.

(4) Ceci découle de (3), car nous avons déjà vu qu'une courbe C^1 par morceaux dont la longueur est égale à la distance entre ses extrémités est minimisante.

(5) Soit $c : [a, b] \to M$ une courbe continue de longueur pour la distance riemannienne d égale à la distance $d(x, y)$ entre ses extrémités $x = c(a)$ et $y = c(b)$. En particulier, c est rectifiable. Quitte à changer son paramétrage, nous pouvons supposer qu'elle est paramétrée par longueur d'arc, et que $a = 0$ et $b = d(x, y)$. Montrons que c est une géodésique.

Pour tous les éléments $s \leq t$ dans $[a, b]$, la longueur du chemin continu $c_{|[s,\,t]}$ est égale à $d(c(s), c(t))$, car par additivité de la longueur et par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} d(c(s), c(t)) &\leq \mathrm{long}_d(c_{|[s,\,t]}) = \mathrm{long}_d(c) - \mathrm{long}_d(c_{|[a,\,s]}) - \mathrm{long}_d(c_{|[t,\,b]}) \\ &\leq d(x, y) - d(x, c(s)) - d(c(t), y) \leq d(c(s), c(t)) \ . \end{aligned}$$

Puisque la propriété d'être une géodésique est locale, nous pouvons donc supposer que x et y appartiennent à un voisinage ouvert U comme dans l'assertion (2). Soit $\gamma : [0, d(x, y)] \to M$ une géodésique minimisante (paramétrée par longueur d'arc) de x à y. Si l'image de c n'est pas contenue dans celle de γ, il existe alors un point $z \in U$ hors de l'image de γ qui appartient à l'image de c. Mais alors la réunion des géodésiques minimisantes de x à z et de z à y est une courbe C^1 par morceaux de longueur inférieure ou égale à celle de c, donc de longueur égale à $d(x, y)$, donc est minimisante, donc est égale à γ par unicité, ce qui n'est pas possible. Comme les courbes c et γ ont même image, même domaine et sont paramétrées par longueur d'arc, elles coïncident.

(6) Notons d la distance riemannienne de (M, g) et d_ℓ sa distance de longueur associée, qui vérifie $d \leq d_\ell$. Montrons que pour tous les $\epsilon > 0$ et $x, y \in M$, nous avons $d_\ell(x, y) \leq d(x, y) + \epsilon$, ce qui montre l'assertion (6) en faisant tendre ϵ vers 0. Par définition de d, soit $\gamma : [0, 1] \to M$ un chemin C^1 par morceaux tel que $\mathrm{long}(\gamma) \leq d(x, y) + \epsilon$. Par additivité de la longueur, quitte à prendre une subdivision suffisamment fine $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = 1$, nous pouvons supposer qu'il existe une géodésique minimisante entre $\gamma(t_{i-1})$ et $\gamma(t_i)$ pour tout $1 \leq i \leq k$. En concaténant (mettant bout à bout) ces chemins, on obtient un chemin géodésique minimisant par morceaux γ' entre x et y tel que $\mathrm{long}(\gamma') \leq \mathrm{long}(\gamma)$. Or si α est une géodésique minimisante, alors sa longueur $\mathrm{long}(\alpha)$ en tant que chemin C^1 par morceaux coïncide avec sa longueur $\mathrm{long}_d(\alpha)$ pour la distance riemannienne, par additivité des distances par subdivision. Comme les deux notions de longueur sont additives, on en déduit que

$$d_\ell(x, y) \leq \mathrm{long}_d(\gamma') = \mathrm{long}(\gamma') \leq \mathrm{long}(\gamma) \leq d(x, y) + \epsilon \ ,$$

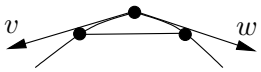
ce qui conclut. □

Corollaire 3.16 *Si M est compacte, alors son rayon d'injectivité est strictement positif, et toute classe d'homotopie de lacet (libre) non triviale contient une géodésique fermée.*

Démonstration. Par un argument de compacité, il est facile de voir que le rayon d'injectivité de M est strictement positif. Soit $\epsilon \in \,]0, \mathrm{inj}(M)[$. Notons que tout lacet (continu) est librement homotope à un lacet C^1 par morceaux. Soient $\mathscr{C}$ une classe d'homotopie non triviale, L la borne inférieure des longueurs des éléments C^1 par morceaux de $\mathscr{C}$, et $(c_i : [0, 1] \to M)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de courbes C^1 par morceaux de $\mathscr{C}$ dont la longueur tend vers L. Notons que $L > 0$, car M est localement contractile. Nous pouvons supposer que c_i est paramétré à vitesse constante, et que sa longueur est comprise entre

L et $L+1$. Ceci implique que c_i est uniformément continue, donc converge quitte à extraire, par le théorème d'Ascoli, vers une application continue $c : [0,1] \to M$. Soit $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t_{n+1} = 1$ une subdivision de $[0,1]$ telle que $t_{i+1} - t_i < \frac{\epsilon}{L+1}$. Quitte à remplacer $c_{|[t_i,\, t_{i+1}]}$ par l'unique géodésique minimisante paramétrée par $[t_i, t_{i+1}]$ entre $c(t_i)$ et $c(t_{i+1})$, nous pouvons supposer que c_i est une géodésique minimisante entre t_i et t_{i+1}. Par compacité, nous pouvons supposer quitte à extraire que $c(t_i)$ et les vecteurs vitesse à droite et à gauche en t_i convergent. La limite c est donc géodésique par morceaux, de longueur L.

Si elle n'était pas géodésique, on pourrait la raccourcir strictement en coupant un angle (voir le dessin ci-contre) : si v et w sont des vecteurs unitaires d'un espace euclidien, d'angle $\alpha \in [0, \pi[$, alors $\|tv - tw\| - \|tv\| - \|tv\| = 2t(\sin \frac{\alpha}{2} - 1) < 0$.



Enfin, la limite c est encore dans la classe d'homotopie $\mathscr{C}$, car puisque M est une variété, toute classe d'homotopie est fermée pour la topologie de la convergence uniforme. $\square$

Remarque. Soient (M, g) et (M', g') deux variétés riemanniennes connexes et $f : M \to M'$ une application. Alors f est une isométrie de (M, g) dans (M', g') si et seulement si f est une isométrie entre les distances riemanniennes d_g et $d_{g'}$. Le sens direct est immédiat par définition de la distance riemannienne. La réciproque découle de la caractérisation métrique des géodésiques, une isométrie pour les distances riemanniennes devant envoyer géodésique minimisante sur géodésique minimisante (de même longueur), donc être de classe C^1 et préserver les normes riemanniennes, donc être de classe C^∞ en regardant en carte exponentielle. En particulier, le groupe des isométries de la métrique riemannienne g est égal au groupe des isométries de la distance riemannienne d_g :

$$\mathrm{Isom}(M, g) = \mathrm{Isom}(M, d_g) \, .$$

Il découle de ceci que si (M, g) est une variété riemannienne compacte, alors par le théorème d'Ascoli, le groupe topologique $\mathrm{Isom}(M, g)$ est compact (pour la topologie compacte-ouverte).

Remarque. Si (M, g) est une variété riemannienne connexe et complète, alors nous montrerons dans le théorème de Hopf-Rinow 3.24 que l'application exponentielle en tout point de M est surjective. Ceci implique immédiatement que deux isométries ayant la même image en un point, et ayant même différentielle en ce point, sont égales (nous avions vu que ce résultat était en fait vrai sans l'hypothèse de complétude).

3.4.1 Calcul des distances et formules trigonométriques sphériques et hyperboliques

Soit $n \geq 2$. Le but de cette partie est de donner un formulaire pour les angles et les distances dans les espaces euclidien $\mathbb{E}^n$, hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ et sphérique $\mathbb{S}_n$ standards.

Lemme 3.17 *Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{n+1}$, si d est la distance riemannienne de $(\mathbb{S}_n, ds^2_{\mathrm{sph}})$, alors, pour tous les $x, y \in \mathbb{S}_n$, nous avons*

$$\cos d(x, y) = \langle x, y \rangle \, .$$

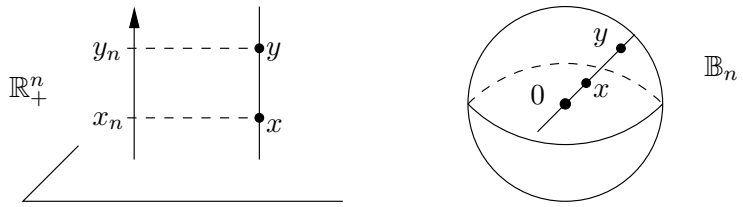
Démonstration. La longueur du plus court arc de grand cercle entre x et y est l'angle en 0 entre x et y. $\square$

Nous énonçons le résultat suivant maintenant, pour souligner sa similarité avec le lemme précédent, mais nous ne le démontrerons qu'après le lemme 3.22.

Lemme 3.18 *Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit lorentzien usuel de $\mathbb{R}^{1,n}$, si d est la distance riemannienne du modèle du demi-hyperboloïde supérieur $(\mathscr{H}^n_+, ds^2_{\mathrm{hyp}})$, alors, pour tous les $x, y \in \mathscr{H}^n_+$, nous avons*

$$\cosh d(x,y) = -\langle x, y\rangle \ .$$

Les deux résultats suivants calculant la distance hyperbolique dans les deux autres modèles sont laissés en exercice (voir l'exercice E.46). Leur utilité n'est pas très grande. Nous donnons par contre les cas particuliers qu'il est utile de retenir (ou de savoir retrouver). Nous notons $\|\ \|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$.



Sachant que les demi-droites verticales sont des géodésiques dans le modèle du demi-espace supérieur de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, la distance hyperbolique entre deux points x, y de $\mathbb{R}^n_+$, dont la dernière coordonnée est x_n, y_n, qui sont situés sur une même verticale, est la longueur hyperbolique du segment vertical qui les joint, c'est-à-dire

$$d(x,y) = \left|\log \frac{x_n}{y_n}\right| .$$

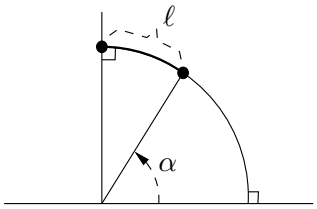
Sachant que les rayons de la boule $\mathbb{B}_n$ sont des géodésiques dans le modèle de la boule de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, la distance hyperbolique entre deux points x, y de $\mathbb{B}_n$ qui sont situés sur un même rayon est la longueur hyperbolique du segment de rayon qui les joint, c'est-à-dire

$$d(x,y) = \left|\log \frac{(1+\|x\|)(1-\|y\|)}{(1-\|x\|)(1+\|y\|)}\right| .$$

Le calcul suivant de distance hyperbolique dans le modèle du demi-plan supérieur $\mathbb{R}^2_+$ du plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ est souvent utile.

Lemme 3.19 *La distance hyperbolique ℓ dans $\mathbb{R}^2_+$ entre les extrémités d'un arc de cercle euclidien centré en un point de l'axe horizontal entre les angles $\alpha \in \,]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\frac{\pi}{2}$ vérifie*

$$\sinh \ell = \cot \alpha \ .$$



Démonstration. Utilisons la notation complexe. Puisque les translations horizontales $z \mapsto z + t$ où $t \in \mathbb{R}$ et les homothéties $z \mapsto \lambda z$ où $\lambda > 0$ sont des isométries de la variété riemannienne $\mathbb{R}^2_+$, nous pouvons supposer que cet arc de cercle est la courbe injective

$c : [\alpha, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2_+$ définie par $c(\theta) = e^{i\theta}$. Puisque la norme euclidienne du vecteur vitesse $\dot{c}(\theta) = ie^{i\theta}$ est 1, la longueur hyperbolique de cet arc est, en faisant le changement de variable $t = \tan\frac{\theta}{2}$ et puisque $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$,

$$\ell = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int_{\tan\frac{\alpha}{2}}^1 \frac{dt}{t} = -\ln\big(\tan\frac{\alpha}{2}\big)\ .$$

D'où $e^\ell = \cot\frac{\alpha}{2}$ et $\sinh\ell = \cot\alpha$. Puisque les arcs de cercles euclidiens perpendiculaires à l'axe horizontal sont géodésiques, nous en déduisons que la distance entre $c(\alpha)$ et $c(\frac{\pi}{2})$ est égale à ℓ. Le résultat en découle. □

Exercice E.46 *Montrer que la distance riemannienne d du modèle du demi-espace supérieur (de Lobatchevsky) $\mathbb{R}^n_+$ de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_\mathbb{R}$ vérifie, pour tous les $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ de dernière coordonnée x_n, y_n,*

$$\cosh d(x,y) = 1 + \frac{\|x-y\|}{x_n y_n}\ .$$

Montrer que la distance riemannienne d du modèle de la boule (de Poincaré) de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_\mathbb{R}$ vérifie, pour tous les $x, y \in \mathbb{B}^n$,

$$\sinh\frac{d(x,y)}{2} = \frac{\|x-y\|}{\sqrt{(1-\|x\|^2)(1-\|y\|^2)}}\ .$$

Passons maintenant aux formulaires de trigonométrie.

Proposition 3.20 *Soit Δ un triangle euclidien (dans $\mathbb{E}^2$) de sommets A, B, C, d'angles α, β, γ en ces sommets, de longueurs de côtés opposés a, b, c, d'aire S, de rayon du cercle inscrit r et du cercle circonscrit R, et de demi-périmètre $p = \frac{a+b+c}{2}$.*

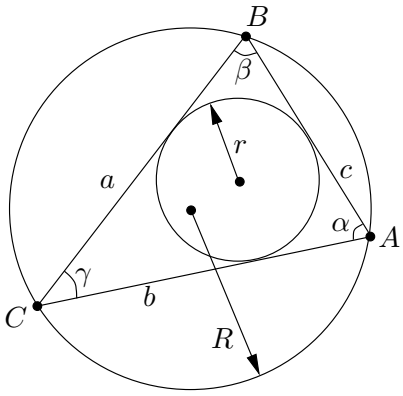
(i) **(Formule de Gauss-Bonnet)** $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

(ii) **(Loi du cosinus)** $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma$.

(iii) **(Loi du sinus)** $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

(iv) $S = p\,r = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin\alpha = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

(v) $R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}$.

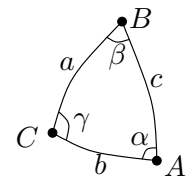


Le cas particulier de la formule de Gauss-Bonnet énoncé en (i) est en fait connu depuis au moins l'antiquité grecque !

Démonstration. Nous renvoyons par exemple à [Ber, (Vol. 2) 10.3] pour une démonstration de ces formules. □

Proposition 3.21

Soit Δ un triangle sphérique (dans $\mathbb{S}^2$) de sommets A, B, C, d'angles α, β, γ en ces sommets, et de longueurs de côtés opposés a, b, c, d'intérieur $\operatorname{int}\Delta$, de demi-périmètre $p = \frac{a+b+c}{2}$ strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Notons $\delta = \frac{1}{2}|\det(A, B, C)|$ le volume du tétraèdre euclidien de sommets $0, A, B, C$, où 0 est le centre de $\mathbb{B}_3$, et $d\,\mathrm{vol}_{\mathrm{sph}}$ l'élément d'aire sphérique.



(i) **(Formule de Gauss-Bonnet)** $\pi - \alpha - \beta - \gamma = -\int_{\operatorname{int}\Delta} d\,\mathrm{vol}_{\mathrm{sph}} \leq 0$. *De plus*

$$\tan\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{4} = \sqrt{\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p-a}{2}\tan\frac{p-b}{2}\tan\frac{p-c}{2}}\ .$$

(ii) **(Loi du cosinus I)** $\cos c = \cos a\ \cos b + \sin a\ \sin b\ \cos\gamma$.

(iii) **(Loi du cosinus II)** $\cos\alpha = -\cos\beta\ \cos\gamma + \sin\beta\ \sin\gamma\ \cos a$.

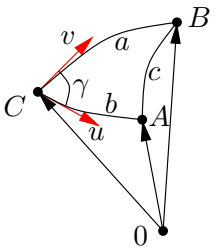
(iv) **(Loi du sinus)** $\dfrac{\sin a}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin\beta} = \dfrac{\sin c}{\sin\gamma}$.

(v)

$$\delta = \frac{1}{2}\sin b\ \sin c\ \sin\alpha = \sqrt{\sin p\ \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}\ .$$

Le cas particulier de la formule de Gauss-Bonnet ci-dessus est en fait dû à Girard (1625). La seconde loi du cosinus sphérique, qui n'a pas d'analogue en géométrie euclidienne, dit en particulier que les angles d'un triangle non aplati déterminent les longueurs de ses côtés.

Démonstration. (ii) Soient u et v les vecteurs (unitaires) vitesses en C des côtés de C à A et de C à B, respectivement. La géodésique d'origine $x \in \mathbb{S}_n$ et de vecteur vitesse $w \in T^1_x\mathbb{S}_n$ à l'instant $t = 0$ est



$$c : t \mapsto \cos t\ x + \sin t\ w\ ,$$

car cette courbe est paramétrée par longueur d'arc (c'est-à-dire $\|\dot{c}(t)\| = 1$) et son image est un arc de grand cercle. Donc par le lemme 3.17,

$$\begin{aligned}\cos c &= \langle A, B\rangle = \langle \cos b\ C + \sin b\ u, \cos a\ C + \sin a\ v\rangle \\ &= \cos a\cos b\ \langle C, C\rangle + \sin a\sin b\ \langle u, v\rangle = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma\ .\end{aligned}$$

Nous renvoyons par exemple à [Ber, (Vol. 5) 18.3.8.4, 18.6.13] pour une démonstration des autres formules. □

Avant de regarder les formules trigonométriques hyperboliques, donnons une expression explicite des géodésiques dans le modèle du demi-hyperboloïde supérieur $\mathscr{H}^n_+$ de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$.

Lemme 3.22 *Pour tout $x \in \mathscr{H}^n_+$, pour tout $v \in T^1_x\mathscr{H}^n_+$, la courbe $c : \mathbb{R} \to \mathscr{H}^n_+$ définie par*

$$c : t \mapsto \cosh t\ x + \sinh t\ v$$

est l'unique géodésique hyperbolique définie sur $\mathbb{R}$ telle que $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathscr{H}_+^n$, nous avons vu que $T_x\mathscr{H}_+^n$ est l'orthogonal $x^\perp$ de la droite vectorielle passant par x pour la forme lorentzienne standard $g^{1,n}$. Par définition, le produit scalaire sur $T_x\mathscr{H}_+^n$ défini par la métrique hyperbolique est la restriction de $g^{1,n}$ sur $T_x\mathscr{H}_+^n = x^\perp$. Nous avons vu que les géodésiques du modèle du demi-hyperboloïde passant par x sont les intersections des plans vectoriels contenant x avec $\mathscr{H}_+^n$, paramétrées à vitesse constante. Notons $\|w\|_{\text{hyp}} = g^{1,n}(w,w)$ la norme d'un vecteur tangent w à $\mathscr{H}_+^n$ pour la métrique hyperbolique.

La courbe c définie dans l'énoncé du lemme a pour image l'intersection du plan vectoriel $\text{Vect}(x,v)$ avec $\mathscr{H}_+^n$, car $g^{1,n}(c(t),c(t)) = -\cosh^2 t + \sinh^2 t\ \|v\|_{\text{hyp}}^2 = -1$. La norme hyperbolique de son vecteur vitesse $\dot{c}(t) = \sinh t\ x + \cosh t\ v$ est égale à 1, car

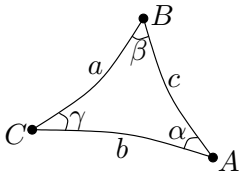
$$\|\dot{c}(t)\|_{\text{hyp}}^2 = g^{1,n}(\dot{c}(t),\dot{c}(t)) = -\sinh^2 t + \cosh^2 t\ \|v\|_{\text{hyp}}^2 = 1\ .$$

Donc c est l'unique géodésique hyperbolique telle que $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$. □

Démonstration du lemme 3.18. Avec les notations du lemme précédent, nous avons $g^{1,n}(c(t),x) = (\cosh t)\, g^{1,n}(x,x) = -\cosh t$, ce qui implique le résultat cherché. □

Proposition 3.23

Soit Δ un triangle hyperbolique (dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$) de sommets A, B, C, d'angles α, β, γ en ces sommets, de longueurs de côtés opposés a, b, c, et d'intérieur $\text{int}\,\Delta$. *Notons* $d\,\text{vol}_{\text{hyp}}$ *l'élément d'aire hyperbolique.*



(i) **(Formule de Gauss-Bonnet)** $\pi - \alpha - \beta - \gamma = \int_{\text{int}\,\Delta} d\,\text{vol}_{\text{hyp}} \geq 0$.

(ii) **(Loi du cosinus I)** $\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\gamma$.

(iii) **(Loi du cosinus II)** $\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cosh c$.

(iv) **(Loi du sinus)** $\dfrac{\sinh a}{\sin\alpha} = \dfrac{\sinh b}{\sin\beta} = \dfrac{\sinh c}{\sin\gamma}$.

(v) Si l'angle en C est droit (c'est-à-dire si $\gamma = \frac{\pi}{2}$), alors

$$\sin\alpha = \frac{\sinh a}{\sinh c}\ ,\quad \cos\alpha = \frac{\tanh b}{\tanh c}\ ,\quad \cosh c = \cosh a \cosh b\ ,\quad \cos\alpha = \cosh a \sin\beta\ .$$

La seconde loi du cosinus hyperbolique, qui n'a pas d'analogue en géométrie euclidienne, dit en particulier que les angles d'un triangle non aplati déterminent les longueurs de ses côtés.

Démonstration. La démonstration de (ii) est complètement analogue à celle pour la sphère, en utilisant les lemmes 3.18 et 3.22. Nous renvoyons par exemple à [Bea] et [Bus, §2.2] pour une démonstration des autres formules. □

3.5 Complétude

Soit (M, g) une variété riemannienne.

Nous dirons que (M, g) est *géodésiquement complète* si toute géodésique de M (définie sur un intervalle) peut se prolonger en une géodésique définie sur $\mathbb{R}$. Par exemple, dans la variété riemannienne $\mathbb{E}^n$, l'espace épointé $\mathbb{R}^n - \{0\}$ et le demi-espace supérieur $\mathbb{R}^n_+$, munies des métriques riemanniennes induites par la métrique euclidienne standard de $\mathbb{E}^n$, ne sont pas géodésiquement complets.

Théorème 3.24 (Théorème de Hopf-Rinow) *Si M est connexe, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) le champ de vecteurs géodésique Z^g sur TM est complet ;

(2) la connexion de Levi-Civita ∇^g de (M, g) est complète ;

(3) la variété riemannienne (M, g) est géodésiquement complète ;

(4) pour tout $x \in M$, l'application exponentielle $\exp_x$ est définie sur tout T_xM ;

(5) il existe $x \in M$ tel que l'application exponentielle $\exp_x$ soit définie sur tout T_xM ;

(6) la distance riemannienne d_g de (M, g) est propre *(c'est-à-dire que tout fermé borné de (M, d_g) est compact) ;*

(7) la distance riemannienne d_g de (M, g) est complète.

Si l'une de ces conditions est satisfaite, alors deux points quelconques de M peuvent être joints par au moins une géodésique minimisante.

Par contre, il n'y a pas toujours unicité d'une géodésique minimisante entre deux points. Par exemple, tous les demi-arcs de grands cercles entre deux points antipodaux de la sphère standard $(\mathbb{S}_n, ds^2_{\text{sph}})$ sont des géodésiques minimisantes. Par contre, pour tous les x, y dans $\mathbb{S}_n$, si $d(x, y) < \pi$ alors il existe une et une seule géodésique minimisante entre x et y.

Démonstration. L'équivalence des assertions (2) et (4) vient des définitions de la notion de complétude d'une connexion et de la définition des applications exponentielles en chaque point.

L'équivalence entre (1) et (3) vient du fait que la complétude du champ de vecteurs géodésique Z^g signifie que le flot géodésique est défini pour tous les temps, et que les géodésiques de g sont les projections par $TM \to M$ des orbites du flot géodésique.

Il est immédiat que (3) implique (4) implique (5).

Montrons que l'assertion (5) implique que tout point y de M peut être joint à x par au moins une géodésique minimisante. Ceci montrera que l'assertion (4) implique la dernière assertion du théorème.

Nous pouvons supposer que $y \neq x$. L'idée est de partir de x et d'essayer de viser correctement pour que la géodésique de direction initiale choisie passe par y et reste minimisante jusqu'à rencontrer y.

Pour $\epsilon > 0$ assez petit, puisque la sphère $S = \exp_x S(0, \epsilon)$ est compacte, il existe un point $p_\epsilon \in S$ tel que $d(y, p_\epsilon) = d(y, S)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, tout chemin continu de x à y rencontre S, et tout chemin de x à S est de longueur au moins ϵ (par le lemme de Gauss). Donc $d(x, y) \geq \epsilon + d(S, y) = d(x, p_\epsilon) + d(p_\epsilon, y) \geq d(x, y)$. D'où

$$d(x, y) = \epsilon + d(p_\epsilon, y) \ .$$

Notons c la géodésique (paramétrée à vitesse 1) de (M, g) partant de x à l'instant $t = 0$ et passant par p_ϵ à l'instant $t = \epsilon$, qui est définie sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Notons $I = \{t \in [0, d(x, y)] \ : \ d(y, c(t)) + t = d(x, y)\}$. L'ensemble I est non vide (il contient $[0, \epsilon]$), clairement fermé, et ouvert par l'argument précédent, donc égal à $[0, d(x, y)]$. La géodésique c passe donc par y, et elle est minimisante entre x et y car de longueur égale à $d(x, y)$. Ceci montre le résutat cherché.

Montrons que (5) implique (6). En effet, par ce qui précède, tout borné de M est contenu dans l'image par $\exp_x$ d'une boule fermée $\overline{B}(0, R)$ où $R > 0$ est assez grand, et

$\exp_x \overline{B}(0,R)$ est compact, car $\exp_x$ est continue. Comme tout fermé dans un compact est compact, l'assertion (6) en découle.

Puisque toute suite de Cauchy est bornée, l'assertion (6) implique l'assertion (7).

Enfin, montrons que (7) implique (3), ce qui conclut. Nous savons déjà que le domaine maximal de définition d'une géodésique $c : I \to M$ est ouvert, montrons qu'il est fermé dans $\mathbb{R}$, ce qui conclut par connexité. Nous pouvons supposer que la géodésique c est paramétrée à vitesse 1. Si b est une extrémité finie de I, soit $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans I qui converge vers b. Comme $d(c(t_i), c(t_j)) = |t_i - t_j|$, la suite $c(t_i)$ est de Cauchy pour la distance riemannienne, donc converge par l'assertion (7) vers un point que nous appelons $c(b)$. En considérant une carte exponentielle en $c(b)$, on peut donc prolonger c sur $]b-\epsilon, b+\epsilon[$ pour ϵ assez petit, et donc l'assertion (3) en découle. $\square$

Exemples. (1) Par l'assertion (6), si une variété riemannienne M est compacte, alors sa connexion de Levi-Civita est complète. Ceci n'est plus vrai si M est une variété pseudo-riemannienne. En particulier $(\mathbb{S}_n, ds^2_{\mathrm{sph}})$ est complète.

(2) Les variétés pseudo-riemanniennes $\mathbb{R}^{p,q}$ (et en particulier la variété riemannienne $\mathbb{E}^n$) et $\mathbb{S}_{n,p}$ et $\mathbb{H}_{n,p}$ (et en particulier la variété riemannienne $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$) sont complètes.

Proposition 3.25 *Soient M et N des variétés riemanniennes connexes et $f : M \to N$ une application.*

(1) Si f est une isométrie locale et si M est complète, alors f est un revêtement riemannien, et N est complète.

(2) Si N est complète et si f est un revêtement riemannien, alors M est complète.

Démonstration. Rappelons qu'une application g entre deux espaces métriques X et Y est une *isométrie locale* si pour tout $x \in X$, il existe des voisinages ouverts U de x et V de $g(x)$ tels que $g : U \to V$ soit une isométrie pour les distances induites.

(1) Tout d'abord, f est continue et surjective, car son image est ouverte et géodésiquement complète (car l'image par f d'une géodésique est une géodésique), donc complète, donc fermée, et N est connexe.

Pour tout $y \in N$, soit $\epsilon > 0$ assez petit pour que $\exp_y$ soit un C^∞-difféomorphisme de $B(0, 2\epsilon)$ sur son image. Pour tout $x \in f^{-1}(y)$, notons $U_x = \exp_x(B(0,\epsilon))$ la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ (pour la distance riemannienne de M, qui est complète). Les ouverts U_x et $U_{x'}$ sont disjoints si $x \neq x'$, car sinon $d(x, x') < 2\epsilon$ par l'inégalité triangulaire, et donc l'image par f d'une géodésique minimisante de x à x' serait une géodésique de y à y contenue dans $\exp_y(B(0, 2\epsilon))$, ce qui n'est pas possible. Le même argument montre que la restriction de f à chaque U_x est injective.

Puisque la distance riemannienne est une distance de longueur, l'application f, qui préserve la longueur des courbes, est 1-lipschitzienne. Donc $f(U_x) \subset \exp_y(B(0,\epsilon))$.

Réciproquement, $f^{-1}(\exp_y(B(0,\epsilon)))$ est contenu dans $\bigcup_{x\in f^{-1}(y)} U_x$, car pour tout $z \in f^{-1}(\exp_y(B(0,\epsilon)))$, si v est le vecteur tangent unitaire en z tel que $T_z f(v)$ soit le vecteur tangent à l'origine du segment géodésique minimisant d'origine $f(z)$ et d'extrémité y, alors la géodésique (définie sur $\mathbb{R}$) de vecteur vitesse à l'origine v passe par un point de $f^{-1}(y)$ au temps $d(f(z), y)$. Ceci montre que f est un revêtement.

En utilisant des cartes exponentielles, il est immédiat que f est C^∞ et préserve les métriques riemanniennes. Toute géodésique de N se relève en une géodésique de M, qui

est prolongeable sur $\mathbb{R}$, donc est prolongeable sur $\mathbb{R}$, puisque f est une isométrie locale. Donc N est complète.

(2) Par le théorème de relèvement des chemins et la localité des géodésiques, tout relèvement d'une géodésique de N est une géodésique de M, qui est définie pour tous les temps. $\square$

Exercice E.47 *Montrer que toute variété riemannienne connexe homogène, et en particulier tout groupe de Lie réel connexe muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche, est complète.*

3.6 Courbure

3.6.1 Les avatars de la courbure

Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne, ∇ sa connexion de Levi-Civita et $R = R^\nabla$ son tenseur de courbure (voir la partie 2.3.6). Nous le noterons aussi $R = R^g = R^M$, lorsque nous voulons préciser la métrique pseudo-riemannienne g ou la variété M (munie de g). Il vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 3.26 *Le tenseur de courbure R de (M, g) est un tenseur $(3, 1)$ sur M, c'est-à-dire un élément de $\Gamma((T^*M)^{\otimes 3} \otimes TM) = \Gamma((T^*M)^{\otimes 2} \otimes \mathrm{End}(TM))$. Il vérifie les propriétés suivantes.*

(i) Le tenseur R est antisymétrique en les deux premières variables (donc R est une 2-forme différentielle à valeurs dans $\mathrm{End}(TM)$) : pour tous les $v, w \in T_xM$, les endomorphismes $R_x(v, w)$ et $-R_x(w, v)$ de T_xM sont égaux, ou encore, pour tous les $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z \ .$$

(ii) **(Identité de Bianchi différentielle)** *En notant encore ∇ la connexion définie par ∇ sur le fibré vectoriel $(T^*M)^{\otimes 3} \otimes TM = (T^*M)^{\otimes 2} \otimes \mathrm{End}(TM)$, nous avons, pour tous les $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,*

$$\nabla_X R(Y, Z) + \nabla_Y R(Z, X) + \nabla_Z R(X, Y) = 0 \ .$$

(iii) **(Identité de Bianchi algébrique)** *Pour tous les $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, nous avons*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \ .$$

(iv) Pour tous les champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TM)$, le champ d'endomorphismes $R(X, Y) \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ est antisymétrique pour g, c'est-à-dire que pour tous les $v, w \in T_xM$, l'endomorphisme $R_x(v, w)$ de T_xM est antisymétrique pour la forme bilinéaire g_x, ou encore que pour tous les $W, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

$$g(R(X, Y)Z, W) = -g(Z, R(X, Y)W) \ .$$

(v) Pour tous les $W, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

$$g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y) \ .$$

Remarques. (1) La métrique g permet (par le lemme de tensorialité) de définir un tenseur $(4,0)$ sur M, encore noté $R \in \Gamma((T^*M)^{\otimes 4})$, tel que pour tous les $W, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W) \ .$$

Ce tenseur $(4,0)$ est antisymétrique en les deux premières variables et en les deux dernières, par les assertions (i) et (iv), et symétrique par permutation des deux premières variables avec les deux dernières par l'assertion (v) :

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= -R(Y,X,Z,W) = -R(X,Y,W,Z) \\ &= R(Z,W,X,Y) = R(W,Z,Y,X) \end{aligned} \tag{$\cdot 44 \cdot$}$$

(la dernière égalité découlant des assertions (i) et (iv)).

(2) Notons encore $g \in \Gamma((\Lambda^2 TM)^* \otimes (\Lambda^2 TM)^*) \subset \Gamma((T^*M)^{\otimes 2} \otimes (T^*M)^{\otimes 2})$ la section $x \mapsto \Lambda^2 g_x$ des formes bilinéaires symétriques sur le fibré $\Lambda^2 TM$ des bivecteurs tangents, définie par la section $g : x \mapsto g_x$ dans $\Gamma(T^*M \otimes T^*M)$.[14] Le fait que g soit non dégénérée en tout point (et le lemme de tensorialité) permet de définir un tenseur $(2,2)$, encore noté $R \in \Gamma((T^*M)^{\otimes 2} \otimes (TM)^{\otimes 2}) = \Gamma(\mathrm{End}((TM)^{\otimes 2}))$, qui est en fait un élément de $\Gamma(\mathrm{End}(\Lambda^2 TM))$ par les assertions (i) et (iv), tel que pour tous les $W, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$,

$$g(R(X \wedge Y), Z \wedge W) = g(R(X,Y)Z,W) \ .$$

L'assertion (v) dit alors que R est un endomorphisme symétrique de $\Lambda^2 TM$ pour g.

Démonstration. Le fait que R soit un tenseur $(3,1)$ et l'assertion (i) découlent des propriétés générales des courbures (voir la définition de R^∇ dans la partie 2.3.6).

Montrons (ii). Pour tous les $W, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, par la formule ($\cdot 22 \cdot$) dans la partie 2.3.2, nous avons

$$\begin{aligned} &(\nabla_W R)(X,Y)Z \\ &= \nabla_W(R(X,Y)Z) - R(\nabla_W X, Y)Z - R(X, \nabla_W Y)Z - R(X,Y)(\nabla_W Z) \ . \end{aligned} \tag{$\cdot 46 \cdot$}$$

14. Voici quelques rappels sur les produits tensoriels de formes bilinéaires. Soient E, F, E', F' des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps commutatif K. Soient $f : E \times F \to K$ et $f' : E' \times F' \to K$ des formes bilinéaires. Il existe une unique forme bilinéaire $f \otimes f' : (E \otimes E') \times (F \otimes F') \to K$ (notée par abus encore f si $f = f'$) telle que pour tous les $x \in E$, $x' \in E'$, $y \in F$, $y' \in F'$

$$f \otimes f' \, (x \otimes x', y \otimes y') = f(x,y) \, f'(x',y') \ .$$

Si $E = F$ et $E' = F'$, si f et f' sont symétriques, alors $f \otimes f'$ l'est aussi. Si f et f' sont non dégénérées, alors $f \otimes f'$ l'est aussi. En effet, rappelons que toute forme bilinéaire $f : E \times F \to K$ induit une application bilinéaire $\widehat{f} : E \to F^*$ définie par $x \mapsto \{y \mapsto f(x,y)\}$, qui est un isomorphisme linéaire si et seulement si f est non dégénérée. Notons que l'application $\widehat{f \otimes f'} = \widehat{f} \otimes \widehat{f'} : E \otimes E' \to (F \otimes F')^* = F^* \otimes (F')^*$ est l'unique application linéaire qui envoie $x \otimes x'$ sur $\widehat{f}(x) \otimes \widehat{f'}(x')$ pour tous les $x \in E$ et $x' \in E'$. Le résultat découle du fait que $\widehat{f \otimes f'}$ est un isomorphisme linéaire si $\widehat{f}$ et $\widehat{f'}$ le sont.

Rappelons que l'espace vectoriel $E \wedge E$ des bivecteurs de E est un sous-espace vectoriel de $E \otimes E$, et que pour tous les $v, w \in E$, nous avons, par la formule ($\cdot 14 \cdot$) définissant le produit extérieur,

$$v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v \ .$$

Ainsi, si g est une forme bilinéaire sur E, en notant encore g la forme bilinéaire $g \otimes g$ sur $E \otimes E$, et encore g ou $\Lambda^2 g$ sa restriction à $E \wedge E$, nous avons, pour tous les $v, w, v', w' \in E$,

$$g(v \wedge w, v' \wedge w') = g(v \otimes w - w \otimes v, v' \otimes w' - w' \otimes v') = 2\big(g(v,v')\, g(w,w') - g(v,w')\, g(w,v')\big) \ . \tag{$\cdot 45 \cdot$}$$

Si g est symétrique non dégénérée sur E, alors g est symétrique non dégénérée sur $E \wedge E$.

Notons $\overline{\nabla}$ la connexion sur $\mathrm{End}(TM) = T^*M \otimes TM$ associée à la connexion de Levi-Civita ∇ sur TM, et $d^{\overline{\nabla}}$ la différentielle extérieure associée à $\overline{\nabla}$. Justifions la suite d'égalités suivantes. Par la proposition 2.41 (2) pour la première égalité ; par la définition de la différentielle extérieure $d^{\overline{\nabla}}R$ de la 2-forme différentielle R à valeurs dans $\mathrm{End}(TM)$ pour la deuxième égalité ; par l'exercice E.33 (juste avant le lemme 2.35) appliqué trois fois pour la troisième égalité ; puisque ∇ est sans torsion pour la quatrième égalité ; par l'équation ($\cdot$ 46 $\cdot$) et l'assertion (i) d'antisymétrie pour la cinquième égalité ; par l'assertion (i) d'antisymétrie pour la dernière égalité : nous avons, pour tous les $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned}
0 &= \big(d^{\overline{\nabla}}R\,(X,Y,Z)\big)W \\
&= \overline{\nabla}_X(R(Y,Z))W - \overline{\nabla}_Y(R(X,Z))W + \overline{\nabla}_Z(R(X,Y))W \\
&\quad - R([X,Y],Z)W + R([X,Z],Y)W - R([Y,Z],X)W \\
&= \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(Y,Z)(\nabla_X W) - \nabla_Y(R(X,Z)W) + R(X,Z)(\nabla_Y W) + \nabla_Z(R(X,Y)W) \\
&\quad - R(X,Y)(\nabla_Z W) - R([X,Y],Z)W + R([X,Z],Y)W - R([Y,Z],X)W \\
&= \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(Y,Z)(\nabla_X W) - \nabla_Y(R(X,Z)W) + R(X,Z)(\nabla_Y W) \\
&\quad + \nabla_Z(R(X,Y)W) - R(X,Y)(\nabla_Z W) - R(\nabla_X Y,Z)W + R(\nabla_Y X,Z)W \\
&\quad + R(\nabla_X Z,Y)W - R(\nabla_Z X,Y)W - R(\nabla_Y Z,X)W + R(\nabla_Z Y,X)W \\
&= (\nabla_X R)(Y,Z)W - (\nabla_Y R)(X,Z)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W \\
&= (\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W\ ,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Montrons l'identité de Bianchi algébrique (iii) (aussi appelée *première identité de Bianchi*). En utilisant six fois le fait que ∇ est sans torsion, nous avons

$$\begin{aligned}
&R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X \\
&\quad + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_X[Y,Z] - \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Y[Z,X] - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= [Z,[X,Y]] + [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]]\ .
\end{aligned}$$

Le résultat découle alors de l'identité de Jacobi des champs de vecteurs. [Une manière de simplifier les calculs est la suivante. Le problème étant local, nous pouvons supposer que M est le domaine d'une carte (U,φ). Soient $X, Y, Z \in \Gamma(TU)$. Puisque R est $\mathrm{C}^\infty(U)$-trilinéaire et que le $\mathrm{C}^\infty(U)$-module $\Gamma(TU)$ admet une base formée de champs de vecteurs qui commutent, nous pouvons supposer que $[X,Y] = [Y,Z] = [X,Z] = 0$. Ainsi de nombreux termes s'annulent dans le calcul précédent.]

Montrons (iv). Puisque g est parallèle, nous avons les deux formules suivantes :

$$X(Y(g(Z,W))) = g(\nabla_X\nabla_Y Z, W) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) + g(Z, \nabla_X\nabla_Y W)\ ,$$

et

$$[X,Y](g(Z,W)) = g(\nabla_{[X,Y]}Z, W) + g(Z, \nabla_{[X,Y]}W)\ .$$

Puisque $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, l'assertion (iv) en découle en enlevant à la première formule d'une part la première formule où X et Y ont été échangés, et d'autre part la seconde formule.

La démonstration de la dernière formule (v) est astucieuse, nous donnons ci-dessous celle de [Mil] (sans son joli dessin, qui permet pourtant de visualiser les calculs ci-dessous). Pour tous les $W, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, posons

$$I(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(Y,Z)X, W\rangle + \langle R(Z,X)Y, W\rangle$$

qui est nul par l'assertion (iii). Remarquons que par les assertions (i) et (iv), nous avons

$$I(Y,W,Z,X) = \langle R(Y,W)Z, X\rangle + \langle R(Z,W)X, Y\rangle + \langle R(Y,Z)X, W\rangle \ ,$$

$$I(X,W,Y,Z) = \langle R(X,W)Y, Z\rangle + \langle R(Y,W)Z, X\rangle + \langle R(X,Y)Z, W\rangle \ ,$$

et

$$I(Z,W,X,Y) = \langle R(Z,W)X, Y\rangle + \langle R(X,W)Y, Z\rangle + \langle R(Z,X)Y, W\rangle \ .$$

Le résultat découle alors du fait que

$$\begin{aligned}&2\langle R(X,Y)Z, W\rangle - 2\langle R(Z,W)X, Y\rangle \\ &= I(X,Y,Z,W) - I(Y,W,Z,X) + I(X,W,Y,Z) - I(Z,W,X,Y) = 0 \ . \quad \square\end{aligned}$$

Le tenseur de courbure permet de construire divers objets, l'opérateur de courbure, la courbure sectionnelle, la courbure de Ricci et la courbure scalaire, que nous définissons maintenant.

Pour tous les $x \in M$ et $v \in T_xM$, nous appellerons *opérateur de courbure* en v l'endomorphisme linéaire R_v de T_xM défini par

$$R_v : w \mapsto R(w,v)v \ .$$

Remarquons que puisque $R(X,Y,Y,Z) = R(Z,Y,Y,X)$, l'opérateur R_v est symétrique pour la forme bilinéaire g_x : pour tous les $w, z \in T_xM$, nous avons

$$g_x(R_v(w), z) = g_x(w, R_v(z)) \ .$$

Si M est de dimension au moins 2, notons $\mathscr{G}_2(TM)$ la fibration grassmanienne des 2-plans du fibré tangent de M, et $\mathscr{G}_2^g(TM)$ son ouvert constitué des 2-plans non isotropes pour g (c'est-à-dire en restriction auxquels g est non dégénérée), qui est égal à $\mathscr{G}_2(TM)$ si g est riemannienne.

Si M est de dimension au moins 2, la *courbure sectionnelle* de (M,g) est l'application lisse $K = K^g : \mathscr{G}_2^g(TM) \to \mathbb{R}$ qui au 2-plan tangent non isotrope P associe

$$K(P) = \frac{g(R(v,w)w, v)}{g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2} \ ,$$

où (v,w) est une base du 2-plan tangent P. En notant encore g la forme bilinéaire symétrique définie par g sur $\Lambda^2 TM$, nous avons, par la formule (·45·),

$$K(P) = 2\,\frac{g(R(v\wedge w), v\wedge w)}{g(v\wedge w, v\wedge w)} \ .$$

Donc cette définition ne dépend pas du choix d'une telle base, et K est lisse, car l'application de $\Lambda^2 TM$ privé de la section nulle, à valeurs dans $\mathscr{G}_2(TM)$, définie par $v\wedge w \mapsto \mathrm{Vect}(v,w)$ est lisse.

Lorsque g est riemannienne, si v et w sont orthogonaux, alors

$$K(P) = \frac{\langle R(v,w)w, v\rangle}{\|v\|^2\|w\|^2} \ .$$

En particulier, si (v,w) est une base orthonormée de P, alors

$$K(P) = \langle R(v,w)w, v\rangle = R(v,w,w,v) \ .$$

Nous dirons qu'une variété pseudo-riemannienne de dimension au moins 2 est *à courbure sectionnelle pincée* s'il existe des constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $a \leq K \leq b$ (au sens des applications, c'est-à-dire que $a \leq K(P) \leq b$ pour tout $P \in \mathscr{G}_2^g(TM)$), et *à courbure sectionnelle (strictement) négative pincée* s'il existe des constantes $a, b > 0$ telles que $-a^2 \leq K \leq -b^2$.

Avec cette définition directement à partir de la connexion de Levi-Civita, il existe très peu de variétés pseudo-riemanniennes dont on peut calculer directement le tenseur de courbure. Voici juste un exemple.

Proposition 3.27 *Soit G un groupe de Lie muni d'une métrique pseudo-riemannienne bi-invariante g. Pour tous les champs de vecteurs $W, X, Y, Z \in \Gamma(TG)$ invariants à gauche, nous avons*

$$R(X,Y,Z,W) = -\frac{1}{4}g([X,Y],[Z,W]) \ .$$

En particulier, si g est riemannienne, la courbure sectionnelle de G est positive ou nulle.

Démonstration. Par l'exercice E.43 (4), nous avons $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$. Donc, par la définition du tenseur de courbure et l'identité de Jacobi du crochet de Lie,

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z] \ .$$

Avec exp l'exponentielle du groupe de Lie G, nous avons par bi-invariance,

$$g_e\Big(\mathrm{Ad}(\exp(tZ(e)))\big(X(e)\big), \mathrm{Ad}(\exp(tZ(e)))\big(X(e)\big)\Big) = g_e(X(e), Y(e)) \ .$$

Donc en dérivant en $t = 0$, nous avons, au point e donc en tout point par invariance,

$$g([Z,X],Y) + g(X,[Z,Y]) = 0$$

(c'est-à-dire que l'endomorphisme $\mathrm{ad}(Z(e))$ de $\mathfrak{g}$ est antisymétrique pour la forme bilinéaire g_e). Donc, puisque $[W,Z] = -[Z,W]$,

$$R(X,Y,Z,W) = -\frac{1}{4}g([[X,Y],Z],W) = -\frac{1}{4}g([X,Y],[Z,W]) \ .$$

En particulier, si g est riemannienne, alors

$$R(X,Y,Y,X) = -\frac{1}{4}g([X,Y],[Y,X]) = \frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2 \geq 0 \ . \ \square$$

Remarques. (1) Si $n \geq 2$, l'espace euclidien standard $\mathbb{E}^n$ et l'espace pseudo-euclidien standard $\mathbb{R}^{p,q}$ où $n = p+q$, dont les tenseurs de courbure sont nuls (car leur connexion de

Levi-Civita est triviale, voir l'exemple (1) de la partie 2.3.6), sont à courbure sectionnelle nulle.

(2) La courbure sectionnelle détermine le tenseur de courbure.

En effet, soit S un tenseur $(4,0)$ sur M, vérifiant les mêmes propriétés de symétries que le tenseur de courbure $(4,0)$ (c'est-à-dire S est antisymétrique en les deux premières et les deux dernières variables, invariant par l'échange des deux premières et des deux dernières variables, et vérifie l'identité de Bianchi algébrique sur les trois premières variables, autrement dit $S(X,Y,Z,W) = -S(Y,X,Z,W) = -S(X,Y,W,Z) = S(Z,W,X,Y)$ et $S(X,Y,Z,W) + S(Y,Z,X,W) + S(Z,X,Y,W) = 0$ pour tous les $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$). Un petit calcul montre que pour tous les $x \in M$ et $u,v,w,z \in T_xM$, nous avons

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}_{|s=t=0} S(u+sw, v+tz, v+tz, u+sw) - S(u+sz, v+tw, v+tw, u+sz)\\ &= -\,6\, S(u,v,w,z)\ . \end{aligned} \tag{$\cdot 47 \cdot$}$$

En particulier, si la courbure sectionnelle K est nulle, alors le tenseur de courbure R est nul.

Proposition 3.28 *Si la courbure sectionnelle de (M,g) est constante égale à κ, alors, pour tous les $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$, nous avons*

$$R(X,Y)Z = \kappa\,\big(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\big)\ .$$

Démonstration. Par le lemme de tensorialité, l'application $\mathrm{C}^\infty(M;\mathbb{R})$-trilinéaire

$$(X,Y,Z) \mapsto a(X,Y,Z) = \kappa\big(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\big)$$

de $\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)$ dans $\Gamma(TM)$ définit un tenseur $(3,1)$ sur M. Il est facile de vérifier que l'application

$$(X,Y,Z,W) \mapsto g(a(X,Y,Z),W) = \kappa\big(g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\big)$$

vérifie les mêmes propriétés de symétrie que le tenseur de courbure $(4,0)$. Puisqu'un tel tenseur est déterminé par sa courbure sectionnelle, et puisque si deux vecteurs tangents u et v en un même point forment une base d'un 2-plan non isotrope, alors

$$\frac{g(a(u,v,v),u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2} = \kappa\,\frac{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)g(v,u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2} = \kappa\ ,$$

le résultat en découle. □

La *courbure de Ricci* de (M,g) est le $(2,0)$-tenseur $\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric}^g \in \Gamma((T^*M)^{\otimes 2})$ défini en demandant que, pour tous les $x \in M$ et $v,w \in T_xM$, le nombre réel $\mathrm{Ric}_x(v,w)$ soit la trace de l'endomorphisme $z \mapsto R(z,v)w$ de T_xM. C'est une contraction du tenseur de courbure (la seule vraiment intéressante, par les propriétés de symétries de R) : pour tous les $X,Y \in \Gamma(TM)$,

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}\{Z \mapsto R(Z,X)Y\} \in \mathrm{C}^\infty(M)\ .$$

Notons que Ric est symétrique, donc appartient à $\Gamma(S^2T^*M)$: pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X) \ .$$

En effet, si g est riemannienne (voir les calculs en coordonnées locales ci-dessous pour le cas général), si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de T_xM, alors pour tous les $v, w \in T_xM$, par les propriétés de symétries ($\cdot$ 44 $\cdot$), nous avons

$$R_x(v,w) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i,v)w,e_i) = \sum_{i=1}^n R(e_i,v,w,e_i) = \sum_{i=1}^n R(e_i,w,v,e_i) = R_x(w,v) \ .$$

Une variété pseudo-riemannienne (M,g) est *d'Einstein* (on dit aussi, par abus, *de courbure de Ricci constante*) s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelée la *constante d'Einstein*) tel que $\mathrm{Ric} = \lambda g$, c'est-à-dire tel que, pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous ayons

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \lambda \ g(X,Y) \ .$$

Toute variété pseudo-riemannienne à courbure sectionnelle constante égale à κ est d'Einstein, de constante d'Einstein $\lambda = (n-1)\kappa$:

$$\mathrm{Ric} = (n-1)\kappa \ g \ . \qquad (\cdot\, 48 \,\cdot)$$

En effet, si g est riemannienne (voir les calculs en coordonnées locales ci-dessous pour le cas général), pour tout vecteur unitaire $v \in T_xM$, si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de T_xM telle que $e_1 = v$, alors, puisque R est alterné en les deux premières variables, et par définition de la courbure sectionnelle,

$$\mathrm{Ric}_x(v,v) = \sum_{i=1}^n R(e_i,v,v,e_i) = \sum_{i=2}^n R(e_i,v,v,e_i) = (n-1)\kappa \ .$$

Les formes bilinéaires symétriques Ric_x et $(n-1)\kappa \ g_x$ sur T_xM, qui coïncident sur la diagonale, sont donc égales.

Il n'est pas difficile de voir que les variétés d'Einstein de dimension au plus 3 sont exactement les variétés pseudo-riemanniennes à courbure sectionnelle constante (voir les calculs en coordonnées locales ci-dessous). Nous renvoyons pour plus d'information sur les variétés d'Einstein à l'excellent livre [Bess].

La métrique pseudo-riemannienne g (qui est non dégénérée) permet de définir (en utilisant le lemme de tensorialité) un unique tenseur $(1,1)$, encore noté $\mathrm{Ric} \in \Gamma(T^*M \otimes TM) = \Gamma(\mathrm{End}(TM))$, tel que pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous ayons

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = g(\mathrm{Ric}(X),Y) \ .$$

Par la construction et la symétrie du $(2,0)$-tenseur Ric, la section Ric du fibré des endomorphismes de TM est symétrique pour la métrique g : pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$g(\mathrm{Ric}(X),Y) = g(X,\mathrm{Ric}(Y)) \ .$$

En particulier, lorsque g est riemannienne, les valeurs propres en tout point de M du $(1,1)$-tenseur Ric sont réelles.

Le dernier invariant de courbure que nous introduirons est le suivant.

La *courbure scalaire* de (M, g) est l'application lisse $\mathrm{Scal} = \mathrm{Scal}_g$ de M dans $\mathbb{R}$, qui en tout point x de M associe la trace de l'endomorphisme $\mathrm{Ric} : v \mapsto \mathrm{Ric}(v)$ de $T_x M$:

$$\mathrm{Scal} = \mathrm{tr}\,\mathrm{Ric} \ .$$

• **Calcul en coordonnées locales.**

Soient $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ une carte locale de M, et $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ la base correspondante du $\mathrm{C}^\infty(U)$-module $\Gamma(TU)$ (appelée un *repère mobile* sur U). Notons $(g_{i,\,j} = g(\partial_i, \partial_j))_{1 \leq i,\, j \leq n}$ la matrice de g dans ce repère mobile, $(g^{i,\,j})_{1 \leq i,\, j \leq n}$ son inverse, et $(R^\ell_{i,\,j,\,k})_{1 \leq \ell \leq n}$ les coordonnées de $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k$ dans ce repère mobile (voir la formule (· 41 ·)) pour $1 \leq i, j, k \leq n$.

Soient $1 \leq i, j, k, \ell \leq n$. Par la proposition 3.26(1), nous avons

$$R^\ell_{i,\,j,\,k} = -R^\ell_{j,\,i,\,k} \ .$$

Posons

$$R_{i,\,j,\,k,\,\ell} = \langle R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_\ell \rangle = \sum_{m=1}^{n} R^m_{i,\,j,\,k}\, g_{m,\,\ell} \ , \tag{· 49 ·}$$

qui appartiennent à $\mathrm{C}^\infty(U)$ et sont les coordonnées du tenseur de courbure $(4, 0)$ dans le repère mobile, de sorte que

$$R^\ell_{i,\,j,\,k} = \sum_{m=1}^{n} R_{i,\,j,\,k,\,m}\, g^{m,\,\ell} \ .$$

Les formules de symétrie (· 44 ·) du tenseur de courbure $(4, 0)$ s'écrivent donc

$$R_{i,\,j,\,k,\,\ell} = -R_{j,\,i,\,k,\,\ell} = -R_{i,\,j,\,\ell,\,k} = R_{k,\,\ell,\,i,\,j} = R_{\ell,\,k,\,j,\,i} \ .$$

Posons

$$\mathrm{Ric}_{i,\,j} = \mathrm{Ric}(\partial_i, \partial_j) = \sum_{m=1}^{n} R^m_{m,\,i,\,j} \ , \tag{· 50 ·}$$

qui appartiennent à $\mathrm{C}^\infty(U)$ et sont les coordonnées de la courbure de Ricci (en tant que tenseur $(2, 0)$) dans le repère mobile. La symétrie de la courbure de Ricci s'écrit donc

$$\mathrm{Ric}_{i,\,j} = \mathrm{Ric}_{j,\,i} \ ,$$

ce qui se démontre, en utilisant les propriétés de symétries du tenseur de courbure et de la métrique riemannienne, par

$$\mathrm{Ric}_{i,\,j} = \sum_{\alpha=1}^{n} R^\alpha_{\alpha,\,i,\,j} = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} R_{\alpha,\,i,\,j,\,\beta}\, g^{\beta,\,\alpha} = \sum_{\beta,\,\alpha=1}^{n} R_{\beta,\,j,\,i,\,\alpha}\, g^{\alpha,\,\beta} = \mathrm{Ric}_{j,\,i} \ .$$

Considérons maintenant le tenseur de Ricci $(1, 1)$. En restriction à U, posons

$$\mathrm{Ric}(\partial_i) = \sum_{j=1}^{n} R^j_i\, \partial_j \ , \tag{· 51 ·}$$

où $R_i^j \in \mathrm{C}^\infty(U)$. Par définition, pour $1 \leq i, j \leq n$, nous avons

$$R_{i,\,j} = \sum_{k=1}^{n} R_i^k \; g_{k,\,j} \; ,$$

donc les coordonnées de la courbure de Ricci (en tant que tenseur $(1,1)$), dans le repère mobile, sont les

$$R_i^j = \sum_{k=1}^{n} R_{i,\,k} \; g^{k,\,j} \; .$$

Enfin, en tout point de U, la courbure scalaire vérifie, par définition,

$$\mathrm{Scal} = \sum_{i=1}^{n} R_i^i = \sum_{i,\,j=1}^{n} R_{i,\,j} \; g^{i,\,j} = \sum_{i,\,j,\,k=1}^{n} R_{k,\,i,\,j}^k \; g^{i,\,j} = \sum_{i,\,j,\,k,\,\ell=1}^{n} R_{k,\,i,\,j,\,\ell} \; g^{i,\,j} \; g^{k,\,\ell} \; . \quad (\cdot\, 52 \,\cdot)$$

Montrons que si la variété pseudo-riemannienne M est à courbure sectionnelle constante égale à κ, alors M est une variété d'Einstein. Il suffit par la formule de polarisation de montrer que $\mathrm{Ric}_x(v,v) = (n-1)\kappa\, g_x(v,v)$ pour tout $x \in M$ et $v \in T_xM$, et par continuité, il suffit de le montrer pour tout v non isotrope pour g_x. Il existe alors une carte locale $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ au voisinage du point x telle que $v = \partial_1(x)$ et telle que la matrice $(g_{i,\,j}(x))_{1 \leq i,\,j \leq n}$ soit diagonale. En particulier, $\big(g_{\alpha,\,\alpha}(x)\big)^{-1} = g^{\alpha,\,\alpha}(x)$ pour $1 \leq \alpha \leq n$. Puisque $R_{1,\,1,\,1,\,1} = 0$ et $\frac{R_{\alpha,\,1,\,1,\,\alpha}}{g_{1,\,1}\; g_{\alpha,\,\alpha}} = \kappa$ pour $2 \leq \alpha \leq n$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_x(v,v) = \mathrm{Ric}_{1,\,1}(x) &= \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} R_{\alpha,\,i,\,j,\,\beta}(x) \; g^{\beta,\,\alpha}(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} R_{\alpha,\,i,\,j,\,\alpha}(x) \; g^{\alpha,\,\alpha}(x) \\
&= (n-1)\kappa \; g_{1,\,1}(x) = (n-1)\kappa \, g_x(v,v) \; .
\end{aligned}$$

Le résultat en découle.

Montrons que si M est une variété pseudo-riemannienne d'Einstein, de constante d'Einstein λ, de dimension 3, alors M est à courbure sectionnelle constante. Comme M est de dimension 3, la dimension maximale d'un sous-espace isotrope est 1. Soit P un 2-plan tangent en un point x de M. Il est donc non isotrope pour g_x, et la restriction de g_x à P et à son orthogonal sont non dégénérées. Il existe alors une carte locale $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ au voisinage du point x telle que la matrice $(g_{i,\,j}(x))_{1 \leq i,\,j \leq n}$ soit diagonale, et telle que $(e_1 = \partial_1(x), e_2 = \partial_2(x))$ soit une base de P. Comme vu ci-dessus, pour $1 \leq i \leq 3$, nous avons

$$\lambda \, g_{i,\,i}(x) = \mathrm{Ric}_{i,\,i}(x) = \sum_{1 \leq j \leq n,\; j \neq i} R_{j,\,i,\,i,\,j}(x) \; g^{j,\,j}(x) \; .$$

Donc

$$\begin{aligned}
K(P) = \frac{R_{1,\,2,\,2,\,1}(x)}{g_{1,\,1}(x) \; g_{2,\,2}(x)} &= R_{1,\,2,\,2,\,1}(x) \; g^{1,\,1}(x) \; g^{2,\,2}(x) \\
&= \frac{1}{2} \big(\mathrm{Ric}_{1,\,1}(x) g^{1,\,1}(x) + \mathrm{Ric}_{2,\,2}(x) g^{2,\,2}(x) - \mathrm{Ric}_{3,\,3}(x) g^{3,\,3}(x) \big) \\
&= \frac{\lambda}{2} \big(g_{1,\,1}(x) g^{1,\,1}(x) + g_{2,\,2}(x) g^{2,\,2}(x) - g_{3,\,3}(x) g^{3,\,3}(x) \big) = \frac{\lambda}{2} \; .
\end{aligned}$$

Le résultat en découle.

Il est souvent utile, lorsque l'on calcule dans un repère mobile, d'utiliser la *convention d'Einstein* d'omettre un signe de sommation sur un entier m de 1 à n qui apparaît une fois en indice et une fois en exposant. Par exemple, la formule ($\cdot$ 49 $\cdot$) s'écrit $R_{i,j,k,\ell} = R^m_{i,j,k}\, g_{m,\ell}$, et la formule ($\cdot$ 50 $\cdot$) s'écrit $\mathrm{Ric}_{i,j} = R^m_{m,i,j}$, un moyen pratique de comprendre que la courbure de Ricci est une contraction du tenseur de courbure $(3,1)$.

• **Homogénéité et naturalité.**

Nous concluons cette partie par diverses remarques sur l'homogénéité et la naturalité des objets introduits précédemment.

Remarques. (1) Soient (M,g) et (M',g') deux variétés pseudo-riemanniennes. Considérons des champs de vecteurs $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ et $X',Y',Z',W' \in \Gamma(TM')$. Si $(M\times M', g\oplus g')$ est la variété pseudo-riemannienne produit, nous avons vu, en écrivant $T_{(x,x')}(M\times M') = T_xM \oplus T_{x'}M'$ et $X+X' : (x,x') \mapsto X(x)+X'(x')$, que la connexion de Levi-Civita produit vérifie

$$\nabla^{g\oplus g'}_{X+X'}(Y+Y') = \nabla^g_X Y + \nabla^{g'}_{X'} Y' \ .$$

Donc

$$R^{g\oplus g'}(X+X',Y+Y')(Z+Z') = R^g(X,Y)Z + R^{g'}(X',Y')Z' \ ,$$
$$R^{g\oplus g'}(X+X',Y+Y',Z+Z',W+W') = R^g(X,Y,Z,W) + R^{g'}(X',Y',Z',W') \ ,$$
$$\mathrm{Ric}^{g\oplus g'}(X+X',Y+Y') = \mathrm{Ric}^g(X,Y) + \mathrm{Ric}^{g'}(X',Y') \ ,$$
$$\mathrm{Ric}^{g\oplus g'}(X+X') = \mathrm{Ric}^g(X) + \mathrm{Ric}^{g'}(X') \ ,$$
$$\mathrm{Scal}_{g\oplus g'} = \mathrm{Scal}_g + \mathrm{Scal}_{g'} \ .$$

En particulier, le produit de deux variétés pseudo-riemanniennes de même constante d'Einstein est encore une variété d'Einstein de même constante d'Einstein.

Notons que $K(P)=0$ si P est engendré par un vecteur tangent à M (non isotrope) et un vecteur tangent à M' (non isotrope).

(2) Pour tout $\lambda>0$, la connexion de Levi-Civita de $(M,\lambda^2 g)$ est égale à celle de (M,g) (par l'unicité dans le théorème 3.5 et l'homogénéité de la condition d'être parallèle) :

$$\nabla^{\lambda^2 g} = \nabla^g \ .$$

Les géodésiques de $(M,\lambda^2 g)$ et de (M,g) sont donc les mêmes (mais la norme du vecteur vitesse est multipliée par λ). Si g est riemannienne, la distance riemannienne de $(M,\lambda^2 g)$ est λ fois la distance riemannienne de (M,g) :

$$d_{\lambda^2 g} = \lambda\, d_g \ .$$

Le tenseur de courbure $(3,1)$ de $(M,\lambda^2 g)$ est, en regardant la définition, égal au tenseur de courbure $(3,1)$ de (M,g) :

$$R^{\lambda^2 g} = R^g \ .$$

Si la dimension de M est au moins 2, la courbure sectionnelle de $(M,\lambda^2 g)$ est, en regardant la définition, $\frac{1}{\lambda^2}$ fois la courbure sectionnelle de (M,g) :

$$K^{\lambda^2 g} = \frac{1}{\lambda^2}\, K^g \ .$$

Le tenseur $(2,0)$ de courbure de Ricci de $(M,\lambda^2 g)$ est égal au tenseur $(2,0)$ de courbure de Ricci de (M,g)

$$\mathrm{Ric}^{\lambda^2 g} = \mathrm{Ric}^g \ ,$$

mais le tenseur $(1,1)$ de courbure de Ricci de $(M,\lambda^2 g)$ est $\frac{1}{\lambda^2}$ fois le tenseur $(1,1)$ de courbure de Ricci de (M,g). La courbure scalaire de $(M,\lambda^2 g)$ est donc égale à $\frac{1}{\lambda^2}$ fois la courbure scalaire de (M,g) :

$$\mathrm{Scal}_{\lambda^2 g} = \frac{1}{\lambda^2}\ \mathrm{Scal}_g \ .$$

Pour tout espace métrique X, de distance d, et pour tout $\epsilon > 0$, nous noterons

$$\epsilon X$$

l'espace métrique d'ensemble X et de distance $\epsilon\, d$. Par exemple, si M est une variété riemannienne, de métrique riemannienne g et de courbure sectionnelle K, alors ϵM est la variété riemannienne de variété M et de métrique riemannienne $\epsilon^2 g$, donc de courbure sectionnelle $\frac{1}{\epsilon^2}\, K$.

(3) Le résultat suivant dit que le groupe des isométries d'une variété pseudo-riemannienne (M,g) préserve sa connexion de Levi-Civita ∇, ses géodésiques, sa distance riemannienne d lorsque g est riemannienne, ses tenseurs R de courbures $(3,1)$ et $(4,0)$, sa courbure sectionnelle K, ses tenseurs Ric de courbure de Ricci $(2,0)$ et $(1,1)$, et sa courbure scalaire Scal.

Soit $f : N \to M$ un C^∞-difféomorphisme. Pour tout $X \in \Gamma(TM)$, rappelons que f^*X est le champs de vecteurs $x \mapsto (T_x f)^{-1}(X(f(x))$ sur N, et que $f^*(\varphi X) = (\varphi \circ f) f^* X$ et $f^*X(\psi) = X(\psi \circ f^{-1}) \circ f$ pour tous les $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(M)$ et $\psi \in \mathrm{C}^\infty(N)$. Notons

- f^*g la métrique pseudo-riemannienne image réciproque de g sur N, définie par

$$(f^*g)_x(v,w) = g_{f(x)}(T_x f(v), T_x f(w)) \ ,$$

où $x \in N$ et $v, w \in T_x N$,

- $f^*\nabla$ la connexion sur N image réciproque de ∇ par l'isomorphisme de fibrés vectoriels Tf,
- f^*d la distance image réciproque de d sur N par f,
- f^*R et $f^*\,\mathrm{Ric}$ les tenseurs sur N images réciproques des tenseurs (3,1) R et (2,0) Ric par f, de sorte que

$$(f^*R)(X,Y)Z = f^*\big(R((f^{-1})^*X, (f^{-1})^*Y)((f^{-1})^*Z)\big)$$

pour tous les $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$, et

- pour toute variété N et toute application $\varphi : N \to \mathbb{R}$, notons $f^*\varphi = \varphi \circ f$.

Proposition 3.29 *Pour tout $f \in \mathrm{Isom}(M,g)$, $f \circ c$ est une géodésique si c l'est (avec même norme de vecteur vitesse si g est riemannienne), et nous avons*

$$f^*\nabla = \nabla \ , \quad f^*d = d \ , \quad f^*R = R \ , \quad (Tf)^*K = K \ , \quad f^*\,\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric} \ , \quad f^*\,\mathrm{Scal} = \mathrm{Scal} \ .$$

Le fait que $f \in \mathrm{Isom}(M,g)$ préserve g s'écrit, pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$g(f^*X, f^*Y) = g(X,Y) \circ f \ .$$

La proposition signifie que, pour tous les $f \in \mathrm{Isom}(M,g)$, $x, y \in M$, $P \in \mathscr{G}_2^g(TM)$ et $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$(f^{-1})^*\big(\nabla_{f^*X}(f^*Y)\big) = \nabla_X Y$$

$$d(f(x), f(y)) = d(x,y) \ ,$$

$$(f^{-1})^*\big(R(f^*X, f^*Y)(f^*Z)\big) = R(X,Y)Z \ ,$$

$$R(f^*X, f^*Y, f^*Z, f^*W) = R(X,Y,Z,W) \circ f \ ,$$

$$K(Tf(P)) = K(P) \ ,$$

$$\mathrm{Ric}(f^*X, f^*Y) = \mathrm{Ric}(X,Y) \circ f \ ,$$

$$(f^{-1})^*\big(\mathrm{Ric}(f^*X)\big) = \mathrm{Ric}(X) \ ,$$

$$\mathrm{Scal}(f(x)) = \mathrm{Scal}(x) \ .$$

La quatrième des égalités ci-dessus s'écrit aussi, pour tous les $x \in M$ et $u, v, w, z \in T_xM$,

$$R_{f(x)}\big(T_xf(u), T_xf(v), T_xf(w), T_xf(z)\big) = R_x(u,v,w,z) \ .$$

Démonstration. La première formule ci-dessus se vérifie en utilisant la propriété d'unicité des connexions de Levi-Civita, voir la remarque 2.44. Les autres en découlent par construction des différents objets. □

Rappelons qu'une variété pseudo-riemannienne (M,g) est dite homogène si son groupe des isométries agit transitivement sur M. Par la continuité de la courbure sectionnelle et par la compacité de la variété grassmannienne des 2-plans tangents en un point donné, la courbure sectionnelle de toute variété riemannienne homogène est à courbure sectionnelle pincée.

Si le groupe des isométries de (M,g) agit transitivement sur l'ensemble des 2-plans tangents non isotropes de M, alors la courbure sectionnelle de (M,g) est constante.

Proposition 3.30 *Pour tous les $n \geq 2$ et $\lambda > 0$, l'espace euclidien standard $\mathbb{E}^n$, les homothétiques $(\mathbb{S}_n, \lambda^2 ds^2_{\mathrm{sph}})$ de la sphère standard, et les homothétiques $(\mathscr{H}^n_+, \lambda^2 ds^2_{\mathrm{hyp}})$ du modèle du demi-hyperboloïde supérieur de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ sont à courbure sectionnelle constante.*

Démonstration. Comme les groupes d'isométries agissent transitivement sur les bases orthonormées des espaces tangents (voir la démonstration du corollaire 3.12), le résultat est immédiat. □

Nous montrerons dans la partie 3.6.4 que toute variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle constante est isométrique à l'un des espaces de cette proposition, et nous calculerons précisément la valeur de leur courbure sectionnelle. Par isométrie, les autres modèles de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ (ceux de la boule et du demi-espace supérieur) sont aussi à courbure sectionnelle constante.

Exercice E.48 *Montrer que les variétés pseudo-riemanniennes $\mathbb{R}^{p,q}$, $\mathbb{S}_{n,p}$ et $\mathbb{H}_{n,p}$ définies dans les exemples (i) et (ii) de la partie 3.1 sont à courbure sectionnelle constante.*

(4) Le résultat suivant, que nous mentionnons pour la culture (voir par exemple [Bess]), est une conséquence de l'identité de Bianchi différentielle.

Théorème 3.31 (Théorème de Schur) *Si M est de dimension au moins 3, et si pour tout $x \in M$, la restriction de la courbure sectionnelle K de (M, g) à la variété grassmannienne des 2-plans non isotropes de T_xM est constante, alors K est constante.* □

(5) Alors qu'il y a si peu de variétés riemanniennes (complètes simplement connexes) à courbure sectionnelle constante, la courbure scalaire est bien plus flexible, comme le montre le résultat suivant, que nous mentionnons pour la culture (voir par exemple [Bess]).

Théorème 3.32 *Toute variété admet au moins une métrique riemannienne à courbure scalaire constante.* □

Exercice E.49 *Exprimer le tenseur de courbure uniquement à l'aide du transport parallèle.*

3.6.2 Interprétation géométrique des champs de Jacobi

Le but de ce paragraphe est de décrire de manière géométrique les champs de Jacobi le long de géodésiques, et d'en déduire une méthode de calcul bien pratique de la courbure lorsque l'on connaît suffisamment bien les géodésiques.

Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne (de dimension au moins 2), ∇ sa connexion de Levi-Civita et R son tenseur de courbure.

Un *champ de Jacobi* J de (M, g) le long d'une courbe lisse $c : I \to M$ est un champ de Jacobi le long de c pour la connexion de Levi-Civita de (M, g) (voir la partie 2.3.7), c'est-à-dire, puisque ∇ est sans torsion, un champ de vecteurs lisse $J : I \to TM$ le long de c tel que, pour tout $t \in I$,

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\frac{d}{dt}} J\,(t) = R(\dot{c}(t), J(t))(\dot{c}(t))\ .$$

Nous avons vu que si M est de dimension n, l'ensemble des champs de Jacobi est un sous-espace vectoriel de dimension $2n$ de l'espace vectoriel des champs de vecteurs le long de c. En notant $J'' = \nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\frac{d}{dt}} J \in \Gamma(c^*TM)$ et $R_{\dot{c}} \in \Gamma\big(c^*(\mathrm{End}(TM))\big) = \Gamma\big(\mathrm{End}(c^*TM)\big)$ l'application $t \mapsto \{J \mapsto R_{\dot{c}(t)}(J(t))\}$ où $R_{\dot{c}(t)}$ est l'opérateur de courbure en $c(t)$, l'équation des champs de Jacobi s'écrit donc, en utilisant l'antisymétrie du tenseur de courbure en les deux premières variables,

$$J'' + R_{\dot{c}} J = 0\ .$$

Soient $c : I \to M$ une géodésique et J un champ de Jacobi de (M, g) le long de c. Nous dirons que J est *orthogonal* à c si le vecteur tangent $J(t)$ en $c(t)$ est orthogonal au vecteur vitesse $\dot{c}(t)$ pour tout $t \in I$. Il en découle que $\nabla_{\frac{d}{dt}} J\,(t)$ est aussi orthogonal à $\dot{c}(t)$, puisque

$$\frac{d}{dt}\langle J(t), \dot{c}(t)\rangle = \langle \nabla_{\frac{d}{dt}} J\,(t), \dot{c}(t)\rangle + \langle J\,(t), \nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c}\,(t)\rangle = \langle \nabla_{\frac{d}{dt}} J\,(t), \dot{c}(t)\rangle\ ,$$

car g est parallèle pour ∇ et $t \mapsto \dot{c}(t)$ est parallèle le long de c.

Nous dirons que J est *tangent* à c si $J(t)$ est colinéaire au vecteur vitesse $\dot{c}(t)$ pour tout $t \in I$. Il en découle que $\nabla_{\frac{d}{dt}} J(t)$ est aussi colinéaire à $\dot{c}(t)$: en effet, puisque $t \mapsto \dot{c}(t)$ est parallèle le long de c et puisque $\nabla_{\frac{d}{dt}}$ est une dérivation, nous avons, pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(I)$,

$$\nabla_{\frac{d}{dt}}(f\dot{c})(t) = \dot{f}(t)\,\dot{c}(t) + f(t)\nabla_{\frac{d}{dt}}\dot{c}\,(t) = \dot{f}(t)\,\dot{c}(t)\ .$$

Proposition 3.33 *Soient t_0 un point d'un intervalle I et $c : I \to M$ une géodésique non constante.*

(1) Un champ de Jacobi J le long de c est orthogonal à c si et seulement si $J(t_0)$ et $\nabla_{\frac{d}{dt}} J(t_0)$ sont orthogonaux à $\dot{c}(t_0)$. L'ensemble des champs de Jacobi orthogonaux le long de c est donc un sous-espace vectoriel de dimension $2(n-1)$ si M est de dimension n.

(2) Les champs de Jacobi tangents à c sont les applications $t \mapsto (at+b)\,\dot{c}(t)$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Si c n'est pas de type lumière (c'est-à-dire si $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \neq 0$, ce qui est toujours le cas si g est riemannienne et c non constante), alors tout champ de Jacobi J le long de c est somme d'un champ de Jacobi orthogonal et du champ de Jacobi tangent

$$J_1 : t \mapsto \frac{\langle J(t),\, \dot{c}(t)\rangle}{\langle \dot{c}(t),\, \dot{c}(t)\rangle}\,\dot{c}(t)\ .$$

Démonstration. (1) Puisque le champ de vecteurs vitesses de c est parallèle le long de c, puisque g est parallèle pour ∇, et puisque le tenseur $(4,0)$ de courbure est antisymétrique en ses deux dernières variables, nous avons, pour tout champ de Jacobi J le long de c,

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle J(t), \dot{c}(t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle \nabla_{\frac{d}{dt}} J(t), \dot{c}(t)\rangle = \langle \nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}} J\,(t), \dot{c}(t)\rangle = R(\dot{c}(t), J(t), \dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 0\ .$$

Supposons que $J(t_0)$ et $\nabla_{\frac{d}{dt}} J(t_0)$ soient orthogonaux à $\dot{c}(t_0)$. Alors l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par $t \mapsto \langle \nabla_{\frac{d}{dt}} J(t), \dot{c}(t)\rangle$ est constante, donc nulle, car nulle en $t = t_0$. Et l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par $t \mapsto \langle J(t), \dot{c}(t)\rangle$, de dérivée nulle, est constante, donc nulle car nulle en $t = t_0$. Le résultat en découle.

(2) Puisque c est non constante, son vecteur vitesse ne s'annule pas (l'unique géodésique maximale passant par un point donné avec vecteur vitesse nul est la géodésique définie sur $\mathbb{R}$ et constante en ce point). Tout champ de Jacobi tangent le long de c est donc de la forme $J : t \mapsto f(t)\,\dot{c}(t)$ où $f : I \to \mathbb{R}$ est lisse. Par les propriétés des connexions, puisque $\dot{c}$ est parallèle le long de c et puisque la courbure est antisymétrique en les deux premières variables, nous avons

$$\ddot{f}(t)\,\dot{c}(t) = \nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}} J\,(t) = R(\dot{c}(t), J(t))\dot{c}(t) = f(t)\,R(\dot{c}(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = 0\ .$$

Donc $\ddot{f}$=0, et la première affirmation en découle.

Le champ de vecteurs J_1 (bien défini puisque c n'est pas de type lumière) est bien un champ de Jacobi, car une géodésique étant paramétrée à vitesse constante, le champ de vecteurs vitesses étant parallèle, et le tenseur (4,0) de courbure étant antisymétrique en les deux dernières variables et en les deux premières, nous avons

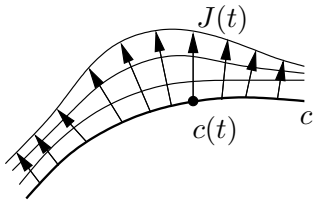
$$\nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}} J_1(t) = \frac{\langle \nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}} J(t), \dot{c}(t)\rangle}{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle}\,\dot{c}(t) = \frac{\langle R(\dot{c}(t), J(t))\dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle}{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle}\,\dot{c}(t) = 0\ ,$$

et

$$R(\dot c(t), J_1(t))\dot c(t) = \frac{\langle J(t), \dot c(t)\rangle}{\langle \dot c(t), \dot c(t)\rangle}\, R(\dot c(t), \dot c(t))\dot c(t) = 0\ .$$

Donc $J - J_1$ est un champ de Jacobi le long de c, qui est orthogonal à c comme un calcul immédiat le montre. Puisque $J = (J - J_1) + J_1$, le résultat en découle. $\square$

Soit $c : I \to M$ une courbe lisse dans M. Une *variation* de c est une application lisse $f : I \times]-\epsilon, \epsilon[\to M$ où $\epsilon > 0$ telle que, en notant $c_s : t \mapsto f(t, s)$, nous ayons $c_0 = c$. Nous dirons que f est une *variation par géodésiques* si c_s est une géodésique pour tout $s \in]-\epsilon, \epsilon[$.



Le *vecteur variation* de f est le champ de vecteurs J le long de c défini par

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} c_s(t)\ .$$

Proposition 3.34 *Soit $c : I \to M$ une géodésique dans (M, g). Un champ de vecteurs J le long de c est un champ de Jacobi si et seulement s'il coïncide localement avec le vecteur variation d'une variation par géodésiques de c.*

Démonstration. Soient $N = I \times]-\epsilon, \epsilon[$ (de coordonnées (t, s)) et $f : N \to M$ une variation par géodésiques de c. Montrons que son vecteur variation est un champ de Jacobi.

Reprenons les notations de la proposition 2.42 : pour $X \in \Gamma(TN)$, notons $\overline{X} \in \Gamma(f^*TM)$ la section lisse du fibré image réciproque f^*TM définie par $\overline{X}(x) = T_x f(X(x))$; notons $\overline{\nabla}$ la connexion image réciproque $f^*\nabla$ sur f^*TM (voir la proposition 2.37) ; notons $\overline{R}$ le tenseur $(3, 1)$ sur le fibré vectoriel f^*TM définie par $\overline{R}_x = R_{f(x)}$; notons $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial s}$ les champs de vecteurs coordonnées sur N. Puisque $c_s : t \mapsto f(t, s)$ est une géodésique et puisque $\overline{\frac{\partial}{\partial t}}(t, s) = \dot c_s(t)$, nous avons $\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} = 0$. Le vecteur variation de f est $J : t \mapsto \overline{\frac{\partial}{\partial s}}(t, 0)$.

Par la proposition 2.42 (1) et le lemme de Schwarz, nous avons

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}} = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} + \overline{\Big[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\Big]} = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}}\ . \qquad (\cdot 53 \cdot)$$

Donc par la proposition 2.42 (4), nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}} &= \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} \\
&= \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} + \overline{\nabla}_{[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}]} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} + \overline{R}\Big(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial s}}\Big)\overline{\frac{\partial}{\partial t}} \\
&= \overline{R}\Big(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial s}}\Big)\overline{\frac{\partial}{\partial t}}\ .
\end{aligned}$$

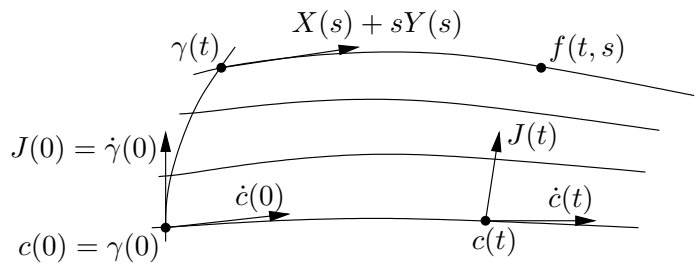
D'où

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\frac{d}{dt}} J(t) = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}}(t, 0) = R_{c(t)}(\dot c(t), J(t))(\dot c(t))\ ,$$

et J est bien un champ de Jacobi.

Réciproquement, soit J un champ de Jacobi le long de c. Quitte à translater I, nous pouvons supposer que $0 \in I$. Notons $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ la géodésique telle que $\gamma(0) = c(0)$

et $\dot\gamma(0) = J(0)$. Soient X et Y les champs de vecteurs parallèles le long de γ tels que $X(0) = \dot c(0)$ et $Y(0) = \nabla_{\frac{d}{dt}} J(0)$.



Définissons une application lisse $f : I' \times]-\epsilon', \epsilon'[\to M$ par

$$f(t,s) = \exp_{\gamma(s)}(tX(s) + stY(s)) \ ,$$

qui est bien définie si ϵ' est assez petit et si I' est un intervalle ouvert suffisamment petit contenant 0 (si M est complète, nous pouvons prendre $\epsilon = \epsilon'$ et $I' = I$). Il est immédiat que f est une variation par géodésiques de $c_{|I'}$. Son vecteur variation

$$t \mapsto J^*(t) = \frac{\partial f(s,t)}{\partial s}_{|s=0}$$

est un champ de Jacobi, par ce qui précède. Comme $f(0,s) = \gamma(s)$, nous avons $J^*(0) = \dot\gamma(0) = J(0)$. En utilisant la formule ($\cdot$ 53 $\cdot$) ci-dessus, le fait que l'application tangente en 0 de l'application exponentielle sur un espace tangent soit l'identité, et le fait que X et Y soient parallèles le long de c, nous avons

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} J^*(0) = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}}(0,0) = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}}(0,0) = \big(\nabla_{\frac{d}{ds}}(X(s) + sY(s))\big)(0) = Y(0) = \nabla_{\frac{d}{dt}} J(0) \ .$$

Par la propriété d'unicité des champs de Jacobi, le vecteur variation de f est donc égal à J. □

Remarque. Voici une méthode (une des plus géométriques) pour calculer la courbure sectionnelle (donc le tenseur de courbure par la remarque (2) suivant la définition de la courbure sectionnelle). Supposons que l'on connaisse toutes les (ou suffisamment de) géodésiques dans une variété pseudo-riemannienne. Le résultat précédent permet alors de calculer tous les (ou suffisamment de) champs de Jacobi le long des géodésiques. Nous allons donc expliquer comment calculer la courbure sectionnelle à partir de champs de Jacobi.

Pour tout $x \in M$, soient v et w deux vecteurs non colinéaires de T_xM, et P le plan vectoriel dans T_xM qu'ils engendrent, supposé non isotrope (ce qui est automatique si g est riemannienne). Pour $\epsilon > 0$ assez petit, soit $c :]-\epsilon + t_0, t_0 + \epsilon[\to M$ la géodésique telle que ($c(t_0) = x$ et) $\dot c(t_0) = v$. Soit J un champ de Jacobi le long de c tel que $J(t_0) = w$ (il y a une infinité de possibilités). Alors

$$\begin{aligned}\langle R(v,w)w, v\rangle &= \langle R(\dot c(t_0), J(t_0))J(t_0), \dot c(t_0)\rangle = -\langle R(\dot c(t_0), J(t_0))\dot c(t_0), J(t_0)\rangle \\ &= -\langle \nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\frac{d}{dt}} J(t_0), J(t_0)\rangle \ .\end{aligned}$$

Donc

$$K(P) = \frac{g(R(v,w)w,v)}{g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2} = \frac{-\langle \nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\frac{d}{dt}} J\,(t_0), J(t_0)\rangle}{\langle \dot{c}(t_0), \dot{c}(t_0)\rangle \langle J(t_0), J(t_0)\rangle - \langle \dot{c}(t_0), J(t_0)\rangle^2} \ .$$

Il suffit donc de savoir calculer l'accélération covariante de suffisamment de champs de Jacobi le long des géodésiques pour en déduire la courbure sectionnelle de la variété.

Si g est riemannienne, alors pour toute géodésique c paramétrée par longueur d'arc (donc de norme de vecteur vitesse égale à 1) et pour tout champ de Jacobi J orthogonal le long de c non nul à l'instant $t = t_0$, nous avons

$$K\big(\operatorname{Vect}(\dot{c}(t_0), J(t_0))\big) = -\frac{\langle \nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\frac{d}{dt}} J, J\rangle(t_0)}{\langle J, J\rangle(t_0)} \ . \qquad (\cdot 54 \cdot)$$

Si g est riemannienne, si (v,w) est une base orthonormée d'un plan vectoriel tangent P, alors

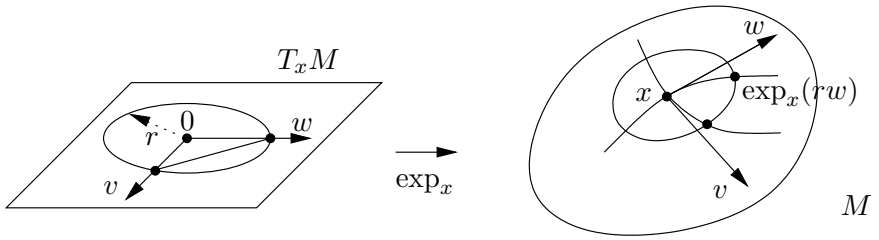
$$K(P) = -\langle \nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\frac{d}{dt}} J, J\rangle(t_0) \ ,$$

pour toute géodésique c de vecteur tangent v au temps $t = t_0$ et tout champ de Jacobi J le long de c valant w à l'instant $t = t_0$.

3.6.3 Interprétation métrique de la courbure

Soient (M,g) une variété riemannienne, x un point de M et d sa distance riemannienne.

Pour tout $r > 0$, dans l'espace euclidien T_xM, la longueur d'un cercle C_r de centre 0 et de rayon r est $2\pi r$, et si v et w sont deux vecteurs orthonormés, alors la distance entre rv et rw est $\sqrt{2}\,r$.



Suivant que la courbure sectionnelle de M est négative ou positive, nous allons montrer que les longueurs riemanniennes des petits cercles $\exp_x(C_r)$ et les distances riemanniennes entre $\exp_x(rv)$ et $\exp_x(rw)$ sont respectivement plus grandes ou plus petites qu'elles ne le sont dans l'espace tangent. Le résultat suivant permet de plus de calculer la courbure sectionnelle de M en fonction de la longueur des petits cercles ou de la manière dont s'écartent les géodésiques. Il montre donc que la distance riemannienne détermine la courbure sectionnelle, donc le tenseur de courbure.

Proposition 3.35 *Soient (M,g) une variété riemannienne, R son tenseur de courbure, K sa courbure sectionnelle, $x \in M$, et $c_v, c_w :]-\epsilon, +\epsilon[\to M$ deux géodésiques de vecteurs vitesses $v, w \in T_xM$ respectivement au temps $t = 0$. Alors quand $t \to 0$,*

$$d(c_v(t), c_w(t))^2 = t^2\|v - w\|^2 - \frac{\langle R(v,w)w, v\rangle}{3}\, t^4 + \mathrm{O}(t^5) \ .$$

En particulier, si v, w sont orthonormés, et si P est le plan vectoriel qu'ils engendrent, alors

$$d(c_v(t), c_w(t)) = \sqrt{2}\, t\big(1 - \frac{K(P)}{12}\, t^2\big) + \mathrm{O}(t^4)\ . \qquad (\cdot 55 \cdot)$$

Pour $r > 0$ assez petit et v, w orthonormés, si $\gamma_r : [0, 2\pi] \to M$ est la courbe fermée lisse définie par $\gamma_r : s \mapsto \exp_x(r(\cos s\ v + \sin s\ w))$, alors

$$\mathrm{long}(\gamma_r) = 2\pi r\big(1 - \frac{K(P)}{6}\, r^2 + \mathrm{O}(r^3)\big)\ .$$

Démonstration. Nous renvoyons par exemple à [GaHL]. □

3.6.4 Variétés riemanniennes à courbure sectionnelle constante

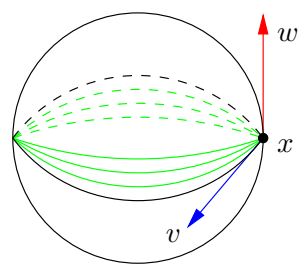
Soit $n \geq 2$. Nous avons déjà vu que la courbure sectionnelle de l'espace euclidien standard est nulle, ce qui se retrouve aussi en remarquant que ses champs de Jacobi sont affines (donc d'accélération nulle).

Proposition 3.36 *La courbure sectionnelle de la sphère standard $(\mathbb{S}_n, ds^2_{\mathrm{sph}})$ (qui est constante) est $+1$.*

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{S}_n$ et v, w dans $T_x\mathbb{S}_n$ deux vecteurs orthonormés. La géodésique de vecteur vitesse v à l'instant $t = 0$ est

$$c : t \mapsto \cos t\ x + \sin t\ v\ ,$$

car cette courbe est paramétrée par longueur d'arc ($\|\dot c(t)\| = 1$), son image est un arc de grand cercle, et son vecteur vitesse à l'instant $t = 0$ est v.



L'application $f : \mathbb{R} \times]-1, 1[\to \mathbb{S}_n$ définie par

$$(t, s) \mapsto \cos t\ x + \sin t(\cos s\ v + \sin s\ w)$$

est une variation par géodésiques de c. Son vecteur variation est $J : t \mapsto \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} f(t, s) = \sin t\ w$, qui est orthogonal le long de c. Puisque la dérivée covariante sur $\mathbb{S}_n$ est la projection orthogonale sur les espaces tangents à $\mathbb{S}_n$ de la dérivation dans $\mathbb{R}^{n+1}$, nous avons

$$\langle \nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\frac{d}{dt}} J\,(t), J(t)\rangle = \langle \ddot J(t), J(t)\rangle = -\langle J(t), J(t)\rangle\ .$$

Donc par la formule ($\cdot 54 \cdot$), pour tout $t \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$K\big(\,\mathrm{Vect}(\dot c(t), J(t))\big) = +1\ .\ \square$$

Proposition 3.37 *La courbure sectionnelle du modèle du demi-hyperboloïde $(\mathscr{H}^n_+, ds^2_{\mathrm{hyp}})$ d'un espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ (qui est constante) est -1.*

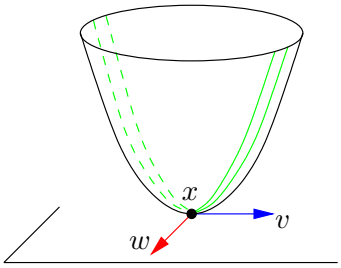
Par isométrie, les modèles de la boule et du demi-espace supérieur sont aussi à courbure sectionnelle constante -1.

Démonstration. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la forme bilinéaire symétrique $g^{1,n}$ de signature $(1,n)$ sur $\mathbb{R}^{1,n}$, et rappelons que la métrique riemannienne de $\mathscr{H}^n_+$ est la restriction de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur chaque espace tangent à $\mathscr{H}^n_+$.

Soient $x \in \mathscr{H}^n_+$ et $v, w \in T_x\mathscr{H}^n_+$ deux vecteurs orthonormés. Par le lemme 3.22, la courbe

$$c : t \mapsto \cosh t\, x + \sinh t\, v$$

est l'unique géodésique hyperbolique de conditions initiales $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$.



Pour tout $s \in \mathbb{R}$, le vecteur $\cos s\, v + \sin s\, w$ est encore tangent à $\mathscr{H}^n_+$ en x et unitaire. L'application lisse $f : \mathbb{R} \times]-1,1[\to \mathscr{H}^n_+$ définie par

$$(t,s) \mapsto \cosh t\, x + \sinh t(\cos s\, v + \sin s\, w)$$

est donc une variation par géodésiques de c. Son vecteur variation est

$$J : t \mapsto \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} f(t,s) = \sinh t\, w\ ,$$

qui est orthogonal le long de c. Puisque la dérivée covariante sur $\mathscr{H}^n_+$ en un point $x \in \mathscr{H}^n_+$ est la projection orthogonale dans $\mathbb{R}^{1,n}$ sur les espaces tangents à $\mathscr{H}^n_+$ de la dérivation dans $\mathbb{R}^{n+1}$, nous avons

$$\langle \nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\frac{d}{dt}} J\,(t), J(t)\rangle = \langle \ddot{J}(t), J(t)\rangle = \langle J(t), J(t)\rangle\ .$$

Donc par la formule ($\cdot$ 54 $\cdot$), pour tout $t \neq 0$,

$$K\big(\mathrm{Vect}(\dot{c}(t), J(t))\big) = -1\ .\ \square$$

Le résultat suivant décrit toutes les variétés riemanniennes complètes à courbure sectionnelle constante.

Théorème 3.38 *Soit (M,g) une variété riemannienne connexe complète, de dimension $n \geq 2$, à courbure sectionnelle constante κ. Alors tout revêtement riemannien universel de (M,g) est isométrique à la variété riemannienne complète simplement connexe*

$$\mathscr{M}_{\kappa,n} = \begin{cases} \mathbb{E}^n & \text{si } \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\,\mathbb{S}_n & \text{si } \kappa > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\kappa}}\,\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} & \text{si } \kappa < 0\ . \end{cases}$$

Donc il existe un sous-groupe Γ du groupe des isométries de $\mathscr{M}_{\kappa,n}$, agissant librement et proprement sur $\mathscr{M}_{\kappa,n}$, tel que (M,g) soit isométrique à la variété riemannienne quotient $\Gamma\backslash\mathscr{M}_{\kappa,n}$.

Une *variété plate* est une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle constante nulle. Si elle est connexe et de dimension n, elle est donc isométrique à $\Gamma\backslash\mathbb{E}^n$ où Γ est un sous-groupe du groupe des translations-rotations agissant librement et proprement sur

$\mathbb{R}^n$. Nous décrirons ultérieurement (voir la proposition 4.38) l'espace des modules (c'est-à-dire des classes d'isométries) des tores plats de dimension 2.

Une *variété hyperbolique* est une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle constante -1. Si elle est connexe et de dimension n, elle est donc isométrique à $\Gamma\backslash\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ où Γ est un sous-groupe du groupe des isométries d'un espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, agissant librement et proprement sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. Nous décrirons ultérieurement (voir la partie 4.4) l'espace des modules (c'est-à-dire des classes d'isométries) des surfaces hyperboliques (compactes connexes orientables de genre donné $g \geq 2$).

Démonstration. Nous pouvons supposer $\kappa = 0, 1, -1$ par la remarque (1) de la partie 3.6.1 suivant la définition de la courbure scalaire.

Fixons $x \in M$. Pour tous les $u, v \in T_xM$ orthogonaux, où v est unitaire, posons $c : \mathbb{R} \to M$ la géodésique (définie sur $\mathbb{R}$ par complétude et paramétrée par longueur d'arc) de (M, g) telle que ($c(0) = x$ et) $\dot{c}(0) = v$, qui est $t \mapsto \exp_x(tv)$ par définition de l'exponentielle ; notons $U : t \mapsto U(t)$ le champ de vecteurs parallèle le long de c tel que $U(0) = u$; notons $J : t \mapsto J(t)$ le champ de Jacobi le long de c tel que $J(0) = 0$ et $\nabla_{\frac{d}{dt}} J\,(0) = u$, qui est $t \mapsto T_{tv}\exp_x(tu)$ par la proposition 2.47.

Supposons que $\kappa = 0$. Alors, par la propriété d'unicité des champs de Jacobi, nous avons

$$J(t) = t\,U(t)\ .$$

En effet, J et $t \mapsto t\,U(t)$ ont même valeur en 0 et même dérivée covariante en 0. De plus, $t \mapsto t\,U(t)$ est un champ de Jacobi car $\nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}}(t\,U(t)) = 0$ et $R(\dot{c}(t), t\,U(t))\dot{c}(t) = 0$ car la nullité de la courbure sectionnelle implique la nullité du tenseur de courbure (voir la remarque contenant la formule ($\cdot\,47\,\cdot$)).

Donc pour tout $s > 0$, l'application $T_{sv}\exp_x : u \mapsto \frac{1}{s}J(s) = U(s)$ est le transport parallèle le long de c entre les temps $t = 0$ et $t = s$, qui est une isométrie. Donc $\exp_x : T_xM \to M$ est une isométrie locale, donc un revêtement riemannien par la complétude de l'espace euclidien T_xM et la proposition 3.25 (1).

Supposons que $\kappa = -1$. Alors, par la propriété d'unicité des champs de Jacobi, nous avons

$$J(t) = \sinh t\ U(t)\ .$$

En effet, J et $t \mapsto \sinh t\ U(t)$ ont même valeur en 0 et même dérivée covariante en 0. De plus, $t \mapsto \sinh t\ U(t)$ est un champ de Jacobi car $\nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}}(\sinh t\ U(t)) = \sinh t\ U(t)$ et $R(X, Y)X = Y$ si X et Y sont orthogonaux et X est unitaire, car $\kappa = -1$ et par la proposition 3.28.

Soit $\widetilde{x} \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ et soit $f : T_{\widetilde{x}}\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} \to T_xM$ une isométrie linéaire. Rappelons que $\exp_{\widetilde{x}} : T_{\widetilde{x}}\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ est un C^∞-difféomorphisme. Posons $F = \exp_x \circ f \circ (\exp_{\widetilde{x}})^{-1} : \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} \to M$. Puisque $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ est à courbure sectionnelle constante -1, le même raisonnement que ci-dessus montre que l'application tangente de F est une isométrie en tout point, donc que F est une isométrie locale, donc un revêtement riemannien par la complétude de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ et la proposition 3.25 (1).

Supposons que $\kappa = +1$. Alors, par unicité, nous avons comme ci-dessus que

$$J(t) = \sin t\ U(t)\ .$$

Soient $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathbb{S}_n$ tels que $\widetilde{y} \neq \widetilde{x}, -\widetilde{x}$ et $f : T_{\widetilde{x}}\mathbb{S}_n \to T_x M$ une isométrie linéaire. Rappelons que $\exp_{\widetilde{x}} : B_{T_{\widetilde{x}}\mathbb{S}_n}(0, \pi) \to \mathbb{S}_n - \{-\widetilde{x}\}$ est un C^∞-difféomorphisme. Posons $F = \exp_x \circ f \circ (\exp_{\widetilde{x}})^{-1} : \mathbb{S}_n - \{-\widetilde{x}\} \to M$ et $G = \exp_{F(\widetilde{y})} \circ T_{\widetilde{y}}F \circ (\exp_{\widetilde{y}})^{-1} : \mathbb{S}_n - \{-\widetilde{y}\} \to M$, qui sont comme ci-dessus des isométries locales. Elles coïncident de plus au point $\widetilde{y}$ et ont même application tangente en $\widetilde{y}$. Elles coïncident donc sur l'intersection (connexe car $n \geq 2$) de leur domaine de définition, donc se recollent pour donner une isométrie locale de $\mathbb{S}_n$ dans M. Cette isométrie locale est un revêtement riemannien, par la complétude de $\mathbb{S}_n$ et la proposition 3.25 (1). □

Une version locale du théorème 3.38 est vraie.

Proposition 3.39 *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 2$ à courbure sectionnelle constante κ. Pour tous les $x \in M$ et $x_\kappa \in \mathscr{M}_{\kappa,n}$, si $r_x = \mathrm{inj}_M(x)$, alors la boule ouverte $B_M(x, r_x)$ est isométrique à $B_{\mathscr{M}_{\kappa,n}}(x_\kappa, r_x)$.*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du théorème 3.38, en travaillant avec les géodésiques $c :]-r_x, +r_x[\to M$ telles que $c(0) = x$. Notons $s_\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique solution maximale de l'équation différentielle $\ddot{y} + \kappa y = 0$ telle que $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 1$, qui est l'application définie par

$$s_\kappa(r) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{\kappa}\, r)}{\sqrt{\kappa}} & \text{si } \kappa > 0 \\ r & \text{si } \kappa = 0 \\ \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa}\, r)}{\sqrt{-\kappa}} & \text{si } \kappa < 0\,. \end{cases}$$

Fixons un point x_κ dans $\mathscr{M}_{\kappa,n}$, et notons $g_{\mathscr{M}_{\kappa,n}}$ la métrique riemannienne de $\mathscr{M}_{\kappa,n}$. La démonstration du théorème 3.38 montre que les métriques riemanniennes $(\exp_x)^* g$ et $(\exp_{x_\kappa})^* g_{\mathscr{M}_{\kappa,n}}$ sont, en coordonnées radiales, toutes deux de la forme

$$dr^2 + s_\kappa(r)^2 g_0$$

où g_0 est la métrique riemannienne induite sur la sphère unité de l'espace tangent aux points x et x_κ respectivement. En prenant comme précédemment une isométrie linéaire $f : T_x M \to T_{x_\kappa}\mathscr{M}_{\kappa,n}$, l'application $\exp_{x_\kappa} \circ f \circ {\exp_x}^{-1} : B_M(x, r_x) \to B_{\mathscr{M}_{\kappa,n}}(x_\kappa, r_x)$ est donc une isométrie. □

3.6.5 Variétés riemanniennes à courbure sectionnelle de signe constant

Le résultat suivant est un premier résultat sur l'influence de la courbure sur la topologie des variétés riemanniennes.

Théorème 3.40 (Théorème de Cartan-Hadamard) *Soit (M, g) une variété riemannienne connexe complète à courbure sectionnelle négative ou nulle. Pour tout $x \in M$, l'application exponentielle $\exp_x : T_x M \to M$ est un revêtement. En particulier, si M est de dimension n, alors tout revêtement universel de M est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

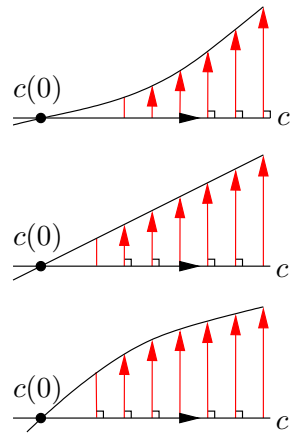
Le cas de la courbure constante a déjà été démontré dans le théorème 3.38.

Démonstration. La démonstration repose sur le résultat suivant, dont la première assertion (appelée le *théorème de comparaison de Rauch*), disant que la croissance de la norme des champs de Jacobi est supérieure ou égale à celle dans les variétés dont la courbure sectionnelle est constante et majore celle de (M, g), servira ultérieurement.

Lemme 3.41 *Soit c une géodésique paramétrée par longueur d'arc d'une variété riemannienne (M, g).*

(a) Si la courbure sectionnelle de (M, g) est majorée par $\kappa_0 \in \mathbb{R}$ le long de c, si 0 et t appartiennent au domaine de définition de c, alors pour tout champ de Jacobi J orthogonal le long de c s'annulant en 0, nous avons

$$\|J(t)\| \geq \begin{cases} \|\nabla_{\frac{d}{dt}} J(0)\| \, \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa_0}\, t)}{\sqrt{-\kappa_0}} & \text{si } \kappa_0 < 0 \\ \|\nabla_{\frac{d}{dt}} J(0)\| \, t & \text{si } \kappa_0 = 0 \\ \|\nabla_{\frac{d}{dt}} J(0)\| \, \frac{\sin(\sqrt{\kappa_0}\, t)}{\sqrt{\kappa_0}} & \text{si } \kappa_0 > 0 \ \text{ et } |t| \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_0}} \end{cases}$$



(b) Si la courbure sectionnelle de g est négative ou nulle le long de c, alors c n'a pas de paire de points conjugués.

Démonstration. Soient I l'intervalle de définition de c et J un champ de Jacobi le long de c s'annulant en $t = 0$. Posons $a_0 = \|\nabla_{\frac{d}{dt}} J(0)\|$. Nous commençons la démonstration de ce lemme par deux remarques préliminaires.

La première remarque est une minoration de la dérivée seconde de la norme de J. L'application $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \|J(t)\|$ est lisse en tout $t \in I$ tel que $J(t) \neq 0$. En un tel temps t, puisque g est parallèle pour la connexion de Levi-Civita,

$$\dot{f}(t) = \frac{g(\nabla_{\frac{d}{dt}} J(t), J(t))}{\|J(t)\|} \, .$$

En dérivant de nouveau, nous avons donc, pour tout $t \in I$ tel que $J(t) \neq 0$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (et l'antisymétrie du tenseur de courbure $(4, 0)$ en ses deux dernières variables) pour la dernière majoration

$$\begin{aligned} \ddot{f}(t) &= \frac{g(\nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\frac{d}{dt}} J(t), J(t)) + g(\nabla_{\frac{d}{dt}} J(t), \nabla_{\frac{d}{dt}} J(t))}{\|J(t)\|} - \frac{g(\nabla_{\frac{d}{dt}} J(t), J(t))^2}{\|J(t)\|^3} \\ &= \frac{g(R(\dot{c}(t), J(t))\dot{c}(t), J(t))}{\|J(t)\|} + \frac{\|\nabla_{\frac{d}{dt}} J(t)\|^2 \|J(t)\|^2 - g(\nabla_{\frac{d}{dt}} J(t), J(t))^2}{\|J(t)\|^3} \\ &\geq -\frac{R(\dot{c}(t), J(t), J(t), \dot{c}(t))}{\|J(t)\|} \, . \end{aligned} \tag{$\cdot 56 \cdot$}$$

La seconde remarque est que $f(t)$ est équivalent à $a_0 t$ quand $t \to 0^+$ si $a_0 \neq 0$. En effet, soit $t \mapsto (E_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ un champ de bases orthonormées parallèle le long de c. Nous pouvons écrire $J(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) E_i(t)$, et alors $\nabla_{\frac{d}{dt}} J(t) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(t) E_i(t)$ (par la propriété

de dérivation de $\nabla_{\frac{d}{dt}}$, et puisque E_i est parallèle le long de c). Puisque $J(0) = 0$, nous avons $f(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i(t)^2} = t\sqrt{\sum_{i=1}^n \dot{x}_i(0)^2} + \mathrm{o}(t)$ lorsque $t \to 0^+$. L'affirmation en découle.

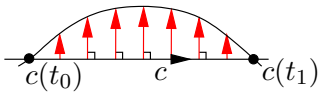
Maintenant, pour montrer l'assertion (a), supposons que J soit orthogonal le long de c. Si $a_0 = 0$, alors J est le champ de Jacobi nul (ses deux conditions initiales en $t = 0$ étant nulles) et le résultat est immédiat. Nous pouvons donc supposer que $a_0 > 0$.

Comme le vecteur vitesse de c est unitaire, par la minoration ($\cdot$ 56 $\cdot$) et par la définition de la courbure sectionnelle, nous avons $\ddot{f}(t) \geq -\kappa_0 f(t)$. La solution maximale de l'équation différentielle $\ddot{y} + \kappa_0 y = 0$ s'annulant en $t = 0$ et dont la dérivée vaut a_0 en $t = 0$ est

$$y(t) = \begin{cases} a_0 \, \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa_0}\, t)}{\sqrt{-\kappa_0}} & \text{si } \kappa_0 < 0 \\ a_0 \, t & \text{si } \kappa_0 = 0 \\ a_0 \, \frac{\sin(\sqrt{\kappa_0}\, t)}{\sqrt{\kappa_0}} & \text{si } \kappa_0 > 0 \, . \end{cases}$$

En tout temps $t > 0$ tel que $t < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_0}}$ si $\kappa_0 > 0$, l'application y est strictement positive, et $\left(\frac{f}{y}\right)' = \frac{f'y - y'f}{y^2}$. Le numérateur de cette dernière fraction a pour dérivée $f''y - y''f = y(f'' + \kappa_0 f) \geq 0$ en tout tel temps t, donc est croissant. Il s'annule si $t = 0$, donc est positif en tout tel temps t. Donc $\frac{f}{y}$ est croissante en ces tels temps t, et puisqu'elle se prolonge par continuité en $t = 0$ par la valeur 1 (son numérateur, par la seconde remarque préliminaire, et son dénominateur sont équivalents à $a_0 t$ en $t = 0$ et $a_0 \neq 0$), nous avons $f \geq y$ en tout tel temps t, ce qui montre le résultat.

Montrons l'assertion (b). Soit J un champ de Jacobi le long de c, nul en des instants distincts t_0 et t_1. Montrons que J est nul, ce qui montre le résultat, par la définition des points conjugués.



Quitte à translater à la source, nous pouvons supposer que $t_0 = 0$ et $t_1 > 0$. Puisque la courbure sectionnelle de g est négative ou nulle, nous avons $\ddot{f} \geq 0$ par la minoration ($\cdot$ 56 $\cdot$). Donc f est convexe et nulle en $t_0 = 0$, donc ne s'annule en un temps $t_1 > 0$ que si elle est nulle entre les temps $t_0 = 0$ et t_1, ce qui n'est possible que si J est nul. □

Montrons maintenant le théorème de Cartan-Hadamard 3.40. Par complétude, $\exp_x$ est bien définie sur tout T_xM. Nous avons vu par le corollaire 2.48 que si (M, g) n'a pas de point conjugué, ce qui est le cas par l'assertion (b) du lemme précédent, alors $\exp_x$ est un C^∞-difféomorphisme local en tout point de T_xM.

Munissons la variété T_xM du $(2,0)$-tenseur symétrique $(\exp_x)^* g \in \Gamma(S^2T^*(T_xM))$, qui est défini positif en tout point, car $T_v \exp_x$ est inversible pour tout $v \in T_xM$. Alors $(\exp_x)^* g$ est l'unique métrique riemannienne sur T_xM telle que $\exp_x$ soit une isométrie locale. Elle est complète car ses géodésiques passant par 0, qui sont les droites vectorielles paramétrées de manière affine, sont définies sur $\mathbb{R}$. Le résultat découle alors de la proposition 3.25 (1). □

Il découle du théorème 3.40 qu'une variété riemannienne M connexe, complète, à courbure sectionnelle négative ou nulle, est un $K(\pi, 1)$ [15] : tout revêtement universel de M est contractile.

Ceci est un premier aperçu de l'influence de la géométrie d'une variété sur sa topologie. Le théorème 3.40 permet en particulier de montrer l'inexistence de métrique riemannienne

15. Un espace topologique est un $K(\pi, 1)$ s'il a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe (voir par exemple [Pau3]) connexe, dont le revêtement universel est contractile.

à courbure sectionnelle négative ou nulle sur les variétés riemanniennes dont le revêtement universel n'est pas contractile. Nous citons l'exemple frappant suivant.

Corollaire 3.42 *Si $n \geq 2$, la sphère $\mathbb{S}_n$ n'admet pas de métrique riemannienne à courbure sectionnelle négative ou nulle.*

Démonstration. Si $n \geq 2$, alors $\mathbb{S}_n$ est simplement connexe, mais n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (par exemple parce qu'elle est compacte). □

Nous reviendrons plus longuement sur la géométrie des variétés à courbure sectionnelle négative ou nulle ultérieurement (voir les parties 3.6.7 et 3.7). Nous concluons cette partie 3.6.5 en présentant quelques aspects de la courbure sectionnelle positive. Si a, b sont deux $(2,0)$-tenseurs sur une variété M, nous noterons $a \geq b$ si, pour tous les $v \in TM$, nous avons $a(v,v) \geq b(v,v)$.

Théorème 3.43 (Théorème de Myers) *Soient $r > 0$ et (M, g) une variété riemannienne connexe complète de dimension n, dont le $(2,0)$-tenseur de Ricci vérifie*

$$\mathrm{Ric} \geq \frac{n-1}{r^2}\, g \ .$$

Alors le diamètre de M vérifie

$$\mathrm{diam}(M, g) \leq \pi r \ .$$

En particulier, la variété M et tout revêtement de M sont compacts, et tout groupe fondamental de M est fini.

Remarquons que si la courbure sectionnelle d'une variété riemannienne est minorée par $\kappa = \frac{1}{r^2} > 0$, alors l'hypothèse $\mathrm{Ric} \geq \frac{n-1}{r^2} g$ de ce théorème est vérifiée (par le calcul effectué pour établir la formule (· 48 ·)).

Ce résultat est une seconde indication de l'influence de la géométrie d'une variété sur sa topologie. Il fournit un critère d'inexistence de métrique riemannienne à courbure sectionnelle minorée par une constante strictement positive, avec pour exemple frappant le suivant.

Corollaire 3.44 *Si $n \geq 2$, le tore $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ n'admet pas de métrique riemannienne à courbure sectionnelle minorée par une constante strictement positive.*

Démonstration. Si $n \geq 1$, alors $\mathbb{R}^n$ n'est pas compacte, et la projection canonique $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ est un revêtement (universel). □

La sphère $S_{\mathbb{E}^{n+1}}(0, r)$ dans l'espace euclidien standard $\mathbb{E}^{n+1}$ de centre 0 et de rayon $r > 0$ (munie de la métrique riemannienne induite), de courbure sectionnelle constante $\kappa = \frac{1}{r^2}$, est compacte, de diamètre πr. En particulier, le théorème de Myers est optimal.

Un théorème de S. Y. Cheng (voir par exemple [Pet, page 248]) dit qu'une telle majoration du diamètre n'est une égalité que pour les sphères : si $r > 0$, si (M, g) est une variété riemannienne connexe complète de dimension n, telle que

$$\mathrm{Ric} \geq \frac{n-1}{r^2}\, g \ \text{ et } \ \mathrm{diam}(M, g) = \pi r \ ,$$

alors M est isométrique à $S_{\mathbb{E}^{n+1}}(0, r)$.

Démonstration du théorème de Myers 3.43. L'idée principale est un argument de comparaison avec les champs de Jacobi en courbure constante $\kappa = \frac{1}{r^2}$, en étudiant la dérivée seconde de l'énergie.

Soient x et y deux points distincts de M et $\ell = d(x,y)$. Notons $c : [0,\ell] \to M$ une géodésique minimisante (paramétrée par longueur d'arc) entre x et y, qui existe par complétude. Soit $t \mapsto (E_i(t))_{1\leq i\leq n}$ un champ de bases orthonormées parallèle le long de c, tel que $E_1(t) = \dot c(t)$ (qui existe car le fibré vectoriel c^*TM est trivialisable). Notons $X_i : t \mapsto X_i(t) = \sin\frac{\pi t}{\ell}\, E_i(t)$, qui s'annule en $t = 0$ et $t = \ell$. Notons $f_i = [0,\ell]\times\mathbb{R} \to M$ l'application définie par $(t,s) \mapsto \exp_{c(t)}\big(sX_i(t)\big)$, qui est une variation de c, et $c_{i,\,s} : t \mapsto f_i(t,s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Puisque c minimise l'énergie, nous avons $\frac{d^2}{ds^2}_{|s=0} E(c_{i,\,s}) \geq 0$.

Notons $N = [0,\ell]\times\mathbb{R}$ et $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}$ les champs de vecteurs constants de coordonnées de N. Reprenons les notations de la proposition 2.42, pour $1 \leq i \leq n$: pour $X \in \Gamma(TN)$, notons $\overline{X} \in \Gamma(f_i^*TM)$ la section lisse du fibré image réciproque f_i^*TM définie par $\overline{X}(x) = T_x f_i(X(x))$; notons $\overline{\nabla}$ la connexion image réciproque ${f_i}^*\nabla$ sur f_i^*TM ; notons $\overline{g} \in \Gamma(S^2 f_i^*T^*M)$ définie par $\overline{g}_x = g_{f_i(x)}$ et $\overline{R} \in \Gamma((f_i^*T^*M)^{\otimes 3} \otimes f_i^*TM)$ définie par $\overline{R}_x = R_{f_i(x)}$ pour tout $x \in N$. Nous avons $\overline{\frac{\partial}{\partial t}}(t,0) = \dot c(t)$ et $\overline{\frac{\partial}{\partial s}}(t,0) = X_i(t)$.

Par la proposition 2.42 (1) et le lemme de Schwarz, nous avons

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}} + \overline{\big[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\big]} = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}}\ .$$

En utilisant la proposition 2.42 (4) pour la seconde égalité, nous avons donc

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}} &= \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}} = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}} + \overline{\nabla}_{[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}]} \overline{\frac{\partial}{\partial s}} + \overline{R}(\overline{\frac{\partial}{\partial s}}, \overline{\frac{\partial}{\partial t}})\overline{\frac{\partial}{\partial s}} \\ &= \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}} + \overline{R}(\overline{\frac{\partial}{\partial s}}, \overline{\frac{\partial}{\partial t}})\overline{\frac{\partial}{\partial s}}\ .\end{aligned}$$

D'où, puisque la métrique riemannienne g est parallèle pour sa connexion de Levi-Civita ∇ (en appliquant deux fois la proposition 2.42 (2) pour obtenir la première égalité), et puisque $\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}}(t,0) = \nabla_{\frac{d}{dt}} \dot c\,(t) = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}_{|s=0} \overline{g}(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial t}}) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial t}})(t,0) + \overline{g}(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial t}})(t,0) \\ &= \overline{g}\big(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}} + \overline{R}(\overline{\frac{\partial}{\partial s}}, \overline{\frac{\partial}{\partial t}})\overline{\frac{\partial}{\partial s}}, \overline{\frac{\partial}{\partial t}}\big)(t,0) + \overline{g}(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}}, \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}})(t,0) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\overline{g}(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \overline{\frac{\partial}{\partial s}}, \overline{\frac{\partial}{\partial t}})(t,0) - R(X_i(t), \dot c(t), \dot c(t), X_i(t)) + \|\nabla_{\frac{d}{dt}} X_i(t)\|^2\ .\end{aligned}$$

Puisque $\overline{\frac{\partial}{\partial s}}(0,s) = \overline{\frac{\partial}{\partial s}}(\ell,s) = 0$, et puisque $X_i(t) = \sin\frac{\pi t}{\ell}\, E_i(t)$ avec E_i parallèle le long de c, donc $\nabla_{\frac{d}{dt}} X_i(t) = \frac{\pi}{\ell}\cos\frac{\pi t}{\ell}\, E_i(t)$, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{ds^2}_{|s=0} E(c_{i,\,s}) &= \frac{d^2}{ds^2}_{|s=0} \frac{1}{2}\int_0^\ell g(\dot c_{i,\,s}(t), \dot c_{i,\,s}(t))\ dt = \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial s^2}_{|s=0} \overline{g}(\overline{\frac{\partial}{\partial t}}, \overline{\frac{\partial}{\partial t}})\ dt \\ &= \int_0^\ell \|\nabla_{\frac{d}{dt}} X_i(t)\|^2 - R(X_i(t), \dot c(t), \dot c(t), X_i(t))\ dt \\ &= \int_0^\ell \frac{\pi^2}{\ell^2}(\cos\frac{\pi t}{\ell})^2 - (\sin\frac{\pi t}{\ell})^2 R(E_i(t), \dot c(t), \dot c(t), E_i(t))\ dt\ .\end{aligned}$$

En sommant sur $2 \leq i \leq n$, nous avons donc, puisque $\|\dot{c}(t)\|^2 = 1$, et par l'hypothèse sur la courbure de Ricci,

$$0 \leq \sum_{i=2}^{n} \frac{d^2}{ds^2}_{|s=0} E(c_{i,s}) \leq \int_0^\ell (n-1)\frac{\pi^2}{\ell^2}\cos^2\frac{\pi t}{\ell} - \sin^2\frac{\pi t}{\ell}\,\mathrm{Ric}(\dot{c}(t),\dot{c}(t))\,dt$$
$$\leq (n-1)\int_0^\ell \frac{\pi^2}{\ell^2}\cos^2\frac{\pi t}{\ell} - \frac{1}{r^2}\sin^2\frac{\pi t}{\ell}\,dt\,.$$

Un calcul élémentaire montre que le dernier terme de cette suite d'inégalités est égal à $\frac{\ell(n-1)}{2}\left(\frac{\pi^2}{\ell^2} - \frac{1}{r^2}\right)$. Ceci implique que $\ell \leq \pi r$, donc que le diamètre de (M,g) est au plus πr. Puisque la variété M est complète, elle est propre par le théorème de Hopf-Rinow 3.24. Or elle est égale à la boule de rayon πr et de centre n'importe lequel de ses points, par ce qui précède, donc elle est compacte. [L'argument du théorème de Hopf-Rinow, qui montre que toute variété riemannienne connexe complète de diamètre fini est compacte, est le suivant : tout point de M est joint par une géodésique (minimisante) de longueur au plus $\mathrm{diam}(M)$ à un point donné x de M. Donc $M = \exp_x(\overline{B}_{T_xM}(0,\mathrm{diam}(M)))$ est compacte.]

Le revêtement riemannien universel de M est encore complet et vérifie la même propriété sur la courbure de Ricci. Il est donc compact. Son groupe de revêtement, qui agit proprement sur un espace compact, est donc fini. □

La démonstration ci-dessus montre aussi le résultat suivant, appelé la *formule de la variation seconde*.

Théorème 3.45 (Théorème de la variation seconde) *Soient (M,g) une variété riemannienne et $c : [a,b] \to M$ une géodésique paramétrée par longueur d'arc. Soient $f : [a,b] \times]-\epsilon,\epsilon[\to M$, où $\epsilon > 0$, une variation de c préservant ses extrémités ($f(a,s) = c(a)$ et $f(b,s) = c(b)$ pour tout $s \in]-\epsilon,\epsilon[$), et $J : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ le vecteur variation de f le long de c. Alors, en notant $c_s : t \mapsto f(t,s)$,*

$$\frac{d^2}{ds^2}_{|s=0} E(c_s) = \int_a^b \left(\|\nabla_{\frac{d}{dt}} J(t)\|^2 - R(J(t),\dot{c}(t),\dot{c}(t),J(t))\right)dt\,. \quad \square$$

Voici une conséquence du théorème de Myers 3.43.

Corollaire 3.46 *Soit G un groupe de Lie réel connexe de centre discret. Si G admet une métrique riemannienne bi-invariante, alors G est compact et ses groupes fondamentaux sont finis.*

Démonstration. Toute métrique riemannienne invariante à gauche g sur G est complète (voir par exemple l'exercice E.47). La formule de la courbure sectionnelle d'une telle métrique riemannienne, donnée dans la proposition 3.27, dit que si X, Y sont des éléments de l'algèbre de Lie de G, alors $R(X,Y,Y,X) = \frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2$. Ce corollaire découle alors du fait que si le centre de G est discret, alors le centre de son algèbre de Lie est trivial (voir par exemple l'exercice E.12 dans la partie 1.4.4), et donc la courbure de Ricci de G est minorée par un multiple strictement positif de g. □

Une hypothèse de minoration de la courbure de Ricci (quel que soit son signe) fournit une majoration sur le volume des boules. Nous renvoyons par exemple à [Pet, §9.1.3] pour une démonstration du résultat suivant. Rappelons (voir le théorème 3.38) que pour tous

les $\kappa \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, nous notons $\mathscr{M}_{\kappa,n}$ une variété riemannienne connexe complète, simplement connexe, de dimension $n \geq 2$, à courbure sectionnelle constante κ (unique à isométrie près). Comme $\mathscr{M}_{\kappa,n}$ est homogène, le volume d'une boule de rayon donné ne dépend pas de son centre.

Théorème 3.47 (Théorème de Bishop-Cheeger-Gromov) *Soient $\kappa \in \mathbb{R}$ et (M,g) une variété riemannienne complète de dimension $n \geq 2$, dont le $(2,0)$-tenseur de Ricci vérifie*

$$\mathrm{Ric} \geq (n-1)\kappa\, g\ .$$

Alors pour tous les $x \in M$ et $r > 0$, si $v_{n,\kappa,r}$ est le volume d'une boule de rayon r dans $\mathscr{M}_{\kappa,n}$, alors

$$\mathrm{vol}(B_M(x,r)) \leq v_{n,\kappa,r}\ . \ \square$$

En posant $\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$ le volume riemannien de la sphère standard $(\mathbb{S}_n, ds^2_{\mathrm{sph}})$, et en utilisant les expressions des métriques riemanniennes en cartes exponentielles données après l'énoncé du lemme de Gauss 3.15, nous avons

$$v_{n,\kappa,r} = \begin{cases} \dfrac{\omega_n}{(-\kappa)^{\frac{n-1}{2}}} \displaystyle\int_0^r \sinh^{n-1}(\sqrt{-\kappa}\, t)\, dt & \text{si } \kappa < 0, \\ \omega_n \dfrac{r^n}{n} & \text{si } \kappa = 0, \\ \dfrac{\omega_n}{\kappa^{\frac{n-1}{2}}} \displaystyle\int_0^r \sin^{n-1}(\sqrt{\kappa}\, t)\, dt & \text{si } \kappa > 0 \ \text{ et } \ r \leq \pi\ . \end{cases}$$

3.6.6 Seconde forme fondamentale des sous-variétés riemanniennes

Soient (M,g) et $(N,\overline{g})$ deux variétés pseudo-riemanniennes et $i : N \to M$ une immersion isométrique. Notons ∇ et $\overline{\nabla}$ les connexions de Levi-Civita de (M,g) et $(N,\overline{g})$; R et $\overline{R}$ leurs tenseurs de courbure $(3,1)$; et K et $\overline{K}$ leurs courbures sectionnelles.

Dans toute cette partie, pour éviter des lourdeurs de notations, il vaudrait mieux, comme dans la majorité des ouvrages sur le sujet et comme il faut en prendre l'habitude dans les calculs pratiques (et comme nous le ferons dans les démonstrations), travailler localement et considérer que i est l'inclusion, et identifier TN avec son image dans TM par Ti. Nous ne le ferons toutefois pas dans les énoncés des résultats, par souci de rigueur.

Notons $\pi_M : TM \to M$ et $\pi_N : TN \to N$ les projections des fibrés vectoriels tangents de M et N. Notons i^*TM le fibré vectoriel sur N image réciproque par i du fibré tangent de M, de projection $p : i^*TM \to N$.

L'application $Ti : v \mapsto Ti(v)$ de TN dans i^*TM est un morphisme injectif de fibrés vectoriels (au-dessus de l'identité) du fibré tangent de N dans le fibré vectoriel image réciproque i^*TM (il est usuel d'identifier TN avec son image par Ti, qui est un sous-fibré vectoriel de i^*TM).

$$\begin{array}{ccc} TN & \xrightarrow{Ti} & i^*TM \\ {\scriptstyle \pi_N} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle p} \\ & N & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} i^*TM & \xrightarrow{\Theta} & TN \\ {\scriptstyle p} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle \pi_N} \\ & N & \end{array}$$

Comme $\overline{g}$ est non dégénérée en tout point de N, et puisque i est isométrique, pour tout $n \in N$, la forme bilinéaire symétrique $g_{i(x)}$ est non dégénérée en restriction à $T_x i(T_x N)$, donc $T_x i(T_x N)$ et son orthogonal dans $T_{i(x)}(M)$ pour $g_{i(x)}$ sont supplémentaires dans $T_{i(x)}M$. L'application Θ de i^*TM dans TN qui à un vecteur $v \in (i^*TM)_x = T_{i(x)}M$ associe l'image réciproque par $T_x i$ de la projection orthogonale de v sur $T_x i(T_x N)$ est un morphisme surjectif de fibrés vectoriels (au-dessus de l'identité) du fibré vectoriel image réciproque i^*TM dans le fibré tangent de N.

Notons νN le sous-fibré vectoriel de i^*TM noyau de Θ, dont la projection $\nu N \to N$ est la restriction de p à νN, encore notée p. Ce fibré vectoriel est appelé le *fibré normal* de N dans M. La fibre $\nu_x N$ de $p : \nu N \to N$ au-dessus d'un point $x \in N$ est l'orthogonal dans $(i^*TM)_x = T_{i(x)}M$ de l'image par $T_x i$ de l'espace tangent à N en x :

$$\nu_x N = (T_x i(T_x N))^\perp \ .$$

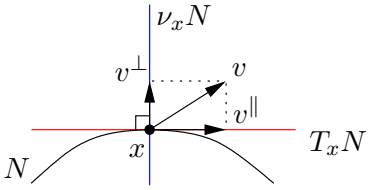
En particulier (voir la partie 2.2.2)

$$\nu N = \{v \in i^*TM \ : \ \forall\, w \in T_{p(v)}N, \ \ g(v, Ti(w)) = 0\}$$

est une sous-variété lisse de i^*TM, et $p : \nu N \to N$ est lisse.

Il est immédiat par construction que l'application de $TN \oplus \nu N$ dans i^*TM définie par $(v, w) \mapsto Ti(v) + w$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels sur N (au-dessus de l'identité), de la somme directe des fibrés tangent et normal à N à valeurs dans le fibré image réciproque i^*TM.

Dans l'exemple (ii) de la partie 3.2, nous avions noté $v \mapsto v^{\parallel}$ la projection orthogonale de i^*TM sur $Ti(TN)$ composée avec Ti^{-1}. Notons maintenant $v \mapsto v^{\perp}$ la projection orthogonale de i^*TM sur le fibré normal νN. L'application de i^*TM dans $TN \oplus \nu N$ définie par $v \mapsto v^{\parallel} + v^{\perp}$ est donc un isomorphisme de fibrés vectoriels sur N, inverse de $(v, w) \mapsto Ti(v) + w$.



Puisque νN est un sous-fibré vectoriel de i^*TM, le $\mathrm{C}^\infty(N)$-module $\Gamma(\nu N)$ est un sous-$\mathrm{C}^\infty(N)$-module de $\Gamma(i^*TM)$. Rappelons que si N est une sous-variété de M, alors TN est un sous-fibré vectoriel de i^*TM, et $\Gamma(TN)$ un sous-$\mathrm{C}^\infty(N)$-module de $\Gamma(i^*TM)$.

Par exemple, le fibré normal $\nu\mathbb{S}_n$ de la sphère unité $\mathbb{S}_n$ dans $\mathbb{E}^{n+1}$ est un fibré en droite sur $\mathbb{S}_n$ (la fibre au-dessus de $x \in \mathbb{S}_n$ étant la droite $\mathbb{R}x$). Ce fibré est par ailleurs trivialisable, car l'application $(x, \lambda) \mapsto (x, \lambda x)$ de $(\mathbb{S}_n \times \mathbb{R}) \to \nu\mathbb{S}_n$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels au-dessus de l'identité.

Notons que comme le fibré tangent à $\mathbb{R}^n$ est trivial, et puisqu'un fibré vectoriel image réciproque d'un fibré vectoriel trivialisable est trivialisable, pour toute sous-variété riemannienne N de $\mathbb{E}^n$, le fibré vectoriel somme directe $TN \oplus \nu N$ est trivialisable. En utilisant le théorème de plongement de Whitney, ceci redémontre le corollaire 2.23 dans le cas des fibrés tangents.

Définition 3.48 *La* seconde forme fondamentale *de i (ou de N par abus) est la section $II \in \Gamma((T^*N)^{\otimes 2} \otimes \nu N)$ telle que pour tous les champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TN)$ lisses sur N, nous ayons*

$$II(X, Y) = ((i^*\nabla)_X (i_* Y))^\perp \ ,$$

où la section $i_*Y \in \Gamma(i^*TM)$ est définie par $i_*Y(x) = T_x i(Y(x))$ pour tout $x \in N$.

*L'*opérateur de Weingarten *de i (ou de N par abus) est la section $S \in \Gamma((\nu N)^* \otimes \mathrm{End}(TN))$ telle que pour tous les $X, Y \in \Gamma(TN)$ et $V \in \Gamma(\nu N)$, en tout point de N, nous ayons*

$$\overline{g}(S_V X, Y) = -\, i^* g(V, II(X,Y))\ .$$

où i^*g est la métrique pseudo-euclidienne sur le fibré vectoriel i^*TM définie par $(i^*g)_x = g_{i(x)}$ pour tout $x \in N$.

La connexion normale *de i (ou de N par abus) est la connexion $\nabla^\nu : \Gamma(TN) \times \Gamma(\nu N) \to \Gamma(\nu N)$ sur le fibré vectoriel νN définie par la formule suivante : pour tous les $X \in \Gamma(TN)$ et $V \in \Gamma(\nu N) \subset \Gamma(i^*TM)$,*

$$\nabla^\nu{}_X V = ((i^*\nabla)_X V)^\perp\ .$$

Notons bien que pour tous les $X, Y \in \Gamma(TN)$ et $V \in \Gamma(\nu N)$, nous avons

$$II(X,Y) \in \Gamma(\nu N) \quad \text{et} \quad S_V X \in \Gamma(TN)\ .$$

Le fait que la seconde forme fondamentale II soit une section du bon type découle du lemme de tensorialité, car pour montrer la $\mathrm{C}^\infty(N)$-linéarité en Y de $II(X,Y)$, il suffit de voir que le terme proportionnel à i_*Y s'annule par projection sur le fibré normal. De même, l'application $(V, X, Y) \mapsto i^*g(V, II(X,Y))$ est $\mathrm{C}^\infty(N)$-trilinéaire sur $\Gamma(\nu N) \times \Gamma(TN) \times \Gamma(TN)$, et l'application $Z \mapsto \{Y \mapsto \overline{g}(Z,Y)\}$ un isomorphisme de $\mathrm{C}^\infty(N)$-modules de $\Gamma(TN)$ dans son dual, donc l'opérateur de Weingarten S (appelé aussi « *shape operator* » en anglais) est bien défini. Il est parfois noté B au lieu de S et son signe varie suivant les références (notre convention est l'opposée de celle de [Spi], par exemple).

Il est immédiat de vérifier que ∇^ν est bien une connexion sur le fibré vectoriel normal νN. Nous noterons R^ν le tenseur de courbure de la connexion ∇^ν.

Remarque. Supposons que N soit une sous-variété de M et que $i : x \mapsto x$ soit l'inclusion de N dans M (nous pouvons toujours nous ramener localement à cette situation).

(1) Deux champs de vecteurs X et Y lisses tangents à N s'étendent en des champs de vecteurs lisses encore notés X et Y sur M. Nous avons, en tout point de N,

$$II(X,Y) = (\nabla_X Y)^\perp \tag{$\cdot 57 \cdot$}$$

où $v \mapsto v^\perp$ est la projection orthogonale de T_xM sur $(T_xN)^\perp$ pour tout $x \in N$.

(2) Tout champ de vecteurs V lisse normal à N s'étend en un champ de vecteurs lisse encore noté V sur M. Nous montrerons (voir la démonstration du point (iii) ci-dessous) que, en tout point de N,

$$S_V X = (\nabla_X V)^\parallel\ , \tag{$\cdot 58 \cdot$}$$

où $v \mapsto v^\parallel$ est la projection orthogonale de T_xM sur T_xN pour tout $x \in N$.

(3) En étendant en un champ de vecteurs lisse sur M tout champ de vecteur tangent ou normal à N, nous avons, pour tout $X \in \Gamma(TN)$ et $V \in \Gamma(\nu N)$, en tout point de N,

$$\nabla^\nu_X V = (\nabla_X V)^\perp\ . \tag{$\cdot 59 \cdot$}$$

Donnons maintenant la liste des équations dites « fondamentales » de la géométrie différentielle des sous-variétés riemanniennes.

Théorème 3.49 (Équations fondamentales des sous-variétés) *Considérons deux variétés pseudo-riemanniennes (M, g) et $(N, \overline{g})$, et une immersion isométrique $i : N \to M$.*

(i) La seconde forme fondamentale est symétrique : pour tous les $X, Y \in \Gamma(TN)$, nous avons

$$II(X, Y) = II(Y, X) \ .$$

Pour tout $V \in \Gamma(\nu N)$, l'opérateur de Weingarten en V est symétrique pour la métrique riemannienne de N : pour tous les $X, Y \in \Gamma(TN)$, nous avons

$$\overline{g}(S_V X, Y) = \overline{g}(X, S_V Y) \ .$$

(ii) **(Formule de Gauss)** *Pour tous les $X, Y \in \Gamma(TN)$, nous avons*

$$(i^*\nabla)_X(i_*Y) = i_*(\overline{\nabla}_X Y) + II(X, Y) \ .$$

(iii) **(Formule de Weingarten)** *Pour tous les $X \in \Gamma(TN)$ et $V \in \Gamma(\nu N)$, nous avons*

$$(i^*\nabla)_X V = i_*(S_V X) + \nabla^\nu{}_X V \ .$$

(iv) **(Équation de Gauss)** *Pour tous les $X, Y \in \Gamma(TN)$, nous avons*

$$\begin{aligned}&\overline{R}(X, Y, Y, X) = \\ &i^*R\left(i_*X, i_*Y, i_*Y, i_*X\right) - i^*g\left(II(X, Y), II(X, Y)\right) + i^*g\left(II(X, X), II(Y, Y)\right) \ .\end{aligned}$$

(v) **(Équation de Codazzi-Mainardi)** *Pour tous les $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$ et $V \in \Gamma(\nu N)$, nous avons*

$$i^*g\left(i^*R\left(i_*X, i_*Y\right)i_*Z), V\right) = i^*g\left((\nabla^\nu{}_X II)(Y, Z), V\right) - i^*g\left((\nabla^\nu{}_Y II)(X, Z), V\right) \ ,$$

où $\nabla^\nu{}_X II$ est la dérivée covariante en X de la 2-forme symétrique II sur le fibré tangent à N muni de la connexion $\overline{\nabla}$ à valeurs dans le fibré normal de N muni de la connexion ∇^ν.

(vi) **(Équation de Ricci)** *Pour tous les $X, Y \in \Gamma(TN)$ et $V, W \in \Gamma(\nu N)$, nous avons*

$$i^*g\big(i^*R(i_*X, i_*Y)V, W\big) = i^*g\big(R^\nu(X, Y)V, W\big) + \overline{g}(S_V X, S_W Y) - \overline{g}(S_W X, S_V Y) \ .$$

Lorsque N est une sous-variété de M et i l'inclusion, en étendant arbitrairement en un champ de vecteurs lisse sur M tout champ de vecteur tangent ou normal à N, les formules ci-dessus sont valables, en tout point de N, sans les termes i^* et i_*. Remarquons que l'équation de Codazzi-Mainardi donne alors la composante normale de la courbure : pour tous les $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$, nous avons, en tout point de N,

$$\big(R(X, Y)Z\big)^\perp = (\nabla^\nu{}_X II)(Y, Z) - (\nabla^\nu{}_Y II)(X, Z) \ . \qquad (\cdot 60 \cdot)$$

Et l'équation de Ricci s'écrit (voir la démonstration du point (vi) ci-dessous), pour tous les $X, Y \in \Gamma(TN)$ et $V \in \Gamma(\nu N)$, en tout point de N,

$$\big(R(X, Y)V\big)^\perp = R^\nu(X, Y)V - II(S_V X, Y) + II(X, S_V Y) \ . \qquad (\cdot 61 \cdot)$$

Démonstration. Un lecteur curieux pourra comparer les démonstrations ci-dessous avec celles par exemple de [Spi, chap. 7.C].

Ces formules (des égalités entre applications définies sur N) étant ponctuelles, nous pouvons supposer que N est une sous-variété de M, que $i : N \to M$ est l'inclusion, et que les champs de vecteurs $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$ et $V, W \in \Gamma(\nu N)$ sont étendus en des champs de vecteurs lisses sur M, encore notés X, Y, Z, V, W.

(i) La seconde assertion de (i) découle de la première, par la définition de l'opérateur de Weingarten. La première assertion de (i) découle du fait que la connexion de Levi-Civita de M est sans torsion, et du fait que le crochet de deux champs de vecteurs tangents à N est encore tangent à N : en tout point de N, nous avons

$$II(X,Y) = (\nabla_X Y)^\perp = (\nabla_Y X + [X,Y])^\perp = (\nabla_Y X)^\perp = II(Y,X) \ .$$

(ii) Par l'isomorphisme $TN \oplus \nu N \to i^*TM$, ceci découle du calcul de la connexion de Levi-Civita de la sous-variété pseudo-riemannienne N dans la proposition 3.6 : en tout point de N, nous avons

$$\nabla_X Y = (\nabla_X Y)^\parallel + (\nabla_X Y)^\perp = \overline{\nabla}_X Y + II(X,Y) \ .$$

(iii) Puisque g est parallèle pour ∇, et puisque V et Y sont orthogonaux pour g en tout point de N, nous avons, en tout point de N,

$$g(\nabla_X V, Y) + g(V, \nabla_X Y) = X(g(V,Y)) = 0 \ .$$

D'où, puisque V est normal à N, par la définition de l'opérateur de Weingarten et puisque i est isométrique, nous avons, en tout point de N,

$$g(\nabla_X V, Y) = -g(V, \nabla_X Y) = -g(V, II(X,Y)) = \overline{g}(S_V X, Y) = g(S_V X, Y) \ .$$

Ceci, étant valable pour tout $Y \in \Gamma(TN)$, montre que $S_V X$ est égal en tout point de N à la partie tangentielle $(\nabla_X V)^\parallel$ de $\nabla_X V$ (ce qui démontre la remarque (2) ci-dessus). Donc, par la définition de la connexion ∇^ν, en tout point de N, nous avons

$$\nabla_X V = (\nabla_X V)^\parallel + (\nabla_X V)^\perp = S_V X + \nabla^\nu{}_X V \ .$$

(iv) Rappelons que la section $i^*R \in \Gamma((i^*T^*M)^{\otimes 4})$ est définie par $(i^*R)_x = R_{i(x)}$ (égalité en tant que formes quadrilinéaires sur $(i^*TM)_x = T_{i(x)}M$) pour tout $x \in N$. Par $\mathrm{C}^\infty(N)$-multilinéarité (et puisque sur un voisinage ouvert U suffisamment petit de chaque point, le $\mathrm{C}^\infty(U)$-module $\Gamma(TU)$ admet une base de champs de vecteurs qui commutent deux à deux), nous pouvons supposer que les champs de vecteurs X et Y commutent (en prenant pour X et Y des éléments de la base susdite). Nous pouvons aussi supposer que $II(Y,Y)$ et $II(X,Y)$ sont étendus en des champs de vecteurs lisses sur M, en gardant leur notation.

En tout point de N, en utilisant respectivement

- la définition du tenseur de courbure (4,0) de N en fonction du tenseur de courbure (3,1) pour la première égalité,
- la définition du tenseur de courbure (3,1) et l'annulation de $[X,Y]$ pour la deuxième égalité,
- les faits que i est isométrique et que X et Y sont tangents à N, la proposition 3.6 et (deux fois) la formule de Gauss (ii) pour la troisième égalité,

• la définition du tenseur de courbure (4,0) de M et (deux fois) la formule de Wiengarten (iii), sachant que X est tangent à N, pour la quatrième égalité,

• et la définition de l'opérateur de Weingarten pour la cinquième,

nous avons donc

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y,Y,X) &= \overline{g}(\overline{R}(X,Y)Y,X) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Y - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Y, X)\\ &= g(\nabla_X(\nabla_Y Y - II(Y,Y)) - \nabla_Y(\nabla_X Y - II(X,Y)), X)\\ &= R(X,Y,Y,X) - g(S_{II(Y,Y)}X,X) + g(S_{II(X,Y)}X,Y)\\ &= R(X,Y,Y,X) + g(II(Y,Y),II(X,X)) - g(II(X,Y),II(X,Y))\ .\end{aligned}$$

(v) Rappelons que, par la définition des connexions produit tensoriel (voir l'exemple (3) de la partie 2.3.2), pour tous les $X,Y,Z \in \Gamma(TN)$, comme $II \in \Gamma(T^*N \otimes T^*N \otimes \nu N)$ et puisque nous notons encore ∇^ν la connexion $\overline{\nabla}^* \otimes \overline{\nabla}^* \otimes \nabla^\nu$ sur le fibré vectoriel $T^*N \otimes T^*N \otimes \nu N$, nous avons

$$(\nabla^\nu{}_X II)(Y,Z) = \nabla^\nu{}_X(II(Y,Z)) - II(\overline{\nabla}_X Y, Z) - II(Y, \overline{\nabla}_X Z)\ .$$

Nous pouvons supposer comme ci-dessus que X et Y commutent.

En tout point de N, en utilisant

• cette formule (deux fois) pour la première égalité,

• le fait que $\overline{\nabla}$ est sans torsion et que X et Y commutent, et le fait que V est normal à N et la définition de la connexion ∇^ν pour la deuxième égalité,

• (quatre fois) la formule de Gauss pour la troisième égalité,

• la définition des tenseurs de courbure (3,1) et l'annulation de $[X,Y]$ pour la quatrième égalité,

• et le fait que $\overline{R}(X,Y)Z$ est tangent à N alors que V est normal à N pour la dernière égalité,

nous avons

$$\begin{aligned}&g((\nabla^\nu{}_X II)(Y,Z),V) - g((\nabla^\nu{}_Y II)(X,Z),V)\\ &= g(\nabla^\nu{}_X(II(Y,Z)) - II(\overline{\nabla}_X Y,Z) - II(Y,\overline{\nabla}_X Z),V)\\ &\quad - g(\nabla^\nu{}_Y(II(X,Z)) - II(\overline{\nabla}_Y X,Z) - II(X,\overline{\nabla}_Y Z),V)\\ &= g(\nabla_X(II(Y,Z)) - II(Y,\overline{\nabla}_X Z),V) - g(\nabla_Y(II(X,Z)) - II(X,\overline{\nabla}_Y Z),V)\\ &= g(\nabla_X(\nabla_Y Z - \overline{\nabla}_Y Z) - \nabla_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z, V)\\ &\quad - g(\nabla_Y(\nabla_X Z - \overline{\nabla}_X Z)) - \nabla_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z, V)\\ &= g(R(X,Y)Z - \overline{R}(X,Y)Z, V) = g(R(X,Y)Z,V)\ .\end{aligned}$$

(vi) Nous pouvons supposer comme ci-dessus que X et Y commutent. En tout point de N, en utilisant

• la définition du tenseur de courbure $(3,1)$ de la connexion ∇^ν et le fait que X et Y commutent pour la première égalité,

• le fait que W est normal à N et la définition de la connexion ∇^ν, ainsi que (deux fois) la formule de Weingarten pour la deuxième égalité,

• la définition du tenseur de courbure $(3,1)$ de la connexion ∇ et l'annulation de $[X,Y]$ pour la troisième égalité,

• le fait que g est parallèle pour ∇ et le fait que $S_V Y$ est tangent à N et W normal à N, donc $g(\nabla_X(S_V Y), W) + g(S_V Y, \nabla_X W) = X(g(S_V Y, W)) = 0$, et de même en permutant X et Y, pour la quatrième égalité,

• la formule de Weingarten (deux fois) et le fait que $S_V Y$ et $S_V X$ sont tangent à N pour la cinquième égalité,

• et en utilisant la définition de l'opérateur de Weingarten et le fait que i est isométrique pour la dernière égalité,

nous avons

$$\begin{aligned}
g(R^\nu(X,Y)V,W) &= g({\nabla^\nu}_X {\nabla^\nu}_Y V - {\nabla^\nu}_Y {\nabla^\nu}_X V, W) \\
&= g(\nabla_X(\nabla_Y V - S_V Y) - \nabla_Y(\nabla_X V - S_V X), W) \\
&= g(R(X,Y)V,W) - g(\nabla_X(S_V Y), W) + g(\nabla_Y(S_V X), W) \\
&= g(R(X,Y)V,W) + g(S_V Y, \nabla_X W) - g(S_V X, \nabla_Y W) \\
&= g(R(X,Y)V,W) + g(S_V Y, S_W X) - g(S_V X, S_W Y) \\
&= g(R(X,Y)V,W) - g(II(S_V Y, X), W) + g(II(S_V X, Y), W) \ .
\end{aligned}$$

La démonstration de l'équation de Ricci en découle, ainsi que sa reformulation suivant l'énoncé du théorème 3.49. □

Hypersurfaces riemanniennes.

Supposons que M est riemannienne dans cette sous-partie. Lorsque N est une hypersurface immergée de M, et lorsque le fibré normal de N (qui est un fibré en droites) est trivialisable (ce qui est toujours le cas localement), il existe une section lisse $\vec{n} : N \to \nu N$ de norme constante égale à 1, appelée une *normale unitaire*.

Nous appellerons *seconde forme fondamentale scalaire* de N le $(2,0)$-tenseur symétrique, encore noté $II \in \Gamma(S^2 T^* N)$, tel que, pour tous les $x \in N$ et $v, w \in T_x N$, nous ayons

$$II_x(v,w) = g_{i(x)}(II_x(v,w), \vec{n}(x)) \ .$$

Elle ne dépend qu'au signe près du choix d'une normale unitaire $\vec{n}$.

Lorsque N est une sous-variété riemannienne de M et i l'inclusion, en étendant $X, Y \in \Gamma(TN)$ et $\vec{n} \in \Gamma(\nu N)$ en $X, Y, \vec{n} \in \Gamma(TM)$, nous avons donc, en tout point de N,

$$II(X,Y) = \langle \nabla_X Y, \vec{n} \rangle \ . \qquad (\cdot 62 \cdot)$$

Pour tout $x \in N$, la forme bilinéaire II_x sur $T_x N$, qui est symétrique par l'assertion (i) du théorème 3.49, et l'opérateur de Weingarten $S_{\vec{n}}$ sur $T_x N$, qui est aussi symétrique par cette assertion, sont diagonalisables en base orthonormée de $T_x N$. Les valeurs propres de II_x et de $S_{\vec{n}}$ coïncident, par définition. Elles sont appelées les *courbures principales* de N en x (relativement au choix de la normale unitaire $\vec{n}$). Elles sont bien définies modulo permutations, et modulo changement simultané de signe si $\vec{n}$ est remplacé par $-\vec{n}$.

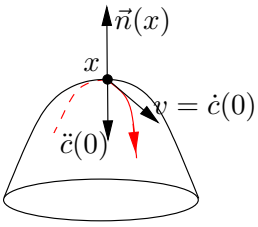
Pour tout $x \in N$, la *courbure de Gauss* de N en x est

$$\kappa(x) = \det II_x = \det S_{\vec{n}} \ ,$$

c'est-à-dire le produit des courbures principales de N en s (qui est indépendant du choix de $\vec{n}$ si N est de dimension paire). La *courbure de Gauss* de N est l'application $\kappa = \kappa^N : x \mapsto \kappa(x)$ de N dans $\mathbb{R}$.

Exemple. Supposons que $M = \mathbb{E}^3$ et que N soit une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$.

Pour toute courbe lisse $c :]-\epsilon, \epsilon[\to N$ tracée sur N, paramétrée par longueur d'arc, telle que $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$, le vecteur v est unitaire, et, puisque la connexion de Levi-Civita de $\mathbb{E}^3$ est la connexion triviale, nous avons



$$II_x(v, v) = \langle \ddot{c}(0), \vec{n}(x) \rangle \ .$$

Donc, lorsque l'accélération de c en $t = 0$ est colinéaire à la normale à la surface (par exemple lorsque c est géodésique, par l'exemple (i) de la partie 3.3), $II_x(v, v)$ est la courbure de la courbe gauche c au temps $t = 0$ (relativement au choix de la normale unitaire $\vec{n}$).

La courbure de Gauss de N en $x \in N$ (indépendante du choix de la normale unitaire $\vec{n}$) est le produit $\kappa(x) = \lambda_1 \lambda_2$ des courbures principales de N en x, c'est-à-dire des minimum et maximum des courbures en x des courbes lisses tracées sur N passant par x, paramétrées par longueur d'arc et d'accélérations normales à N en x.

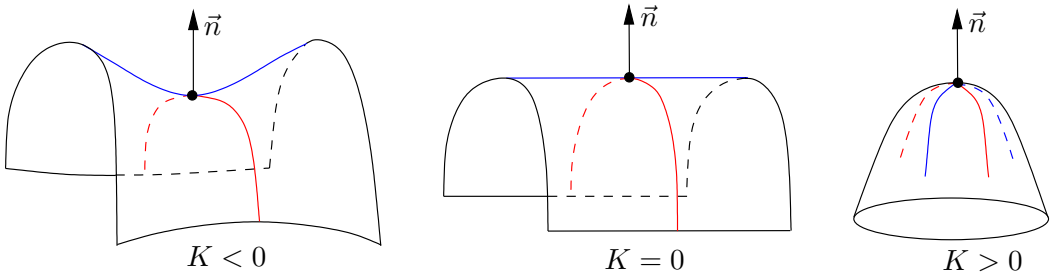
Proposition 3.50 *La courbure sectionnelle d'une surface plongée N dans $\mathbb{E}^3$, munie de la métrique riemannienne induite, est égale à sa courbure de Gauss.*

Démonstration. Par l'équation de Gauss (théorème 3.49 (iv)), pour tout $x \in N$, si (u, v) est une base orthonormée de T_xN dans laquelle la seconde forme fondamentale II_x est diagonale, nous avons

$$\overline{K}(T_xN) = \overline{R}(u, v, v, u) = \langle II_x(u, u), II_x(v, v) \rangle = \lambda_1 \lambda_2 \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = \kappa(x) \ . \square$$

Pour tout $x \in N$, si (u, v) est une base de T_xN pas forcément orthonormée, alors, toujours par l'équation de Gauss (théorème 3.49 (iv)) et en rappelant que I désigne la première forme fondamentale de N (voir l'exemple (iii) de la partie 3.1), nous avons

$$\kappa^N(x) = K^N(T_xN) = \frac{R^N(u, v, v, u)}{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2} = \frac{II_x(u, u) II_x(v, v) - II_x(u, v)^2}{I_x(u, u) I_x(v, v) - I_x(u, v)^2} \ . \qquad (\cdot 63 \cdot)$$



Par exemple, lorsque la surface N est *réglée*, c'est-à-dire si pour tout $x \in N$, il existe un segment de droite contenant x dans son intérieur et contenu dans N, alors la courbure de N est négative ou nulle. Elle est nulle si N est localement d'un seul côté de son plan tangent. La surface riemannienne N est alors *développable*, c'est-à-dire localement isométrique à $\mathbb{E}^2$. Par exemple, les hyperboloïdes à une nappe $\{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a\}$ où $a > 0$ sont des surfaces réglées, et même de deux manières différentes. Les constructeurs de tours de refroidissement utilisent cette propriété pour le ferraillage avant coulage de béton.

Étudions un peu plus la courbure des surfaces N immergées dans $\mathbb{E}^3$, munies de la métrique riemannienne induite. Notons $\| \ \|$ et $\langle \ , \ \rangle$ la norme et le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$. Le problème étant local, nous pouvons supposer que N est l'image d'un plongement $f : U \to \mathbb{R}^3$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, dont nous noterons (x, y) un élément générique, fournissant des coordonnées locales sur N. Nous reprenons les notations de l'exemple (iii) de la partie 3.1.

Rappelons que le produit vectoriel $\wedge$ dans l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ est défini par $\langle u \wedge v, w\rangle = \det(u, v, w)$, pour tous les $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, et que

$$\|u \wedge v\| = \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2} = \|u\| \, \|v\| \, |\sin \angle(u, v)\,|$$

est l'aire du parallélogramme de côtés u et v. Notons

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}}{\|\frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}\|} \ ,$$

qui est un champ de vecteurs unitaire normal à N. Remarquons que le dénominateur est exactement $\sqrt{EF - G^2}$, qui est la densité de la forme volume de N dans cette carte, et en particulier ne s'annule pas. Rappelons que $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ est une base du $\mathrm{C}^\infty(N)$-module $\Gamma(TN)$. Pour tous les $s, t \in \{x, y\}$, en tout point de N, le champ de vecteurs $\overline{\nabla}_{\frac{\partial f}{\partial s}} \frac{\partial f}{\partial t}$ est la projection orthogonale de $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}$ sur l'espace tangent à N au point considéré. Le champ de vecteurs normal $II(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})$ est la projection orthogonale de $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}$ sur l'espace normal à N au point considéré. Nous avons

$$g(\vec{n}, II(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})) = \langle \vec{n}, \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}\rangle = \frac{\det(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t})}{\sqrt{EF - G^2}} \ .$$

En développant, pour tous les $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, en tout point de N, l'expression

$$II\big(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}, a'\frac{\partial f}{\partial x} + b'\frac{\partial f}{\partial y}\big) = g\Big(II\big(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}, a'\frac{\partial f}{\partial x} + b'\frac{\partial f}{\partial y}\big), \vec{n}\Big) \ ,$$

nous obtenons que la seconde forme fondamentale scalaire associée à ce choix de normale unitaire $\vec{n}$ est

$$II_{f(x,\,y)} = \frac{\det\big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big)\, dx^2 + 2\det\big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big)\, dxdy + \det\big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big)\, dy^2}{\sqrt{EF - G^2}} \ .$$

Par la formule $(\cdot\, 63\, \cdot)$, la courbure de Gauss (donc sectionnelle) de N au point $f(x, y)$ est donc donnée par

$$\kappa(f(x, y)) = \overline{K}(T_{f(x,\,y)}N) = \frac{\det\big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big)\det\big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big) - \det\big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big)^2}{\big(\|\frac{\partial f}{\partial x}\|^2\|\frac{\partial f}{\partial y}\|^2 - \langle\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\,\rangle^2\big)^2} \ ,$$

une formule qui n'est pas à retenir !

Courbure moyenne, surfaces minimales et totalement géodésiques, ombilics.

Proposition 3.51 *Soient (M, g) et $(N, \overline{g})$ deux variétés pseudo-riemanniennes, $i : N \to M$ une immersion isométrique, et II la seconde forme fondamentale de i. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) la seconde forme fondamentale de i est nulle : $II = 0$;

(2) si $c : I \to N$ est une géodésique de N, alors $i \circ c$ est une géodésique de M ;

(3) pour tout x dans N, il existe un voisinage U de 0 dans $T_x i(T_x N)$ et un voisinage V de x dans N tels que $\exp_{i(x)}(U) = i(V)$;

(4) pour tout x dans N, pour tout voisinage ouvert V de x dans N en restriction auquel i est un plongement, pour tous les champs de vecteurs lisses X et Y de M tangents à $i(V)$ en tout point de $i(V)$, le champ de vecteurs $\nabla_X Y$ l'est aussi.

Nous dirons alors que l'immersion pseudo-riemannienne i, ou la sous-variété immergée N, est *totalement géodésique*. Notons qu'une sous-variété pseudo-riemannienne immergée connexe de dimension 1 est totalement géodésique si et seulement si c'est l'image d'une géodésique.

Démonstration. Ces propriétés étant locales, nous pouvons supposer que N est une sous-variété de M et que i est l'inclusion.

Les assertions (1) et (4) sont équivalentes par la définition de II (voir la formule ($\cdot 57 \cdot$)), car un vecteur tangent à M en un point de N est tangent à N si et seulement si sa composante normale à N est nulle.

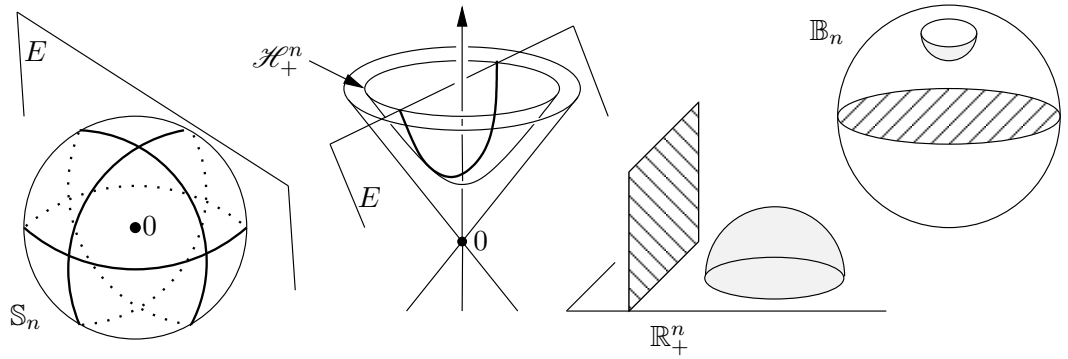
Les assertions (2) et (3) sont équivalentes, par la définition de l'exponentielle.

Les assertions (2) et (4) sont équivalentes, car la connexion de Levi-Civita de la sous-variété pseudo-riemannienne N est la projection sur les espaces tangents à N de la connexion de Levi-Civita de M (voir la proposition 3.6). □

Exemples. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(1) Tout sous-espace affine A de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace totalement géodésique complet de l'espace euclidien standard $\mathbb{E}^n$, ainsi que de l'espace pseudo-euclidien standard $\mathbb{R}^{p,q}$ si $p + q = n$ et la restriction de $g^{p,q}$ à A est non dégénérée. S'il est de codimension 1 dans $\mathbb{E}^n$, il sera appelé un *hyperplan* de $\mathbb{E}^n$.

(2) Pour tout sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^{n+1}$, l'intersection $E \cap \mathbb{S}_n$ est une sous-variété totalement géodésique (compacte donc complète) dans la sphère $\mathbb{S}_n$ (pour la métrique sphérique standard). Elle est isométrique à la sphère $\mathbb{S}_{d-1}$ si d est la dimension de E. Si $d = n - 1$, elle est appelée un *hyperplan* de $\mathbb{S}_n$ (voir le dessin de gauche ci-dessous).



(3) Pour tout sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^{1,n}$, l'intersection $E \cap \mathscr{H}^n_+$ est une sous-variété totalement géodésique complète du modèle du demi-hyperboloïde supérieur $\mathscr{H}^n_+$

de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ (voir le dessin ci-dessus). Si elle est non vide (c'est-à-dire si E rencontre le cône ouvert des $x \in \mathbb{R}^{1,n}$ tels que $g^{1,n}(x) < 0$), elle est isométrique à l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^{d-1}_{\mathbb{R}}$ si d est la dimension de E. Si $d = n$, elle est alors appelée un *hyperplan* (hyperbolique) de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$.

Par les isométries entre les modèles, dans le modèle du demi-espace supérieur $\mathbb{R}^n_+$ de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, les demi-espaces affines verticaux de dimension $n-1$ et les demi-sphères euclidiennes centrées en un point de l'hyperplan vectoriel horizontal $\mathbb{R}^{n-1}$ (voir le dessin ci-dessus) sont totalement géodésiques, complets, de codimension 1 et sont appelés les *hyperplans* (hyperboliques) de $\mathbb{R}^n_+$.

Toujours par les isométries entre les modèles, dans le modèle de la boule $\mathbb{B}_n$ de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, les intersections avec $\mathbb{B}_n$ des hyperplans vectoriels de $\mathbb{R}^n$ et des sphères euclidiennes rencontrant orthogonalement la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$ sont totalement géodésiques, complets, de codimension 1 et sont appelés les *hyperplans* (hyperboliques) de $\mathbb{B}_n$. Remarquons que les sphères euclidiennes de $\mathbb{R}^n$, qui rencontrent $\mathbb{S}_{n-1}$ et sont orthogonales à $\mathbb{S}_{n-1}$, sont exactement les sphères euclidiennes de $\mathbb{R}^n$ de rayon non nul centrées en un point de l'espace tangent en un point x de $\mathbb{S}_{n-1}$ et qui passent par x.

Un point x de N est un *ombilic* s'il existe un vecteur $\vec{n}$ normal à N en x tel que, pour tous les $u, v \in T_xN$,

$$II_x(u,v) = \overline{g}_x(u,v)\ \vec{n}\ .$$

L'immersion pseudo-riemannienne i, ou la sous-variété immergée N, est *totalement ombilique* si tout point de N est un ombilic.

Supposons dans la suite de cette sous-partie que (M, g) est riemannienne.

Le *vecteur courbure moyenne* de i (ou par abus de N) est le champ de vecteurs normal $H \in \Gamma(\nu N)$ à N défini par

$$H : x \mapsto \mathrm{tr}(II_x) = \sum_{i=1}^{n} II_x(v_i, v_i)\ .$$

où $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de T_xN. Il ne dépend pas du choix de cette base.

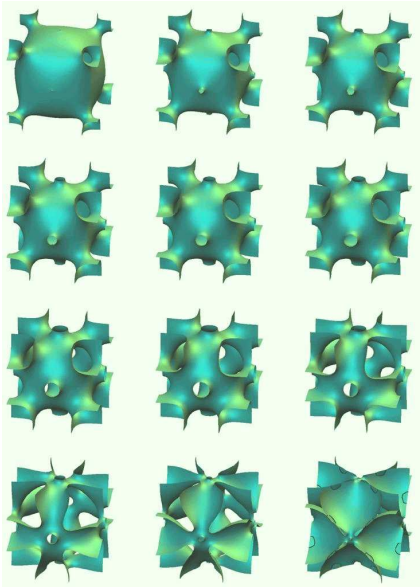
Par exemple, si N est une hypersurface immergée dans M, si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les courbures principales de N en un point $x \in N$, alors

$$H(x) = \big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\big)\ \vec{n}\ .$$

L'immersion riemannienne i (ou la sous-variété immergée N) est *à courbure moyenne constante* si le champ de vecteurs normal H est parallèle pour la connexion normale ∇^ν, c'est-à-dire si

$$\nabla^\nu H = 0 \ .$$

Par exemple, une sous-variété immergée minimale (au sens ci-dessous) est à courbure moyenne constante. D'autres exemples, dus à B. Oberknapp et K. Polthier [OP], sont dessinés ci-contre.

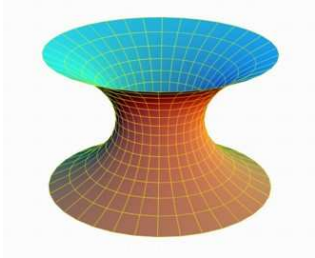


L'immersion riemannienne i (ou la sous-variété immergée N) est *minimale* si son vecteur courbure moyenne est nul, c'est-à-dire si

$$H = 0 \ .$$

Exemples.

(1) C'est un exercice (en calculant la seconde forme fondamentale des surfaces de révolution) de montrer que les seules surfaces de révolution connexes complètes de $\mathbb{E}^3$ qui sont minimales sont les plans vectoriels et les caténoïdes. Les caténoïdes dont l'axe de révolution est vertical sont les hypersurfaces riemanniennes de $\mathbb{E}^3$ d'équation $x^2 + y^2 = c^2 \cosh^2 \frac{z}{c}$ où $c > 0$ est un paramètre.



(2) Les bulles de savon s'appuyant sur des contours fermés sont des surfaces minimales, comme nous le démontrons ci-dessous.

Le résultat suivant implique que les sous-variétés minimales sont les points critiques de la fonctionnelle de volume.

Théorème 3.52 *Soit $(N, \overline{g})$ une sous-variété riemannienne d'une variété riemannienne (M, g), de vecteur courbure moyenne $H \in \Gamma(\nu N)$. Soient X un champ de vecteurs lisse à support dans un ouvert d'adhérence compacte V de M et $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot de X. Alors*

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \mathrm{vol}(\phi_t(N) \cap V) = -\int_{x\in N} g_x(H(x), X(x))\, d\,\mathrm{vol}_N(x) \ .$$

Démonstration. Notons que puisque V est d'adhérence compacte, le champ de vecteurs X est complet, donc son flot $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est bien défini sur $\mathbb{R}$, et est lisse.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, notons g_t la métrique riemannienne lisse sur N restriction de la métrique riemannienne $\phi_t^* g$, v_t son volume riemannien, $v = v_0$, et $\mathrm{Jac}_x(t) = \frac{dv_t}{dv}(x)$ la dérivée de Radon-Nykodim de v_t par rapport à v en un point x de N. Nous avons donc, par changement de variable, $\mathrm{vol}(\phi_t(N) \cap V) = \int_{N\cap V} dv_t = \int_{x\in N\cap V} \mathrm{Jac}_x(t)\, dv(x)$. D'où, par dérivation sous l'intégrale et puisque $\mathrm{Jac}_x(t)$ est constant égal à 1 si $x \notin V$,

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \mathrm{vol}(\phi_t(N) \cap V) = \int_{x\in N} \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} \mathrm{Jac}_x(t)\, dv(x) \ .$$

Montrons que, pour tout $x \in N$, nous avons $\frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} \mathrm{Jac}_x(t) = -g(H(x), X(x))$, ce qui conclut. Considérons une carte locale $(U, (x^1, \dots, x^n))$ de N au voisinage de x. Notons $(\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \partial_n = \frac{\partial}{\partial x_n})$ la base du $\mathrm{C}^\infty(U)$-module $\Gamma(TU)$ correspondante. Nous pouvons supposer que cette base est orthonormée au point x, et que $\partial_1, \dots, \partial_n$ s'étendent en des champs de vecteurs lisses sur M, notés de même. Alors, par la définition du volume riemannien, et puisque $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ est orthonormée en x, nous avons

$$\mathrm{Jac}_x(t) = \sqrt{\det\left(g_t(\partial_i, \partial_j)\right)_{i,j}} \ .$$

Toujours puisque $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ est orthonormée en x et puisque $d_{\mathrm{id}} \det = \mathrm{tr}$, nous avons donc

$$\frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} \mathrm{Jac}_x(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} g_t(\partial_i, \partial_i) \ .$$

Rappelons (voir la partie 2.3.1, et en particulier la proposition 2.31) que la dérivée de Lie $\mathscr{L}_X : \Gamma(T^r_s M) \to \Gamma(T^r_s M)$ des tenseurs (s, r) est l'application linéaire définie par

$$\mathscr{L}_X \sigma = \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi_t^* \sigma$$

pour tout (s, r)-tenseur σ sur M, que $\mathscr{L}_X f = X(f)$ pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, que $\mathscr{L}_X Y = [X, Y]$ pour tout $Y \in \Gamma(TM)$, et que

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_X g)(Y, Z) &= \mathscr{L}_X(g(Y, Z)) - g(\mathscr{L}_X Y, Z) - g(Y, \mathscr{L}_X Z) \\ &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) \ .\end{aligned}$$

Donc, par la définition de g_t, par la propriété ci-dessus de la dérivée de Lie, puisque g est parallèle pour ∇, puisque ∇ est sans torsion, nous avons, en tout point de U,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} g_t(\partial_i, \partial_i) &= (\mathscr{L}_X g)(\partial_i, \partial_i) = X(g(\partial_i, \partial_i)) - 2g([X, \partial_i], \partial_i) \\ &= 2g(\nabla_X \partial_i, \partial_i) - 2g([X, \partial_i], \partial_i) \\ &= 2g(\nabla_{\partial_i} X, \partial_i) \ .\end{aligned}$$

Quitte à restreindre U, nous pouvons écrire le champ de vecteurs X sur U comme la somme $X = X^\parallel + X^\perp$ de deux champs de vecteurs lisses à support dans U où $X^\parallel$ est tangent à N en tout point de N, et où $X^\perp$ est orthogonal à N en tout point de N. Puisque H est orthogonal à N et puisque le flot de $X^\parallel$ préserve $N \cap V$, donc ne change pas son volume

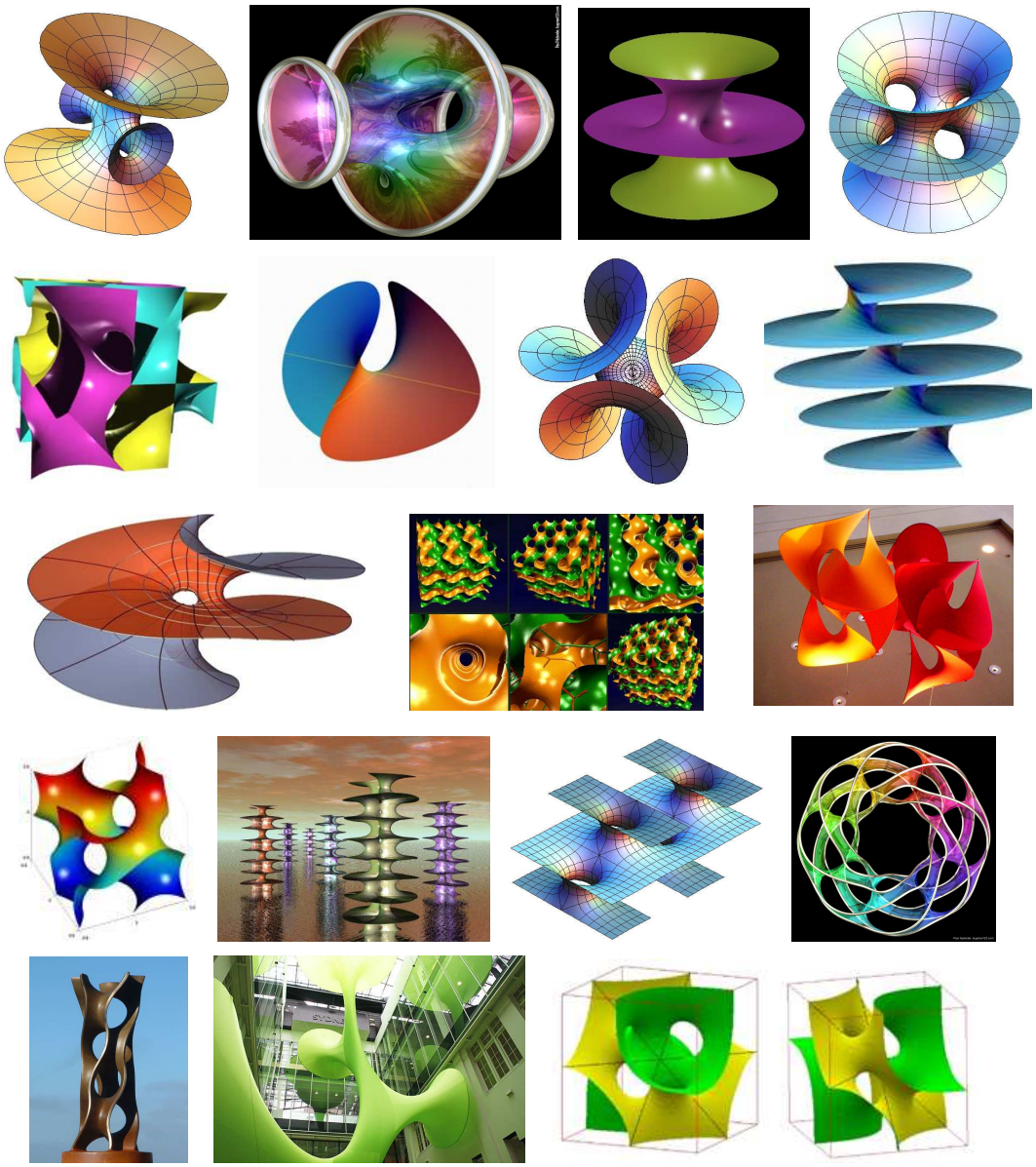
total, nous pouvons supposer que $X = X^{\perp}$ est orthogonal à N (donc à ∂_i) en tout point de N. Alors, toujours puisque g est parallèle pour ∇, en tout point de U,

$$g(\nabla_{\partial_i} X, \partial_i) + g(X, \nabla_{\partial_i} \partial_i) = \partial_i(g(X, \partial_i)) = 0 \ .$$

D'où

$$g(\nabla_{\partial_i} X, \partial_i) = -g(X, \nabla_{\partial_i} \partial_i) = -g(X, (\nabla_{\partial_i} \partial_i)^{\perp}) = -g(X, II(\partial_i, \partial_i)) \ .$$

Le résultat en découle, en sommant sur i et en divisant par 2. $\square$



Une sélection de surfaces minimales.

3.6.7 Espaces CAT(κ)

La référence recommandée pour cette partie est [BrH].

Soient (X, d) un espace métrique et κ un nombre réel. Notons $\mathscr{M}_\kappa$ une variété riemannienne complète, simplement connexe, de dimension 2, à courbure constante κ. Par la partie 3.6.4, nous pouvons supposer, à isométrie près, que

$$\mathscr{M}_\kappa = \mathscr{M}_{\kappa,2} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-\kappa}}\,\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}} & \text{si } \kappa < 0 \\ \mathbb{E}^2 & \text{si } \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\,\mathbb{S}_2 & \text{si } \kappa > 0\ . \end{cases}$$

Une *géodésique* (respectivement *géodésique locale*) de (X, d) (ou de X lorsque la distance d est sous-entendue) est une application isométrique (respectivement localement isométrique) $c : I \to X$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous dirons *segment géodésique*, *rayon géodésique*, *droite géodésique* de X si I est respectivement un intervalle compact, une demi-droite fermée (en général $[0, +\infty[$) ou $\mathbb{R}$ tout entier. Les *extrémités* d'un segment géodésique $c : [a, b] \to X$, où $a \leq b$, sont les points $c(a)$ (appelé *l'origine* de c) et $c(b)$.

Lorsque (X, d) est une variété riemannienne munie de sa distance riemannienne, il y a un conflit de terminologie : les géodésiques en ce sens sont exactement les géodésiques riemanniennes minimisantes paramétrées par longueur d'arc. Nous préciserons en disant géodésiques riemanniennes en cas de doute.

Un *triangle géodésique* Δ de (X, d) (ou de X lorsque la distance d est sous-entendue) est la donnée de trois points x, y, z de X, appelés ses *sommets*, et de trois segments géodésiques notés $[x, y], [y, z], [z, x]$, appelés ses *côtés*, d'extrémités respectivement x et y, y et z, z et x. Un *point* de Δ est un point d'un des côtés de Δ. Le *périmètre* de Δ est la somme des longueurs des côtés de Δ, c'est-à-dire $d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)$.

Lemme 3.53 *Pour tout triplet (x, y, z) dans X^3 tel que $d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ si $\kappa > 0$, il existe un triangle géodésique $\overline{\Delta}$ de sommets $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ dans $\mathscr{M}_\kappa$ tel que $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(x, y)$, $d(\overline{y}, \overline{z}) = d(y, z)$ et $d(\overline{z}, \overline{x}) = d(z, x)$, unique à isométrie près.*

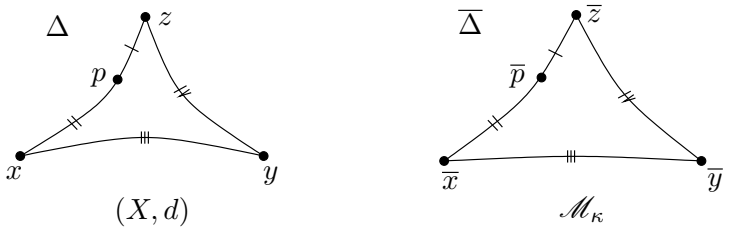
Démonstration. Notons $a = d(x, y)$, $b = d(y, z)$ et $c = d(z, x)$, nous pouvons supposer que $a \leq b \leq c$. Par l'inégalité triangulaire, nous avons $c \leq a+b$, et en particulier $a, b, c < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ si $\kappa > 0$. Il existe donc une unique solution $\gamma \in [0, \pi]$ à l'équation

$$\begin{array}{ll} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma & \text{si } \kappa = 0 \\ \cosh(\sqrt{-\kappa}\,c) = \cosh(\sqrt{-\kappa}\,a)\cosh(\sqrt{-\kappa}\,b) - \sinh(\sqrt{-\kappa}\,a)\sinh(\sqrt{-\kappa}\,b)\cos\gamma & \text{si } \kappa < 0 \\ \cos(\sqrt{\kappa}\,c) = \cos(\sqrt{\kappa}\,a)\cos(\sqrt{\kappa}\,b) + \sin(\sqrt{\kappa}\,a)\sin(\sqrt{\kappa}\,b)\cos\gamma & \text{si } \kappa > 0\ . \end{array}$$

Soit $\overline{x}$ n'importe quel point de $\mathscr{M}_\kappa$. Soient $\overline{y}$ et $\overline{z}$ deux points dans $\mathscr{M}_\kappa$ à distance a et b de $\overline{x}$ respectivement, tels que l'angle en $\overline{x}$ entre les segments $[\overline{x}, \overline{y}]$ et $[\overline{x}, \overline{z}]$ soit γ. Alors par les lois du cosinus dans $\mathscr{M}_\kappa$ (voir la partie 3.4.1 lorsque $\kappa = -1, 0, 1$ et utiliser le fait que $\sqrt{\kappa}\,\mathscr{M}_\kappa = \mathscr{M}_1$ si $\kappa > 0$ et $\sqrt{-\kappa}\,\mathscr{M}_\kappa = \mathscr{M}_{-1}$ si $\kappa < 0$), nous avons $d(\overline{y}, \overline{z}) = c$.

L'unicité est immédiate, par les propriétés de transitivité des isométries de $\mathscr{M}_\kappa$ sur les couples de vecteurs tangents unitaires en un point formant un angle donné. □

Si Δ est un triangle géodésique de sommets x, y, z, nous dirons alors que $\overline{\Delta}$ est un *triangle de comparaison* de Δ. Si p est un point du côté de Δ entre deux sommets u et v de Δ, l'unique point $\overline{p}$ du côté $[\overline{u}, \overline{v}]$ de $\overline{\Delta}$ tel que $d(\overline{p}, \overline{u}) = d(p, u)$ sera appelé le *point correspondant* de p.



Soient $c : [0,a] \to X$ et $c' : [0,a'] \to X$ deux géodésiques non constantes de même origine x, et $\alpha_t \in [0,\pi]$ l'angle d'un triangle de comparaison dans $\mathbb{E}^2$ du triplet $(x, c(t), c'(t))$ au sommet correspondant $\overline{x}$. Nous appellerons *angle de comparaison* (ou *angle d'Alexandrov*) en x entre c et c' l'élément de $[0,\pi]$ défini par

$$\angle_x(c,c') = \limsup_{t\to 0^+} \alpha_t \ .$$

Si $y = c(a)$ et $y' = c'(a')$ sont les autres extrémités de c et c', nous noterons $\angle_x(y,y')$ par abus (lorsque les segments géodésiques c et c' sont sous-entendus) cet angle de comparaison. Par exemple, si (X,d) est une variété riemannienne munie de sa distance riemannienne, alors la limite supérieure ci-dessus est une limite, et l'angle de comparaison est exactement l'angle riemannien entre les vecteurs. Dans la définition d'angle de comparaison, nous pouvons remplacer $\mathbb{E}^2$ par n'importe quel $M_{\kappa,n}$. Nous appellerons *angle de comparaison* (ou aussi *angle d'Alexandrov*) en un sommet x d'un triangle géodésique de X (dont les autres sommets sont différents de x) l'angle de comparaison entre ses côtés contenant x.

Nous dirons que (X,d) est *géodésique* si pour tous les x, y dans X, il existe un segment géodésique dans X d'extrémités x et y.

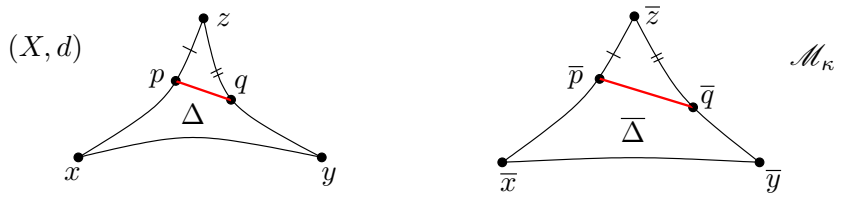
Par exemple, toute variété riemannienne connexe complète est géodésique, par le théorème de Hopf-Rinow 3.24. Tout espace métrique géodésique est connexe par arcs.

La définition suivante donne un nom aux espaces métriques dans lesquels les triangles géodésiques sont plus pincés que ceux de l'espace modèle à courbure sectionnelle constante κ, ou de manière équivalente, dont les angles aux sommets sont plus petits.

Définition 3.54 *Un espace métrique (X,d) est dit* $\mathrm{CAT}(\kappa)$ *s'il est géodésique et s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

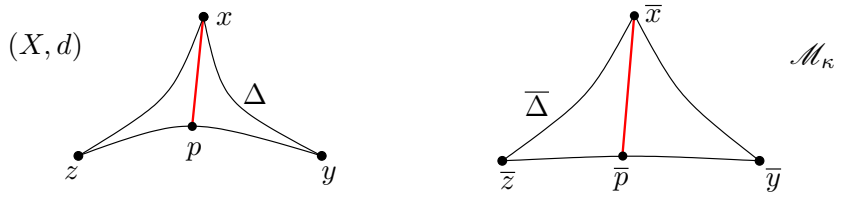
(i) pour tout triangle géodésique Δ, de périmètre strictement inférieur à $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ si $\kappa > 0$, pour tous les points p et q de Δ, les points correspondants $\overline{p}$ et $\overline{q}$ d'un triangle de comparaison $\overline{\Delta}$ dans $\mathscr{M}_\kappa$ vérifient

$$d(p,q) \le d(\overline{p},\overline{q}) \ ;$$



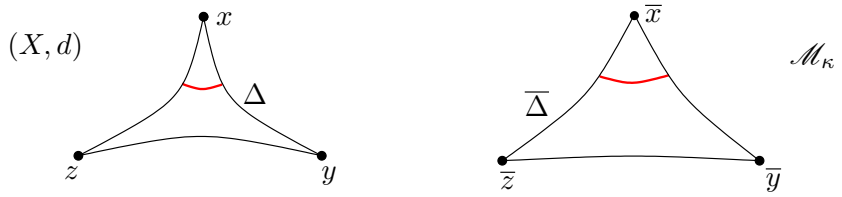
(ii) pour tout triangle géodésique Δ, de périmètre strictement inférieur à $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ si $\kappa > 0$, pour tout sommet x de Δ, pour tout point p de Δ, le point correspondant $\overline{p}$ d'un triangle de comparaison $\overline{\Delta}$ dans $\mathscr{M}_\kappa$ vérifie

$$d(p,x) \le d(\overline{p},\overline{x}) \ ;$$



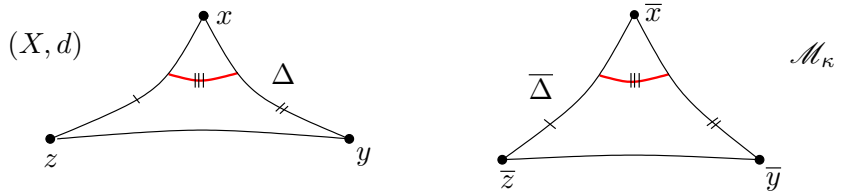
(iii) pour tout triangle géodésique Δ de sommets x, y, z tels que $y, z \neq x$, de périmètre strictement inférieur à $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ si $\kappa > 0$, l'angle de comparaison de Δ en x est inférieur ou égal à l'angle d'un triangle de comparaison $\overline{\Delta}$ dans $\mathscr{M}_\kappa$ au sommet correspondant $\overline{x}$:

$$\angle_x(y,z) \leq \angle_{\overline{x}}(\overline{y},\overline{z}) \ ;$$



(iv) pour tout triangle géodésique Δ de sommets x, y, z tels que $y, z \neq x$, de périmètre strictement inférieur à $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ si $\kappa > 0$, pour tout triangle géodésique $\overline{\Delta}$ dans $\mathscr{M}_\kappa$ de sommets $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ tels que $d(\overline{x},\overline{y}) = d(x,y)$, $d(\overline{x},\overline{z}) = d(x,z)$ et $\angle_x(y,z) = \angle_{\overline{x}}(\overline{y},\overline{z})$, nous avons

$$d(y,z) \geq d(\overline{y},\overline{z}) \ .$$



Démonstration. Il est immédiat que (iii) et (iv) sont équivalents.

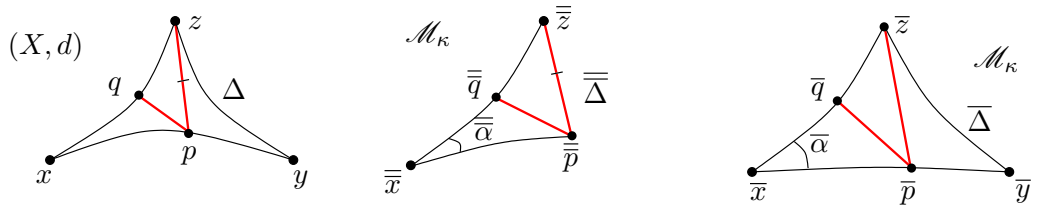
Montrons que (i) implique (iii). Soit Δ un triangle géodésique de sommets x, y, z tels que $y, z \neq x$, et, pour $t > 0$ assez petit, notons y_t, z_t les points des côtés $[x,y]$ et $[x,z]$ à distance t de x. Notons $\overline{\alpha} = \angle_{\overline{x}}(\overline{y},\overline{z})$ l'angle au sommet $\overline{x}$ correspondant à x d'un triangle de comparaison de Δ. Notons $\overline{\overline{\alpha}}_t$ l'angle au sommet $\overline{\overline{x}}$ correspondant à x d'un triangle de comparaison $\overline{\overline{\Delta}}$ du triangle géodésique de côtés $[x, y_t]$, $[y_t, z_t]$, $[z_t, x]$, et $\overline{\overline{y_t}}, \overline{\overline{z_t}}$ les sommets de $\overline{\overline{\Delta}}$ correspondants à y_t, z_t, respectivement. Par (i), nous avons

$$d(\overline{y_t},\overline{z_t}) \geq d(y_t,z_t) = d(\overline{\overline{y_t}},\overline{\overline{z_t}}) \ .$$

La loi du cosinus dans $\mathscr{M}_\kappa$ implique alors que $\overline{\overline{\alpha}}_t \leq \overline{\alpha}$. Par la définition de l'angle de comparaison (et le fait que la différentielle en 0 de l'application exponentielle en un point d'une variété riemannienne est l'identité), nous avons $\angle_x(y,z) = \lim_{t\to 0^+} \overline{\overline{\alpha}}_t \leq \overline{\alpha}$. Le résultat en découle.

Montrons que (ii) implique (i). Soient $\Delta, \overline{\Delta}, p, q, \overline{p}, \overline{q}$ comme dans l'énoncé de (i). Notons x, y, z les sommets de Δ tels que $p \in [x,y]$, $q \in [x,z]$, et $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ les sommets correspondants

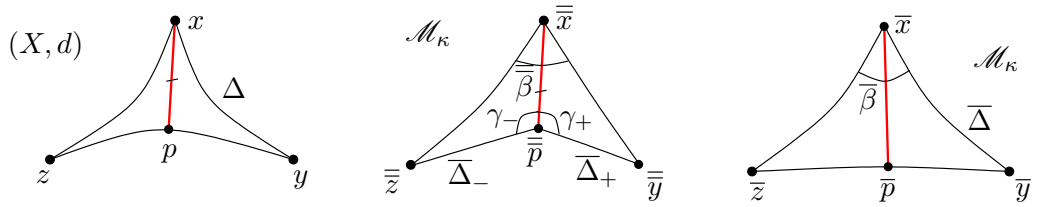
de $\overline{\Delta}$. Soit $[p,z]$ un segment géodésique entre p et z. Notons $\overline{\overline{\Delta}}$ un triangle de comparaison du triangle de cotés $[p,z]$, $[z,x]$ et le sous-segment de $[x,y]$ entre x et p, de sommets correspondants $\overline{\overline{p}}$, $\overline{\overline{z}}$, $\overline{\overline{x}}$. Notons $\overline{\overline{q}}$ le point de $\overline{\overline{\Delta}}$ correspondant à q.



Alors $d(p,q) \leq d(\overline{\overline{p}},\overline{\overline{q}})$ par (ii). Notons $\overline{\alpha}$ et $\overline{\overline{\alpha}}$ les angles en $\overline{x}$ et $\overline{\overline{x}}$ de $\overline{\Delta}$ et $\overline{\overline{\Delta}}$ respectivement. Comme $d(\overline{\overline{p}},\overline{\overline{z}}) = d(p,z) \leq d(\overline{p},\overline{z})$ par (ii) et par la loi du cosinus dans $\mathscr{M}_\kappa$, nous avons $\overline{\overline{\alpha}} \leq \overline{\alpha}$. Mais de nouveau par la loi du cosinus appliquée au triangle de sommets $\overline{x},\overline{p},\overline{q}$ et au triangle de sommets $\overline{\overline{x}},\overline{\overline{p}},\overline{\overline{q}}$, nous avons $d(\overline{\overline{p}},\overline{\overline{q}}) \leq d(\overline{p},\overline{q})$, ce qui conclut.

Montrons enfin que (iii) implique (ii), ce qui conclut.

Soient $\Delta, \overline{\Delta}, p, \overline{p}$ comme dans l'énoncé de (ii). Fixons un segment géodésique $[x,p]$ entre p et le sommet x de Δ opposé au côté contenant p. Notons y et z les autres sommets de Δ. Notons $\overline{y}$ et $\overline{z}$ les sommets de $\overline{\Delta}$ correspondants à y et z. Notons β l'angle de comparaison en x du triangle Δ et $\overline{\beta}$ l'angle au sommet correspondant $\overline{x}$ de $\overline{\Delta}$.



Soit $\overline{\Delta}_+$ un triangle de comparaison du triangle de côtés $[x,y]$, $[x,p]$ et le sous-segment de $[y,z]$ entre y et p. Soit $\overline{\Delta}_-$ celui obtenu en remplaçant y par z. Nous pouvons supposer que les côtés de $\overline{\Delta}_+$ et $\overline{\Delta}_-$ correspondants à $[x,p]$ coïncident, et que $\overline{\Delta}_-$ et $\overline{\Delta}_+$ soient de part et d'autre de $[x,p]$. Soient $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{p}}$, $\overline{\overline{y}}$, $\overline{\overline{z}}$ les sommets de $\overline{\Delta}_+$ ou $\overline{\Delta}_-$ correspondants à x,p,y,z. Soient γ_+, γ_- les angles en $\overline{\overline{p}}$ des triangles $\overline{\Delta}_+$ et $\overline{\Delta}_-$ respectivement, et soit $\overline{\overline{\beta}}$ l'angle en $\overline{\overline{x}}$ entre $\overline{\overline{y}}$ et $\overline{\overline{z}}$.

L'angle de comparaison en p du triangle aplati de sommets y,p,z est égal à π. Donc par (iii), nous avons $\gamma_+ + \gamma_- \geq \pi$. Il est facile de montrer que $\overline{\overline{\beta}} \leq \overline{\beta}$ (aplatir le côté géodésique par morceaux $[\overline{\overline{z}},\overline{\overline{p}}] \cup [\overline{\overline{p}},\overline{\overline{y}}]$ sans changer les quatre longueurs $d(\overline{\overline{z}},\overline{\overline{p}})$, $d(\overline{\overline{p}},\overline{\overline{y}})$, $d(\overline{\overline{z}},\overline{\overline{x}}), d(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}})$, en fixant $\overline{\overline{x}}$ et en déplaçant le point $\overline{\overline{p}}$ le long d'une géodésique passant par $\overline{\overline{x}}$ et $\overline{\overline{p}}$: cette opération augmente l'angle opposé à $\overline{\overline{p}}$, voir le dessin ci-dessus). Donc en utilisant la loi du cosinus dans $\mathscr{M}_\kappa$, nous avons $d(\overline{p},\overline{x}) \geq d(\overline{\overline{p}},\overline{\overline{x}}) = d(p,x)$. $\square$

Un espace métrique (X,d) (ou une distance d sur un ensemble X) est dit *localement* CAT(κ) si tout point admet un voisinage qui, muni de la distance induite, est CAT(κ). Une des justifications possibles de cette terminologie introduite par Gromov est que l'origine du sujet remonte aux mathématiciens Cartan (Élie), Alexandrov et Topogonov.

C'est un exercice de montrer que tout espace de Hilbert, muni de sa distance hilbertienne, est un espace CAT(0). Mais l'exemple principal d'espace CAT(κ) est donné par le résultat suivant.

Proposition 3.55 *Soient $\kappa \in \mathbb{R}$ et (M, g) une variété riemannienne, de dimension $n \geq 2$, de courbure sectionnelle K. Alors la distance riemannienne de (M, g) est localement* CAT(κ) *si et seulement si $K \leq \kappa$.*

Démonstration. Supposons que la courbure sectionnelle K de (M, g) soit majorée par κ et montrons que la distance riemannienne d est localement CAT(κ).

Soient $x \in M$ et $\epsilon \in]0, +\infty]$ (avec $\epsilon < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ si $\kappa > 0$) tels que $\exp_x : B_{T_xM}(0, \epsilon) \to B_M(x, \epsilon)$ soit un C^∞-difféomorphisme. Soit $\overline{x}$ un point d'une variété riemannienne $\mathscr{M}_{\kappa,n}$ complète simplement connexe de courbure sectionnelle constante κ et de dimension n, soit $f : T_{\overline{x}}\mathscr{M}_{\kappa,n} \to T_xM$ une isométrie linéaire, et soit $F : B_{\mathscr{M}_{\kappa,n}}(\overline{x}, \epsilon) \to B_M(x, \epsilon)$ l'application $\exp_x \circ f \circ \exp_{\overline{x}}^{-1}$. Cette application est bien définie et lisse. Son application tangente $T_{\overline{x}}F$ en $\overline{x}$ est égale à f, donc est une isométrie pour la norme et préserve les angles. De plus, F est isométrique sur les géodésiques partant de $\overline{x}$.

Par la proposition 2.47 (disant que la différentielle de l'application exponentielle s'exprime en fonction des champs de Jacobi) et par le théorème de comparaison de Rauch (l'assertion (a) du lemme 3.41, disant que la norme des champs de Jacobi de M croît plus vite que celle dans $\mathscr{M}_{\kappa,n}$), nous avons, pour tout $y \in B_{\mathscr{M}_{\kappa,n}}(\overline{x}, \epsilon)$ et tout $v \in T_y\mathscr{M}_{\kappa,n}$,

$$\|T_yF(v)\| \geq \|v\| \ . \qquad (\cdot 64 \cdot)$$

Pour tous les $y, z \in B_M(x, \frac{\epsilon}{2})$, soient $\overline{y}, \overline{z}$ dans $\mathscr{M}_{\kappa,n}$ tels que $F(\overline{y}) = y$ et $F(\overline{z}) = z$. Montrons que

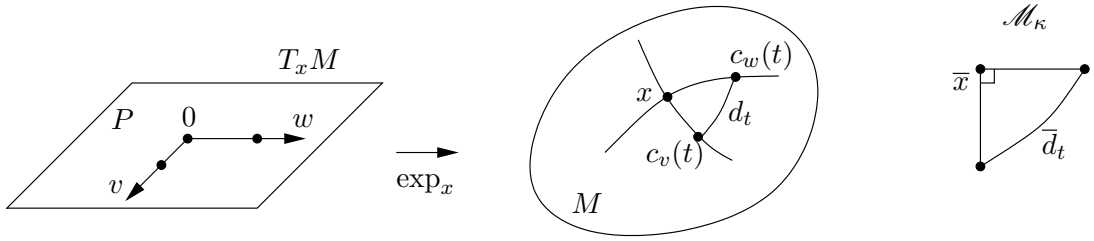
$$d(y, z) \geq d(\overline{y}, \overline{z}) \ ,$$

ce qui conclut, par la définition (iv) des espaces métriques CAT(κ).

En effet, $d(y, z)$ est inférieure à $d(y, x) + d(x, z)$ par l'inégalité triangulaire, donc est strictement inférieure à $2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Donc $d(y, z)$ est la borne inférieure des longueurs des chemins C^1 par morceaux joignant y à z de longueur strictement inférieure à ϵ (voir la proposition 3.14 (1)). Tout tel chemin est contenu dans l'image de F. Le résultat découle alors du fait que f augmente la longueur des chemins C^1 par morceaux, par l'inégalité $(\cdot 64 \cdot)$.

Réciproquement, supposons que la distance riemannienne d soit localement CAT(κ), et montrons que $K \leq \kappa$.

Soient $x \in M$ et $c_v, c_w :]-\epsilon, +\epsilon[\to M$ deux géodésiques de vecteurs vitesse orthonormés $v, w \in T_xM$ respectivement au temps $t = 0$. Soient P le plan vectoriel engendré par v et w, et $t > 0$ assez petit. Notons $d_t = d(c_v(t), c_w(t))$. Soient $\overline{x} \in \mathscr{M}_\kappa$ et $\overline{d}_t$ la distance entre les points à distance t de $\overline{x}$ sur des rayons géodésiques dans $\mathscr{M}_\kappa$ partant perpendiculairement de $\overline{x}$.



Puisque la distance riemannienne de (M, g) est localement CAT(κ), nous avons $d_t \geq \overline{d}_t$ pour t assez petit, en utilisant la définition (iv) des espaces métriques CAT(κ). En

appliquant la formule ($\cdot 55 \cdot$) dans la proposition 3.35 à la fois à (M, g) et à $\mathscr{M}_\kappa$, nous avons

$$\sqrt{2}\, t(1 - \frac{K(P)}{12}\, t^2) + \mathrm{O}(t^4) \geq \sqrt{2}\, t(1 - \frac{\kappa}{12}\, t^2) + \mathrm{O}(t^4)\ .$$

Il en découle alors immédiatement que $K(P) \leq \kappa$. □

Corollaire 3.56 *Si (M, g) est une variété riemannienne complète simplement connexe telle que $K \leq \kappa$, alors (M, g) est* CAT(κ).

Démonstration. Ceci découlera aussi du théorème 3.60, mais la démonstration du sens direct ci-dessus donne le résultat, en prenant $\epsilon = +\infty$ si $\kappa \leq 0$ et $\epsilon = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ sinon. □

Remarques. Soit (X, d) un espace métrique CAT(κ).

(1) Pour tout $\kappa' \geq \kappa$, puisque $\mathscr{M}_\kappa$ est à courbure sectionnelle inférieure ou égale à κ', il découle du corollaire précédent que $\mathscr{M}_\kappa$ est CAT(κ') et donc tout espace CAT(κ) est aussi CAT(κ').

(2) Soit Δ un triangle géodésique de X, de côtés de longueurs a, b, c, et d'angle de comparaison γ au sommet opposé au côté de longueur c. En utilisant un triangle de comparaison de Δ et les formules trigonométriques dans $\mathscr{M}_\kappa$ (voir la partie 3.4.1), nous obtenons des inégalités reliant les angles de comparaison aux sommets de Δ et les longueurs des côtés de Δ.

Par exemple, si $\kappa = 0$, alors la somme des angles de comparaison aux sommets de Δ est au plus π, et

$$c^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\ .$$

Si $\kappa < 0$, alors la somme des angles de comparaison aux sommets de Δ est strictement inférieure à π si Δ n'est pas aplati, et

$$\cosh(\sqrt{-\kappa}\, c) \geq \cosh(\sqrt{-\kappa}\, a)\cosh(\sqrt{-\kappa}\, b) - \sinh(\sqrt{-\kappa}\, a)\sinh(\sqrt{-\kappa}\, b)\cos\gamma\ .$$

Si $\kappa > 0$, et si le périmètre de Δ est strictement inférieur à $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$, alors la somme des angles de comparaison aux sommets de Δ est strictement supérieure à π si Δ n'est pas aplati, et

$$\cos(\sqrt{\kappa}\, c) \leq \cos(\sqrt{\kappa}\, a)\ \cos(\sqrt{\kappa}\, b) + \sin(\sqrt{\kappa}\, a)\ \sin(\sqrt{\kappa}\, b)\ \cos\gamma\ .$$

Les formules trigonométriques de la partie 3.4.1 permettent d'obtenir d'autres résultats de comparaison.

(3) Il découle facilement de la définition que pour tous les x, y dans X, si $d(x, y) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ quand $\kappa > 0$, alors il existe une et une seule géodésique entre x et y, et qu'elle dépend continûment de ses extrémités. En particulier, toute boule, de rayon strictement inférieur à $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ quand $\kappa > 0$, est contractile, et si $\kappa \leq 0$, alors X est contractile : pour tout $x \in X$, l'application $(y, t) \mapsto c_y(td(x, y))$, où $c_y : [0, d(x, y)] \to M$ est l'unique géodésique de x à y, est une rétraction par déformation forte sur x. Si $d(x, y) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ et si $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$, alors z appartient à l'unique géodésique entre x et y.

(4) Une partie A de X est dite *convexe* si pour tous les x, y dans A, tout segment géodésique entre x et y est contenu dans A.

Il découle aussi facilement de la définition que toute boule de (X, d), de rayon strictement inférieur à $\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ quand $\kappa > 0$, est convexe.

Par exemple, une sous-variété totalement géodésique complète connexe d'une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle est convexe.

Muni de la distance induite, tout convexe d'un espace métrique CAT(κ) est encore un espace métrique CAT(κ).

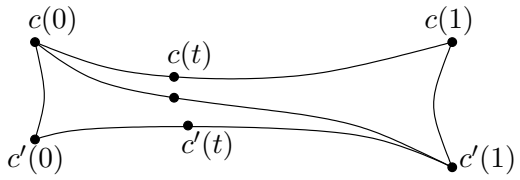
(5) Si $\kappa \leq 0$, alors la distance d est *convexe*, au sens que pour tous les segments géodésiques $c : I \to X$ et $c' : I' \to X$ reparamétrés proportionnellement à la longueur d'arc par $[0,1]$, l'application de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(t,u) \mapsto d(c(t), c(u))$ est convexe. En particulier, en reparamétrant proportionnellement à la longueur d'arc c et c' par $[0,1]$, pour tout $t \in [0,1]$, nous avons

$$d(c(t), c'(t)) \leq (1-t)d(c(0), c'(0)) + t\, d(c(1), c'(1)) \ .$$

En particulier,

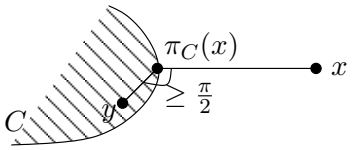
$$d(c(t), c'(t)) \leq \max\{d(c(0), c'(0)),\ d(c(1), c'(1))\} \ .$$

Le résultat est en effet vrai dans le plan euclidien $\mathbb{E}^2$, et en utilisant deux triangles de comparaison comme dans la figure ci-contre, le résultat général s'en déduit.



Proposition 3.57 *Soient (X,d) un espace métrique* CAT(0) *et C un convexe non vide, complet pour la distance induite. Il existe une unique application $\pi_C : X \to C$ telle que, pour tout $x \in X$, le point $\pi_C(x)$ soit l'unique point de C tel que $d(x, \pi_C(x)) = d(x, C)$. De plus, π_C est* 1*-lipschitzienne, constante sur $[x, \pi_C(x)]$, et est une rétraction par déformation forte de X sur C ; pour tous les $x \notin C$ et $y \in C$, l'angle de comparaison en $\pi_C(x)$ entre x et y est obtus (au moins $\frac{\pi}{2}$).*

Le point $\pi_C(x)$ est appelé la *projection* de x sur C. Lorsque X est un espace de Hilbert, ce résultat est bien connu, et $\pi_C(x)$ est la projection orthogonale de x sur C.



Démonstration. Montrons tout d'abord l'existence et l'unicité des projections sur C. Pour tout $x \in X$, soit $D = d(x, C)$ (qui existe parce que C est non vide). Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans C telle que $\lim_{n\to+\infty} d(x, y_n) = D$. Montrons que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans C. Sa limite dans C (qui existe parce que C est complet) sera une projection de x sur C (car l'application $y \mapsto d(x,y)$ est 1-lipschitzienne donc continue). De plus, si y et y' étaient deux projections de x sur C, en prenant $y_{2n} = y$ et $y_{2n+1} = y'$, nous en déduirions aussi que $y = y'$.

Soit $\epsilon > 0$. Par convexité stricte des boules dans $\mathbb{E}^2$, soit $R > D$ tel que pour tout $\overline{x} \in \mathbb{E}^2$, tout segment géodésique contenu dans $B_{\mathbb{E}^2}(\overline{x}, R) - B_{\mathbb{E}^2}(\overline{x}, D)$ soit de longueur strictement inférieure à ϵ. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $d(x, y_n) < R$. Montrons que $d(y_p, y_q) < 2\epsilon$ si $p, q \geq N$, ce qui montre que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Notons m le milieu de l'unique segment joignant y_p et y_q, qui appartient à C par convexité de C. Considérons un triangle de comparaison dans $\mathbb{E}^2$ du triangle géodésique dans X de sommets x, y_p, y_q, et soient $\overline{x}, \overline{y_p}, \overline{y_q}, \overline{m}$ les points correspondants à x, y_p, y_q, m respectivement. Alors $d(\overline{x}, \overline{m}) \geq d(x, m) \geq D$. Donc l'une des deux moitiés ouvertes du segment géodésique $[\overline{y_p}, \overline{y_q}]$ est contenue dans $B_{\mathbb{E}^2}(\overline{y}, R) - B_{\mathbb{E}^2}(\overline{y}, D)$, ce qui montre que $\frac{1}{2}d(y_p, y_q) < \epsilon$ si $p, q \geq N$. Le premier résultat de la proposition 3.57 en découle.

Montrons maintenant les autres propriétés de la projection sur C. Soit $x \in X - C$. Pour tout $y \in [x, \pi_C(x)]$, pour tout $z \in C$, nous avons $d(y, z) \geq d(y, \pi_C(x))$, sinon par l'inégalité triangulaire, nous aurions

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + d(y, \pi_C(x)) = d(x, \pi_C(x)) = d(x, C) \ .$$

Donc l'application π_C est constante sur $[x, \pi_C(x)]$.

Soient $y \in C - \{\pi_C(x)\}$ et α l'angle de comparaison en $\pi_C(x)$ entre x et y. Supposons par l'absurde que $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Considérons un triangle de comparaison $\overline{\Delta}$ dans $\mathbb{E}^2$ du triangle géodésique dans X de sommets $x, y, z = \pi_C(x)$, de sommets correspondants $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$. L'angle $\overline{\alpha}$ en $\overline{z}$ de $\overline{\Delta}$ est strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Donc si p est un point distinct de z et suffisamment proche de z sur le segment géodésique $[z, y]$, de point correspondant dans $\overline{\Delta}$ noté $\overline{p}$, alors $d(x, p) \leq d(\overline{x}, \overline{p}) < d(\overline{x}, \overline{z}) = d(x, z)$, ce qui contredit le fait que z soit la projection de x sur C.

Soient $x, x' \in X - C$ et $p = \pi_C(x)$, $p' = \pi_C(x)$. Montrons que $d(p, p') \leq d(x, x')$. Nous pouvons supposer que $p \neq p'$. Considérons un quadrilatère de $\mathbb{E}^2$ obtenu en recollant des triangles de comparaison des triangles de sommets x, p, p' et x, p', x' le long (et de part et d'autre) du côté correspondant à $[x, p']$. Notons $\overline{x}, \overline{x'}, \overline{p}, \overline{p'}$ les points correspondants à x, x', p, p'. Par ce qui précède, ses angles en $\overline{p}$ et $\overline{p'}$ sont au moins $\frac{\pi}{2}$. Donc $d(x, x') = d(\overline{x}, \overline{x'}) \geq d(\overline{p}, \overline{p'}) = d(p, p')$. □

Proposition 3.58 *Soient (X, d) un espace métrique* CAT(κ) *complet et A une partie bornée non vide de X. Notons r_A la borne inférieure des $r > 0$ tels qu'il existe $x \in X$ tel que $A \subset B(x, r)$, et supposons que $r_A < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ si $\kappa > 0$. Alors il existe un unique point $c_A \in X$ tel que $A \subset \overline{B}(c_A, r_A)$.*

Ce point c_A sera appelé l'*épicentre* de A (la terminologie de *centre* (comme dans [BrH]) ou de *barycentre* est aussi utilisée).

Démonstration. Puisque A est borné, r_A est bien défini dans $[0, +\infty[$.

Soient $r_n = r_A + \frac{1}{n+1}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X telle que $A \subset B(x_n, r_n)$. Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Sa limite sera un épicentre, et si x et y étaient deux épicentres, en prenant $x_{2n} = x$ et $x_{2n+1} = y$, nous en déduirions aussi que $x = y$. Si $r_A = 0$, comme A est non vide, nous avons $d(x_n, x_p) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{p+1}$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite de Cauchy. Nous supposons donc que $r_A > 0$.

Soit $\epsilon > 0$. Par convexité stricte des boules dans $\mathscr{M}_\kappa$, de rayon strictement inférieur à $\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ si $\kappa > 0$, soient r, R tels que $0 < r < r_A < R < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ (cette dernière inégalité lorsque $\kappa > 0$) et tels que pour tout $\overline{x} \in \mathscr{M}_\kappa$, tout segment géodésique contenu dans $B_{\mathscr{M}_\kappa}(\overline{x}, R) - B_{\mathscr{M}_\kappa}(\overline{x}, r)$ soit de longueur strictement inférieure à ϵ. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $r_n < R$. Montrons que $d(x_p, x_q) < 2\epsilon$ si $p, q \geq N$, ce qui conclut.

Notons m le milieu de l'unique segment joignant x_p et x_q. Il existe un point y dans A tel que $d(y, m) \geq r$, sinon $A \subset B(m, r)$, ce qui contredit le fait que $r < r_A$. Considérons

un triangle de comparaison dans $\mathscr{M}_\kappa$ du triangle géodésique dans X de sommets y, x_p, x_q, et soient $\overline{y}, \overline{x_p}, \overline{x_q}, \overline{m}$ les points correspondants à y, x_p, x_q, m. Alors $d(\overline{y}, \overline{m}) \geq d(y, m) \geq r$, donc l'une des deux moitiés ouvertes du segment géodésique $[\overline{x_p}, \overline{x_q}]$ est contenue dans $B_{\mathscr{M}_\kappa}(\overline{y}, R) - B_{\mathscr{M}_\kappa}(\overline{y}, r)$, ce qui montre le résultat. □

Corollaire 3.59 (Théorème du point fixe de Cartan) *Si (X, d) est un espace métrique* CAT(0) *complet, un sous-groupe Γ du groupe des isométries de X ayant une orbite bornée admet un point fixe.*

Ce résultat, qui s'applique par exemple si Γ est compact, ou si Γ est fini, découle immédiatement de la proposition 3.58, car par unicité, l'épicentre de toute orbite bornée de Γ est fixe par Γ. Ce résultat est une propriété remarquable des espaces CAT(0), et avait été démontré dans des cas particuliers par E. Cartan (lorsque X est une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure négative ou nulle) ou par Bruhat-Tits (lorsque X est un immeuble affine).

Notons que l'ensemble des points fixes de toute isométrie d'un espace CAT(0) est convexe (il contient l'unique géodésique entre deux de ses points).

Théorème 3.60 (Théorème de Cartan-Hadamard métrique) *Soit X un espace métrique connexe complet localement* CAT(0)*. Alors tout revêtement universel localement isométrique de X est* CAT(0) *et complet.*

Démonstration. Voir par exemple [BrH, Chap. II.4]. □

Notons que comme un espace localement CAT(0) connexe est localement contractile et connexe par arcs, il admet bien un revêtement universel, et celui-ci est donc contractile, comme pour le cas des variétés riemanniennes complètes à courbure négative ou nulle (voir le théorème 3.40).

Corollaire 3.61 *(1) Soient (X, d) un espace* CAT(-1) *complet, et A et B deux parties non vides compactes convexes disjointes. Alors il existe un unique segment géodésique entre un point de A et un point de B de longueur minimale (c'est-à-dire égale à $d(A, B)$).*

(2) Soient (X, d) un espace métrique localement CAT(0)*, connexe et complet, et x et y deux points distincts de X. Alors toute classe d'homotopie relative aux extrémités de chemins entre x et y contient un et un seul segment localement géodésique de longueur minimale.*

(3) Soient (X, d) un espace métrique localement CAT(0) *complet et $x \in X$. Alors le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ de X en x est sans torsion.*

En particulier, il découle de (3) et de la proposition 3.55 que les groupes fondamentaux des variétés riemanniennes complètes à courbure sectionnelle négative ou nulle sont sans torsion.

Démonstration. (1) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites dans A et B respectivement, telles que $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = d(A, B)$, alors quitte à extraire, par compacité de A et par le théorème d'Ascoli, la suite de segments géodésiques $[x_n, y_y]$ converge vers un segment géodésique de longueur minimale entre A et B.

Si $x, x' \in A$, $y, y' \in B$ et $d(x, y) = d(x', y') = d(A, B)$, et si par exemple $x \neq x'$, alors soient p et q les milieux des segments géodésiques $[x, x']$ et $[y, y']$. Ils appartiennent à A

et B respectivement, par convexité, et $p \neq x, x'$. Par comparaison et convexité stricte des distances dans $\mathscr{M}_{-1}$, nous avons $d(p,q) < \max\{d(x,y), d(x',y')\} = d(A,B)$, une contradiction.

(2) Soit $\widetilde{\pi} : \widetilde{X} \to X$ un revêtement universel localement isométrique. Soit α un chemin continu de x à y. Soit $\widetilde{\alpha}$ un relèvement de α dans $\widetilde{X}$, d'extrémités $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$. Soit $\widetilde{\gamma}$ le segment géodésique de $\widetilde{x}$ à $\widetilde{y}$. Alors il est facile de voir que $\widetilde{\pi} \circ \widetilde{\gamma}$ est l'unique segment localement géodésique de longueur minimale entre x et y dans la classe d'homotopie relative aux extrémités de α.

(3) Soit X_0 la composante connexe (donc connexe par arcs) de x dans X. Soit $\gamma \in \pi_1(X,x) = \pi_1(X_0,x)$ un élément de torsion. Alors l'automorphisme de revêtements défini par γ sur un revêtement universel de X_0 est d'ordre fini. Comme X_0 est CAT(0) par le théorème 3.60, et par le théorème du point fixe de Cartan 3.59, cet automorphisme de revêtements admet un point fixe, donc est l'identité. □

Voici un corollaire des propositions 3.11 et 3.58, qui n'est pas vrai en général pour le cas pseudo-riemannien.

Corollaire 3.62 *Soient (M,g) une variété riemannienne simplement connexe, complète, de dimension $n \geq 2$, à courbure sectionnelle négative ou nulle, et Γ un sous-groupe de* $\mathrm{Isom}(M,g)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) Γ agit librement et proprement sur (M,g) ;
(2) Γ est un sous-groupe discret sans torsion du groupe topologique $\mathrm{Isom}(M,g)$.

Notons que le groupe des racines n-ème de l'unité agit proprement et librement sur le cercle par isométries, mais n'est pas sans torsion.

Démonstration. Muni de sa distance riemannienne, M est un espace métrique CAT(0), par le corollaire 3.56.

Montrons que (1) implique (2). Si $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite dans Γ tendant vers l'élément neutre e du groupe $\mathrm{Isom}(M,g)$, alors pour tout $x \in M$, la suite $(\gamma_i x)_{i\in\mathbb{N}}$ tend vers x. En considérant un voisinage compact de x dans M et par la propreté de l'action de Γ, la suite $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Puisqu'elle converge vers e, elle est donc égale à e à partir d'un certain rang. Donc Γ est discret.

Si $\gamma \in \Gamma$ est d'ordre fini, alors par le corollaire 3.59, l'élément γ admet un point fixe, donc vaut l'identité puisque Γ agit librement. Donc Γ est sans torsion.

Réciproquement, montrons que (2) implique (1). Si $\gamma \in \Gamma$ fixe un point $x \in M$, alors puisque le stabilisateur de x est compact par la proposition 3.11 et puisqu'une partie discrète d'un espace compact est finie, nous en déduisons que γ est d'ordre fini, donc égal à l'élément neutre puisque Γ est sans torsion. Par conséquent, Γ agit librement.

Pour montrer la propreté de l'action, supposons par l'absurde qu'il existe un compact C de M et une suite $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de Γ tels que $\gamma_i C \cap C \neq \emptyset$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Alors quitte à extraire, il existe x et y dans M tels que $(\gamma_i x)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers y. Par le théorème d'Ascoli, $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge donc vers une isométrie g de M. Donc $(\gamma_{i+1}{\gamma_i}^{-1})_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments non triviaux de Γ, qui converge vers l'élément neutre de Γ, ce qui contredit le fait que Γ est discret. □

Exercice E.50 *Soient (X, d) un espace métrique* CAT(0)*, Δ un triangle géodésique de X de sommets x, y, z et $\overline{\Delta}$ un triangle de comparaison de Δ dans le plan euclidien $\mathbb{E}^2$, de sommets correspondants $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$.*

(1) Montrer que si la somme des angles de comparaison de Δ est égale à π, alors pour tout point $p \in [y, z]$, nous avons $d(p, x) = d(\overline{p}, \overline{x})$.

(2) En déduire que si la somme des angles de comparaison de Δ est égale à π, alors l'enveloppe convexe de Δ est isométrique à l'enveloppe convexe de $\overline{\Delta}$ dans le plan euclidien $\mathbb{E}^2$.

Le lemme de la bande plate et applications.

Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques CAT(0). Il est facile de vérifier que l'ensemble produit $X'' = X \times X'$, muni de la distance produit

$$d''((x, x'), (y, y')) = \sqrt{d(x, y)^2 + d'(x', y')^2}$$

est encore un espace CAT(0). Ce fait dépend fortement de la distance considérée sur l'ensemble produit. Par exemple, muni de la distance $((x, x'), (y, y')) \mapsto d(x, y) + d'(x', y')$, ce fait n'est plus vrai si X ou X' n'est pas un singleton. Dans ce qui suit, le produit de deux espaces métriques CAT(0) sera toujours munie de cette distance d'' (et cette convention est compatible avec les produits riemanniens : la distance riemannienne d'un produit riemannien de deux variétés riemanniennes est la distance produit au sens ci-dessus des deux distances riemanniennes).

Deux géodésiques $c, c' : \mathbb{R} \to X$ dans X sont dites *parallèles* si leur distance de Hausdorff est finie, ou, de manière équivalente, s'il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous ayons $d(c(t), c'(t)) \leq A$.

Lemme 3.63 *Soient X un espace métrique* CAT(0) *et $c, c' : \mathbb{R} \to X$ deux géodésiques parallèles dans X. Alors l'enveloppe convexe de la réunion des images de c et de c' est isométrique à une bande plate $\mathbb{R} \times [a, b]$ dans l'espace euclidien $\mathbb{E}^2$.*

Démonstration. Ce lemme est immédiat en utilisant l'exercice E.50, voir par exemple [BrH, Chap. II.2]. □

Corollaire 3.64 *Soient X un espace métrique* CAT(0) *et $c : \mathbb{R} \to X$ une géodésique de X. Alors la réunion des droites géodésiques parallèles à c est isométrique à un produit $Y \times \mathbb{R}$, où Y est un espace métrique* CAT(0)*. Si X est une variété riemannienne munie de sa distance riemannienne, alors Y l'est aussi.*

Démonstration. Voir par exemple [BrH, Chap. II.2]. □

Soit g une isométrie d'un espace métrique CAT(0) noté (X, d). Nous appellerons *distance de translation* de g, et noterons $\ell(g) = \ell_X(g)$, la quantité

$$\ell(g) = \inf_{x \in X} d(x, gx) \ .$$

Nous dirons que g est *elliptique* si g admet au moins un point fixe dans X (auquel cas $\ell(g) = 0$ et la borne inférieure définissant $\ell(g)$ est atteinte). Nous dirons que g est *hyperbolique* (ou

axiale, ou *loxodromique*, la terminologie "hyperbolique" désignant parfois un cas particulier d'isométries loxodromiques) si $\ell(g) > 0$ et si la borne inférieure définissant $\ell(g)$ est atteinte. Nous dirons que g est *parabolique* si la borne inférieure définissant $\ell(g)$ n'est pas atteinte.

Par exemple, par le théorème du point fixe de Cartan 3.59, toute isométrie d'ordre fini de X est elliptique.

Proposition 3.65 *Soient X un espace métrique* CAT(0) *et g une isométrie hyperbolique de X. Alors*

$$\min(g) = \{x \in X \ : \ d(x, gx) = \ell(g)\}$$

est une partie convexe fermée non vide de X, réunion de droites géodésiques parallèles invariantes par g, sur lesquelles g agit par translation de longueur $\ell(g)$. De plus $\min(g)$ *est isométrique à un produit $Y \times \mathbb{R}$, où Y est un espace métrique* CAT(0)*. Si X est* CAT(κ) *avec $\kappa < 0$, alors Y est réduit à un point.*

Une droite géodésique de X sur laquelle une isométrie g de X agit par une translation non triviale est appelée un *axe de translation*. Si X est CAT(-1), une isométrie hyperbolique de X admet donc un et un seul axe de translation.

Démonstration. La partie $\min(g)$ est non vide puisque g est elliptique, et fermée par la continuité de l'application $x \mapsto d(x, gx)$. La convexité de $\min(g)$ découle immédiatement de la convexité de la fonction distance (voir la remarque (5) ci-dessus).

Pour tout $x \in \min(g)$, notons D_x la réunion des segments géodésiques $[g^n x, g^{n+1} x]$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que D_x est une géodésique. Soit m le milieu de $[x, gx]$. Il suffit de montrer que gx appartient à $[m, gm]$, donc que $d(m, gm) = d(m, gx) + d(gx, gm)$, par la propriété CAT(0). Or par convexité, nous avons $m \in \min(g)$, donc

$$d(m, gm) = \ell(g) = d(x, gx) = 2d(x, m) = d(m, gx) + d(gx, gm) \ ,$$

ce qui montre que D_x est une géodésique. Puisque $d(g^n x, g^n y) = d(x, y)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les géodésiques D_x et D_y sont parallèles pour tous les $x, y \in \min(g)$, et $\min(g)$ est la réunion des D_x pour $x \in \min(g)$.

La dernière assertion découle du fait que le convexe $\min(g)$ de X, muni de la distance induite, est un espace CAT(0) et du corollaire 3.64. □

3.7 Géométrie à l'infini des variétés de courbure négative ou nulle

La référence recommandée pour cette partie est encore [BrH].

3.7.1 Bord à l'infini des espaces CAT(0)

Soit (X, d) un espace métrique CAT(0) complet, par exemple une *variété de Hadamard*, c'est-à-dire une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle, munie de sa distance riemannienne.

Deux rayons géodésiques $c, c' : [0, +\infty[\to X$ dans X sont dits *asymptotes* si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

• leur distance de Hausdorff est finie (c'est-à-dire qu'il existe $A > 0$ tel que tout point de l'image de c est à distance au plus A d'un point de l'image de c', et de même en échangeant c et c') ;

- $\sup_{t\in[0,+\infty[} d(c(t), c'(t)) < +\infty$.

La seconde condition implique immédiatement la première. Si la première est vérifiée, pour tout $t \in [0, +\infty[$, soit p_t un point de l'image de c' tel que $d(c(t), p_t) \leq A$. Alors, par l'inégalité triangulaire et puisque $c'(0), c'(t)$ et p_t sont alignés,

$$\begin{aligned} d(c(t), c'(t)) &\leq d(c(t), p_t) + d(p_t, c'(t)) \leq A + |d(p_t, c'(0)) - t| \\ &\leq 2A + d(c'(0), c(0)) + |d(c(t), c(0)) - t| = 2A + d(c'(0), c(0)) \ . \end{aligned}$$

Donc la seconde condition est vérifiée. Remarquons que pour montrer que c et c' sont asymptotes, il suffit de vérifier qu'il existe $A > 0$ tel que tout point de l'image de c est à distance au plus A d'un point de l'image de c'.

Par l'inégalité triangulaire, « être asymptote à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathrm{Ray}(X)$ des rayons géodésiques de X, invariante par l'action des isométries. Munissons $\mathrm{Ray}(X)$ de la topologie compacte-ouverte (c'est-à-dire de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts). Il est facile de vérifier que cette topologie est métrisable par la distance $d : \mathrm{Ray}(X) \times \mathrm{Ray}(X) \to [0, +\infty[$ définie par

$$d(c, c') = \inf\{\epsilon > 0 \ : \ \sup_{t\in[0,\frac{1}{\epsilon}]} d(c(t), c'(t)) < \epsilon\} \ .$$

L'action du groupe des isométries de X sur $\mathrm{Ray}(X)$ est continue (car isométrique pour la distance ci-dessus).

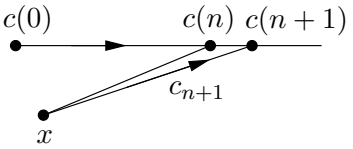
L'espace topologique quotient de $\mathrm{Ray}(X)$ par la relation d'équivalence « être asymptote à » est appelé le *bord à l'infini* de X, et noté $\partial_\infty X$. (La notation ∂X de [BrH] est à éviter, par conflit avec la notation standard d'une frontière topologique.) Ses éléments sont appelés les *points à l'infini* de X. La classe d'équivalence d'un rayon géodésique c est appelée le *point à l'infini* de c, et notée $c(+\infty)$. L'action quotient du groupe des isométries de X sur $\partial_\infty X$ est continue, et appelée *l'action au bord* du groupe des isométries de X.

Lemme 3.66 *Pour tout rayon géodésique $c : [0, +\infty[\to X$ et pour tout $x \in X$, il existe un et un seul rayon géodésique c_x asymptote à c d'origine x. Si $c' : [0, +\infty[\to X$ est un rayon géodésique asymptote à c, alors $c_x = c'_x$. L'application $(c, x) \mapsto c_x$ de $\mathrm{Ray}(X) \times X$ dans $\mathrm{Ray}(X)$ est continue.*

Si $\xi \in \partial_\infty X$ et $x \in X$, nous noterons $[x, \xi[$ l'image du rayon géodésique d'origine x appartenant à la classe d'équivalence ξ.

Démonstration. L'application $x \mapsto c_x$ est isométrique, car pour tous les $x, y \in X$, par convexité de la distance et puisque c_x et c_y sont asymptotes, nous avons $d(c_x(t), c_y(t)) \leq d(c_x(0), c_y(0))$, donc $d(c_x, c_y) = d(x, y)$. Ceci montre en particulier l'unicité de c_x.

Pour montrer l'existence de c_x, soit $c_n : [0, d(x, c(n))] \to X$ le segment géodésique de x à $c(n)$, qui, par convexité de la distance, est contenu dans le r-voisinage de l'image de c pour $r = d(c(0), x)$.



Par comparaison, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie sur l'intervalle $[0, N]$ pour n assez grand, et elle est uniformément de Cauchy sur $[0, N]$. Elle converge donc, par complétude de X, vers une application $\alpha_N : [0, N] \to X$, qui est isométrique par passage

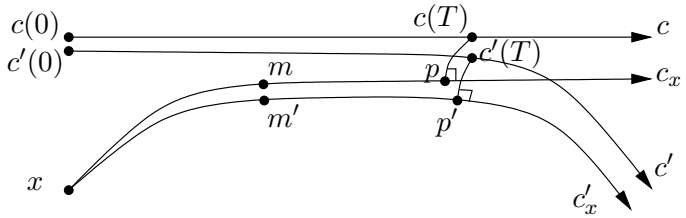
à la limite. L'existence s'en déduit en posant $c_x(t) = \alpha_N(t)$ pour n'importe quel entier $N \geq t$.

Pour tous les $c, c' \in \mathrm{Ray}(X)$ et $x, x' \in X$, nous avons

$$d({c'}_{x'}, c_x) \leq d({c'}_{x'}, {c'}_x) + d({c'}_x, c_x) = d(x, x') + d({c'}_x, c_x) \ .$$

Donc pour montrer que l'application $(c, x) \mapsto c_x$ est continue, il suffit de montrer que l'application $c \mapsto c_x$ est continue.

Soit $\epsilon \in \,]0, 2]$. Posons $\lambda = \frac{2\,d(c(0),x)+2}{\epsilon}$ et $T = \frac{\lambda}{\epsilon} + 2\,d(c(0), x)$. Si c' est proche de c, alors $d(c(t), c'(t)) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$. Soit p, p' le point de l'image de c_x, c'_x le plus proche de $c(T), c'(T)$, respectivement.



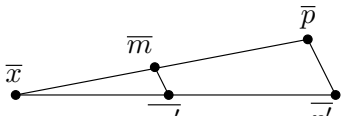
Puisque c et c_x, ainsi que c' et c'_x, sont asymptotes, et par convexité, nous avons $d(c(T), p) \leq d(c(0), x)$ et $d(c'(T), p') \leq d(c'(0), x)$. Donc par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} d(p, p') &\leq d(p, c(T)) + d(c(T), c'(T)) + d(c'(T), p') \leq d(c(0), x) + 1 + d(c'(0), x) \\ &\leq 2\,d(c(0), x) + 2 = \lambda\,\epsilon \ , \end{aligned}$$

et

$$d(x, p) \geq d(c(0), c(T)) - d(x, c(0)) - d(p, c(T)) \geq T - 2\,d(c(0), x) = \frac{\lambda}{\epsilon} \ .$$

Puisque $\lambda \geq 1$, notons m et m' les points des segments géodésiques $[x, p]$ et $[x, p']$ respectivement tels que $\frac{d(x,m)}{d(x,p)} = \frac{d(x,m')}{d(x,p')} = \frac{1}{\lambda}$. En particulier, $d(x, m) = \frac{d(x,p)}{\lambda} \geq \frac{1}{\epsilon}$.



Considérons un triangle de comparaison de sommets $\overline{x}, \overline{p}, \overline{p'}$ dans $\mathbb{R}^2$ du triangle géodésique de sommets x, p, p', et notons $\overline{m}, \overline{m'}$ les points correspondants à m, m'. Par comparaison et par les propriétés des homothéties dans $\mathbb{R}^2$, nous avons donc $d(m, m') \leq d(\overline{m}, \overline{m'}) = \frac{d(\overline{p}, \overline{p'})}{\lambda} = \frac{d(p,p')}{\lambda} \leq \epsilon$.

Ainsi, les rayons géodésiques c_x et c'_x restent à distance petite pendant un temps grand. Ils sont donc proches pour la topologie compacte-ouverte. □

Pour tout $x_0 \in X$, munissons l'ensemble $\mathscr{G}_{x_0}$ des segments et rayons géodésiques dans X d'origine x_0 au temps $t = 0$ de la topologie induite par la distance $d : \mathscr{G}_{x_0} \times \mathscr{G}_{x_0} \to [0, +\infty[$ définie par

$$d(c, c') = \inf\{\epsilon > 0 \ : \ \sup_{t \in [0, \frac{1}{\epsilon}]} d(c(t), c'(t)) < \epsilon\} \ ,$$

où un segment géodésique $c : [0, a] \to X$ est étendu en une application 1-lipschitzienne $c : [0, +\infty[\to X$ par $c(t) = c(a)$ pour $t \geq a$. Sur $\mathscr{G}_{x_0} \cap \mathrm{Ray}(X)$, les distances induites par celle de $\mathscr{G}_{x_0}$ et celle de $\mathrm{Ray}(X)$ coïncident.

Notons $\overline{X}^{\mathrm{geo}}$ l'ensemble somme disjointe $X \coprod \partial_\infty X$ de X et de son bord à l'infini $\partial_\infty X$. Pour tout $x_0 \in X$, notons $\mathrm{ext}_{x_0} : \mathscr{G}_{x_0} \to \overline{X}^{\mathrm{geo}}$ l'application qui à un segment ou rayon géodésique c d'origine x_0 associe son autre extrémité si c est un segment, ou son point à l'infini si c est un rayon.

Proposition 3.67 *Il existe une et une seule topologie sur $\overline{X}^{\mathrm{geo}}$ telle que pour tout $x_0 \in X$, l'application ext_{x_0} de $\mathscr{G}_{x_0}$ dans $\overline{X}^{\mathrm{geo}}$ soit un homéomorphisme.*

De plus, cette topologie est métrisable, X est un ouvert dense de $\overline{X}^{\mathrm{geo}}$, et les topologies induites sur X et sur $\partial_\infty X$ par la topologie de $\overline{X}^{\mathrm{geo}}$ sont les topologies originelles.

Démonstration. La restriction de ext_{x_0} au sous-espace des rayons géodésiques d'origine x_0 est un homéomorphisme sur $\partial_\infty X$. En effet, c'est une application continue comme restriction de la projection canonique de $\mathrm{Ray}(X)$ dans $\partial_\infty X$, et une bijection d'inverse continu par le lemme 3.66 ci-dessus.

Lemme 3.68 *La restriction de ext_{x_0} au sous-espace des segments géodésiques dans $\mathscr{G}_{x_0}$ est un homéomorphisme sur X.*

Démonstration. Rappelons que pour tout $x \in X$, il existe un unique segment géodésique $s_x : [0, d(x_0, x)] \to X$ d'origine x_0 en $t = 0$ et d'extrémité x. Pour tous les $x, y \in X$, nous avons $d(s_x, s_y) \leq d(x, y)$ par convexité de la distance, et donc s_x et s_y sont proches si x et y le sont.

Réciproquement, notons $t_x = d(x_0, x)$, de sorte que $s_x(t) = x$ pour $t \geq t_x$. Soit $\epsilon > 0$ petit, en particulier tel que $\frac{1}{\epsilon} \geq t_x + 3\epsilon$. Supposons que $y \in X$ vérifie $d(s_x, s_y) < \epsilon$, montrons que $d(x, y) \leq 4\epsilon$. Si $d(x_0, y) \leq t_x$, alors $s_y(t_x) = y$ et $d(x, y) = d(s_x(t_x), s_y(t_x)) \leq \epsilon$ car $t_x \leq \frac{1}{\epsilon}$. Si $t_x \leq d(x_0, y) \leq t_x + 3\epsilon$, alors $d(s_y(t_x), y) = d(x_0, y) - t_x \leq 3\epsilon$ et

$$d(x, y) \leq d(s_x(t_x), s_y(t_x)) + d(s_y(t_x), y) \leq 4\,\epsilon\ .$$

Enfin, il n'est pas possible que $d(x_0, y) \geq t_x + 3\epsilon$, sinon

$$d(s_y(t_x + 3\epsilon), s_x(t_x + 3\epsilon)) \geq d(s_y(t_x + 3\epsilon), s_y(t_x)) - d(s_y(t_x), s_x(t_x)) \geq 3\epsilon - \epsilon > \epsilon\ ,$$

ce qui contredit le fait que $d(s_x, s_y) < \epsilon$ car $t_x + 3\epsilon \leq \frac{1}{\epsilon}$. □

Donc $\mathrm{ext}_{x_0} : \mathscr{G}_{x_0} \to \overline{X}^{\mathrm{geo}}$ est une bijection. Pour tous les $x, y \in X$, l'application $\mathrm{ext}_y^{-1} \circ \mathrm{ext}_x$ de $\mathscr{G}_x$ dans $\mathscr{G}_y$ est continue sur $\mathscr{G}_x - \mathscr{G}_x \cap \mathrm{Ray}(X)$ par le lemme 3.68 précédent, et coïncide sur $\mathscr{G}_x \cap \mathrm{Ray}(X)$ avec l'application qui à un rayon géodésique c d'origine x associe l'unique rayon géodésique c_y d'origine y asymptote à c. Par une démonstration similaire à celle du lemme 3.66 (en prenant dans cette démonstration pour c' un segment géodésique et en notant c'_x le segment géodésique d'origine x et de même extrémité que c'), l'application $\mathrm{ext}_y^{-1} \circ \mathrm{ext}_x$ est encore continue en tout point de $\mathscr{G}_x \cap \mathrm{Ray}(X)$. Son inverse, qui est $\mathrm{ext}_x^{-1} \circ \mathrm{ext}_y$, est aussi continue. Munissons $\overline{X}^{\mathrm{geo}}$ de la topologie image de la topologie de $\mathscr{G}_{x_0}$ par la bijection ext_{x_0}, qui donc ne dépend pas du choix de x_0.

La densité de X dans $\overline{X}^{\mathrm{geo}}$ vient du fait que si $c : [0, +\infty[\to X$ est un rayon géodésique dans X, alors $c(n)$ converge vers $c(+\infty)$, par définition de la distance sur $\mathscr{G}_{c(0)}$. Il est immédiat que $\mathscr{G}_{x_0} \cap \mathrm{Ray}(X)$ est fermé dans $\mathscr{G}_{x_0}$. Donc $\partial_\infty X$ est fermé dans $\overline{X}^{\mathrm{geo}}$. Le résultat en découle. □

Cette topologie est parfois appelée la *topologie des cônes* sur $\overline{X}^{\mathrm{geo}}$ (voir [BrH] pour une explication). Elle est invariante par l'action du groupe des isométries de X sur $\overline{X}^{\mathrm{geo}}$ (car pour toute isométrie γ de X, l'application de $\mathscr{G}_x$ dans $\mathscr{G}_{\gamma x}$ définie par $c \mapsto \gamma \circ c$ est une isométrie).

Si X est propre (rappelons que ceci signifie que toute boule fermée est compacte, comme par exemple si X est une variété de Hadamard), alors par le théorème d'Ascoli, l'espace $\mathscr{G}_{x_0}$ des segments et rayons géodésiques d'origine fixée x_0 est compact, donc $\overline{X}^{\mathrm{geo}} = X \cup \partial_\infty X$ est métrisable compact, et appelé la *compactification géométrique* de X.

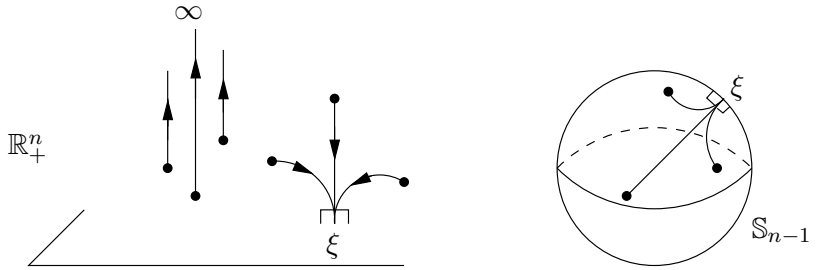
Exemples.

(1) Deux rayons géodésiques dans $\mathbb{E}^n$ sont asymptotes si et seulement si les droites géodésiques qu'ils définissent sont parallèles. L'application de la boule unité fermée $\overline{\mathbb{B}}_n$ dans $\overline{\mathbb{E}^n}^{\mathrm{geo}}$ qui au point x associe $(\operatorname{arctanh} \|x\|)\, x$ si $\|x\| < 1$ et le point à l'infini du rayon géodésique d'origine 0 passant par x si $\|x\| = 1$ est un homéomorphisme.

(2) Il est immédiat de vérifier que si X est le modèle du demi-espace supérieur de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, alors deux rayons géodésiques $c, c' : [0, +\infty[\to X$ sont asymptotes si et seulement si ou bien ce sont deux rayons de droites verticales partant à l'infini, ou bien ce sont deux arcs de cercles perpendiculaires en un même point de l'hyperplan horizontal. En particulier, le bord à l'infini de ce modèle est homéomorphe, de manière équivariante pour l'action du groupe des isométries de X, au compactifié d'Alexandrov de l'hyperplan horizontal $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$\partial_\infty(\mathbb{R}^n_+, ds^2_{\mathrm{hyp}}) = \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\} \ .$$

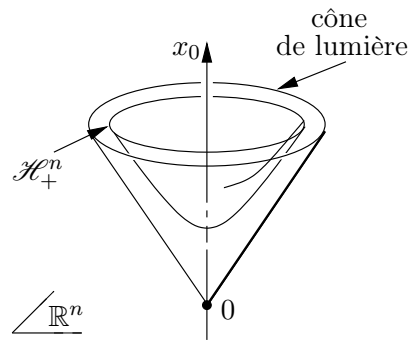
Comme la distance entre deux points de même coordonnée verticale h et dont les projections horizontales sont à distance euclidienne au plus a est majorée par la longueur hyperbolique du chemin horizontal entre ces points, qui est $\frac{a}{h}$, et puisque la distance hyperbolique entre deux points de coordonnées verticales 1 et $h > 1$ sur une même verticale est $\log h$, nous en déduisons, en nous ramenant par isométrie au cas où $\xi = \infty$, que si c et c' sont deux rayons géodésiques asymptotes de points à l'infini ξ, alors il existe $a > 0$ tel que $d\big(c(t), c'([0, +\infty[)\big) \leq a\, e^{-t}$.



De même, par isométrie, si X est le modèle de la boule de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, alors deux rayons géodésiques $c, c' : [0, +\infty[\to X$ sont asymptotes si et seulement si ce sont des arcs de cercles ou de droites vectorielles perpendiculaires en un même point de la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$. En particulier, le bord à l'infini de ce modèle est homéomorphe, de manière équivariante pour l'action du groupe des isométries de X, à la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$ bord de la boule :

$$\partial_\infty(\mathbb{B}_n, ds^2_{\mathrm{hyp}}) = \mathbb{S}_{n-1} \ .$$

Et dans le modèle du demi-hyperboloïde supérieur $(\mathscr{H}^n_+, ds^2_{\text{hyp}})$, deux rayons géodésiques sont (hyperboliquement) asymptotes si et seulement s'ils sont (euclidiennement) asymptotes à une même droite du cône de lumière. En particulier, le bord à l'infini de ce modèle est homéomorphe, de manière équivariante pour l'action du groupe des isométries, à l'espace projectif du cône de lumière :



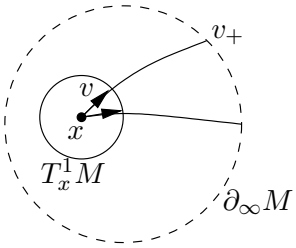
$$\begin{aligned}&\partial_\infty(\mathscr{H}^n_+, ds^2_{\text{hyp}})\\ &= \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \ :\\ &\quad - x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0\}/_{x \sim \lambda x,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*}\ .\end{aligned}$$

Remarque 3.69 Par comparaison, dans un espace métrique CAT(-1) X, les conditions suivantes sur deux rayons géodésiques $c, c' : [0, +\infty[\to X$ sont équivalentes :

- c et c' sont asymptotes ;
- la distance de $c(t)$ à l'image de c' tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$;
- il existe $a > 0$ tel que $d\big(c(t), c'([0, +\infty[)\big) \leq a\, e^{-t}$ pour tout $t \in [0, +\infty[$;
- il existe $a > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in [\max\{0, -t_0\}, +\infty[$, nous ayons $d\big(c(t), c'(t + t_0)\big) \leq a\, e^{-t}$.

(3) Pour tout x dans X, nous avons vu dans la proposition 3.67 que la restriction de la projection canonique dans $\partial_\infty X$ à l'espace $\text{Ray}(X) \cap \mathscr{G}_x$ des rayons géodésiques d'origine x est un homéomorphisme.

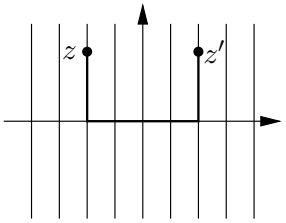
Ainsi, si M est une variété de Hadamard, pour tout $x \in M$, l'application de $T^1_x M$ dans $\partial_\infty M$, qui à un vecteur tangent unitaire v en x associe le point à l'infini v_+ du rayon géodésique de vecteur tangent à l'origine v, est un homéomorphisme : deux rayons géodésiques sont proches si et seulement si leur angle à l'origine est petit. En particulier, si M est de dimension n, alors $\partial_\infty M$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$.



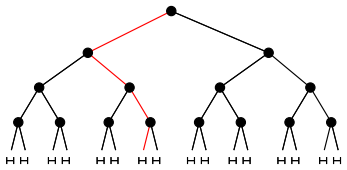
L'homéomorphisme $\exp_x : T_x M \to M$ se prolonge par continuité en un homéomorphisme de $\overline{T_x M}^{\text{geo}} \to \overline{M}^{\text{geo}}$. En particulier, si M est de dimension n, alors la compactification géométrique de M est homéomorphe à la boule unité fermée euclidienne $\overline{\mathbb{B}_n}$.

(4) Un *arbre réel* T est un espace métrique uniquement connexe par arc, dans lequel tout arc est isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$. En particulier, un arbre réel est géodésique. Nous renvoyons par exemple à [Sha1, Sha2, Best, Mor, Pau1] pour des exemples et compléments.

L'ensemble $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, muni de la distance $d(z, z') = |z - z'|$ si z, z' sont sur une même verticale, et $d(z, z') = |\operatorname{Im} z| + |\operatorname{Im} z'| + |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z'|$ sinon, est un arbre réel.



Un arbre réel est CAT(0), et en fait est CAT(κ) pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$, car ses triangles géodésiques sont des tripodes : chaque côté est contenu dans la réunion des deux autres. Par exemple, un arbre simplicial, muni de la distance maximale rendant chaque arête isométrique à $[0,1]$, est un arbre réel. Deux rayons géodésiques sont asymptotes si et seulement si l'intersection de leurs images contient l'image d'un rayon géodésique.

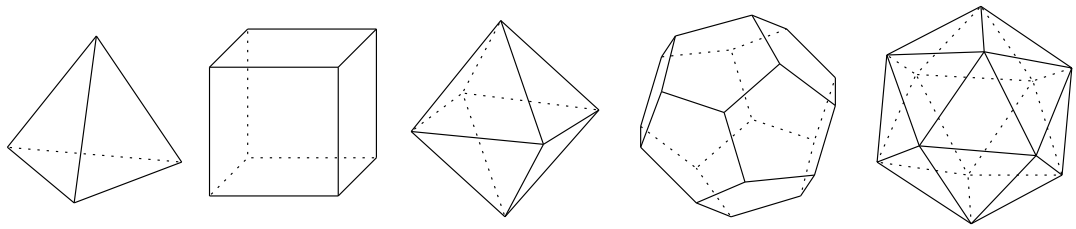


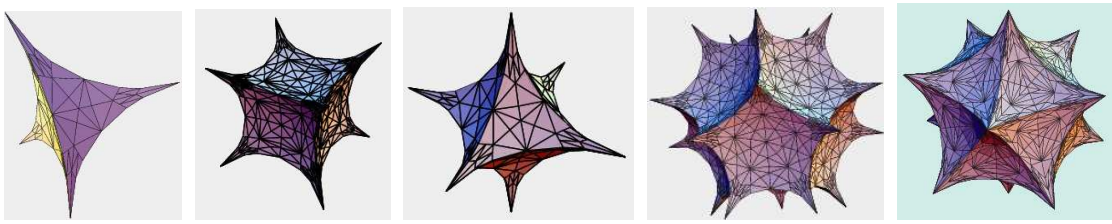
Par exemple, le bord à l'infini d'un arbre simplicial localement fini T est un espace compact totalement discontinu, qui est un espace de Cantor si la valence en chaque sommet (sauf peut-être pour un nombre fini d'entre eux) est au moins 3.

(5) Nous allons donner un exemple d'espace métrique CAT(-1) obtenu par recollement de polygones hyperboliques, et décrire son bord. Nous renvoyons à [BrH] pour plus de détails sur les complexes polyédraux que nous définissons précisément ci-dessous, qui sont des recollements isométriques de polyèdres convexes à courbure constante le long de faces. Nous renvoyons au théorème 3.38 pour la définition des espaces modèles $\mathscr{M}_{\kappa,n}$.

Soient $\kappa \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Un *hyperplan* de $\mathscr{M}_{\kappa,n}$ est une sous-variété totalement géodésique complète connexe de codimension 1 de $\mathscr{M}_{\kappa,n}$. Pour toute partie A de $\mathscr{M}_{\kappa,n}$, *l'enveloppe convexe* de A est l'intersection de tous les convexes de $\mathscr{M}_{\kappa,n}$ contenant A. Un *polyèdre convexe* P de $\mathscr{M}_{\kappa,n}$ est l'enveloppe convexe d'une partie finie de $\mathscr{M}_{\kappa,n}$, contenue dans une boule ouverte de rayon $\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ si $\kappa > 0$. Une *face* (propre) F de P est une intersection non vide de P et d'un hyperplan H de $\mathscr{M}_{\kappa,n}$ tel que P soit contenu dans l'adhérence d'une composante connexe de $\mathscr{M}_{\kappa,n} - H$. Nous dirons aussi que P est une face (impropre) de P. La *dimension* d'une face F est la dimension de l'intersection de tous les hyperplans de $\mathscr{M}_{\kappa,n}$ contenant F, et *l'intérieur* de F est l'intérieur topologique de F dans cette intersection.

Voici des exemples de polyèdres euclidiens de dimension 3 (de gauche à droite : tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre) et des analogues hyperboliques (dessinés par Mathematica).





Un *complexe polyédral* de courbure κ est un recollement isométrique de polyèdres convexes de courbure κ le long de faces, c'est-à-dire une famille $(C_i)_{i\in I}$, où C_i est un polyèdre convexe de $\mathscr{M}_{\kappa,n_i}$ pour un certain $n_i \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, stable par passage aux faces (si F

est une face de C_i, il existe $j \in I$ tel que $C_j = F$), munie d'une relation d'équivalence $\sim$ (appelée *recollement*) sur la réunion disjointe $\coprod_{i\in I} C_i$ telle que si $p : \coprod_{i\in I} C_i \to (\coprod_{i\in I} C_i)/\sim$ est la projection canonique, alors

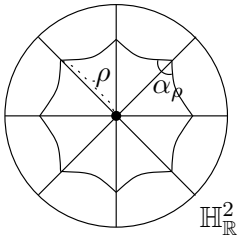
- pour tout $i \in I$, la restriction de p à l'intérieur de C_i est injective ;
- pour tous les $i, j \in I$ et $x \in C_i, y \in C_j$, si $p(x) = p(y)$, alors il existe une isométrie f de l'unique face F de C_i contenant x dans son intérieur sur l'unique face de C_j contenant y dans son intérieur telle que $f(x) = y$ et $p(z) = p(f(z))$ pour tout $z \in F$.

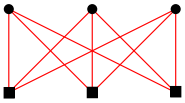
Nous appellerons parfois par abus *complexe polyédral* l'espace topologique quotient $X = (\coprod_{i\in I} C_i)/\sim$, où $\coprod_{i\in I} C_i$ est muni de la topologie somme disjointe. La famille $(C_i)_{i\in I}$, le recollement $\sim$ et la projection canonique p sont alors sous-entendus. Si $\kappa = -1, 0, +1$, alors X est appelé un *complexe hyperbolique, euclidien, sphérique par morceaux*. La *dimension* de X est la borne supérieure des dimensions des C_i pour $i \in I$ (qui peut valoir $+\infty$). Nous dirons que X est un *complexe polygonal* si sa dimension est 2.

Un *chemin géodésique par morceaux* dans un complexe polyédral X est une application $c : [a, b] \to X$ telle qu'il existe une subdivision $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = b$ et des segments géodésiques $c_k : [t_{k-1}, t_k] \to C_{i_k}$ tels que $c(t) = p(c_k(t))$ pour tous les $t \in [t_{k-1}, t_k]$ et $k \in \{1, \ldots, m\}$. Sa *longueur* est $\ell(c) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{long}(c_k)$. Si X est connexe, la *distance* $d(x, y)$ entre deux points x et y de X est la borne inférieure des longueurs des chemins géodésiques par morceaux entre x et y. Si la famille $(C_i)_{i\in I}$ n'a qu'un nombre fini de classes d'isométrie d'éléments, alors l'application $d : (x, y) \mapsto d(x, y)$, appelée la *distance polyédrale* de X, est une distance complète sur X (voir [BrH, Theo. 7.50]).

Pour tout entier $p \geq 5$, il existe un polygone hyperbolique P_p régulier à p côtés et à angles droits, unique à isométrie près.

Par exemple, pour tout $\rho \in]0, 1]$, notons $P_p(\rho)$ l'enveloppe convexe dans le modèle du disque $(\mathbb{B}_2, ds^2_{\mathrm{hyp}})$ du plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ des points $z_k(\rho) = \rho e^{2\pi i \frac{k}{p}}$ pour $k = 0, \ldots, p-1$. L'angle α_ρ de $P_n(\rho)$ en $z_k(t)$ est indépendant de k, car le groupe $\mathrm{O}(2)$ préserve le disque unité et sa métrique hyperbolique. Il est strictement décroissant en ρ, par les formules de trigonométrie hyperbolique. Il converge quand ρ tend vers 0 vers l'angle en un sommet d'un polygone euclidien régulier à n côtés, qui est strictement supérieur à $\frac{\pi}{2}$, car $n \geq 5$. Il converge vers 0 quand ρ tend vers 1. Par continuité, il existe donc un unique $\rho \in]0, 1[$ tel que $\alpha_\rho = \frac{\pi}{2}$.

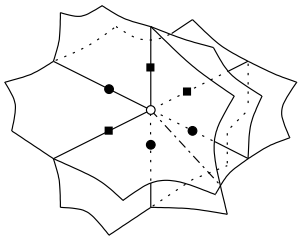




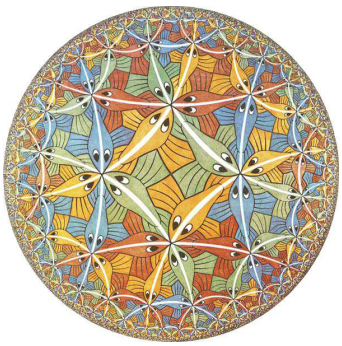
Pour tout entier $q \geq 2$, notons L_q le graphe bipartie complet à $q + q$ sommets : c'est le graphe d'ensemble des sommets $\{1, \ldots, 2q\}$ et d'ensembles des arêtes $\{(i, j) : 1 \leq i \leq q,\ q+1 \leq j \leq 2q\}$. Sa *maille* (la longueur d'un plus petit cycle d'arêtes sans aller-retour) est 4.

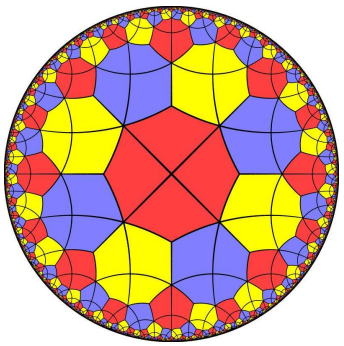
Bourdon [Bourd2] a démontré que pour tous les entiers $p \geq 5$ et $q \geq 2$, il existe un unique (à isométrie près) complexe polygonal hyperbolique par morceaux $I_{p,q}$, dont les polygones sont des polygones hyperboliques réguliers à p côtés, et dont les sphères de centre tout sommet et de rayon assez petit sont homéomorphes au graphe bipartie complet L_q.

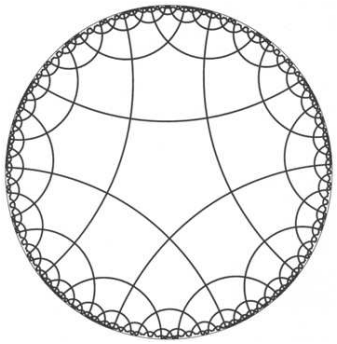
Pour $p = 5$ et $q = 3$, voici le recollement des 9 pentagones hyperboliques contenant un sommet fixé de $I_{5,3}$. Notons que $I_{p,q}$ n'est pas plongeable dans $\mathbb{R}^3$ si $q \geq 3$ car L_q n'est pas planaire. La ligne - — - — - — - dans le dessin ci-contre n'appartient pas à l'intersection de deux polygones de $I_{5,3}$.



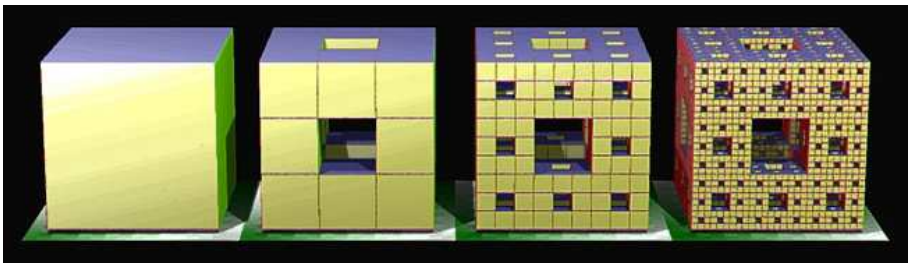
Par exemple, lorsque $p = 5$ et $q = 2$, le complexe polygonal $I_{p,q}$ est le pavage par pentagones hyperboliques du plan hyperbolique donné par la figure de droite ci-dessous. (Les autres dessins sont d'autres pavages par des polygones hyperboliques du plan hyperbolique, celui de gauche étant décoré par Escher.)







Muni de sa distance polyédrale, ce complexe polygonal $I_{p,q}$ (appelé *l'immeuble hyperbolique de Bourdon*) est un espace métrique CAT(-1) (voir par exemple [BrH]). Benakli [Ben] a démontré que son bord à l'infini $\partial_\infty I_{p,q}$ est homéomorphe à la courbe de Menger.



La *courbe de Menger* (aussi appelée l'*éponge de Menger*) est l'unique (à homéomorphisme près) espace topologique métrisable, compact, connexe, localement connexe par arcs, sans point de coupure local (c'est-à-dire sans point qui, quand on l'enlève, rend non connexe tout voisinage de ce point), non plongeable dans $\mathbb{R}^2$, de dimension topologique 1 (c'est-à-dire dont tout point admet un système fondamental de voisinages dont la frontière est totalement discontinue). Une manière de la construire est de prendre le cube unité de $\mathbb{R}^3$, de le décomposer en 27 cubes de longueur de côté $1/3$, d'enlever les intérieurs des 7 cubes qui ne rencontrent pas les arêtes du cube unité, d'itérer, et de prendre l'intersection décroissante.

Remarque. Si X est un espace métrique CAT(0) propre, alors l'ensemble des bouts de X (au sens de Freudenthal, voir par exemple [Pau4, §4.5]) est l'ensemble des composantes connexes de $\partial_\infty X$.

Exercice E.51 *Soient* (X, d) *un espace métrique* CAT(0) *complet,* ϕ *une isométrie de* (X, d)*,* $d_\phi : X \to [0, +\infty[$ *l'application définie par* $x \mapsto d(x, \phi(x))$*. Rappelons que*

$$\ell(\phi) = \inf_{x \in X} d(x, \phi(x))$$

est appelé la distance de translation de ϕ *dans* X*, que l'isométrie* ϕ *est dite elliptique si elle fixe (au moins) un point de* X*, hyperbolique si* d_ϕ *atteint sa borne inférieure sur* X *et si* $\ell(\phi) > 0$*, et parabolique sinon*

(1) Montrer que l'application d_ϕ *est convexe.*

(2) Montrer que s'il existe un entier m *non nul tel que* ϕ^m *est elliptique, alors* ϕ *est elliptique.*

(3) Supposons que ϕ *est une isométrie hyperbolique de* (X, d)*. Soit* x_0 *un point de* X *où la borne inférieure de* d_ϕ *est atteinte. Montrer qu'il existe une géodésique* $c : \mathbb{R} \to X$ *(paramétrée par longueur d'arc) qui passe par* $\phi^m(x_0)$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}$*. Montrer que pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, nous avons* $\phi(c(t)) = c(t + \ell(\phi))$*. Nous dirons que* c *est un axe de translation de* ϕ*. Montrer que tous les axes de translation de* ϕ *sont parallèles.*

(4) Supposons maintenant que ϕ *est une isométrie parabolique et que* X *est propre. Montrer qu'il existe une suite de points* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* X *qui part à l'infini (c'est-à-dire telle que tout compact de* X *ne contienne qu'un nombre fini de termes de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$*) et telle que* $d_\phi(x_n)$ *soit bornée. En déduire que* ϕ *admet un point fixe dans* $\partial_\infty X$*. Montrer qu'une isométrie parabolique peut avoir plusieurs points fixes sur* $\partial_\infty X$*.*

(5) Illustrer ce qui précède dans le cadre des espaces métriques CAT(-1) *et en particulier des espaces hyperboliques réels* $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$*.*

3.7.2 Fonctions de Busemann et horosphères

Soient (Z, d) un espace métrique et $c : [0, +\infty[\to Z$ un rayon géodésique dans Z.
La *fonction de Busemann* de c est l'application $\beta_c : Z \to \mathbb{R}$ définie par

$$\beta_c : x \mapsto \lim_{t \to +\infty} d(x, c(t)) - t \ .$$

Remarques. (1) Cette limite existe. En effet, pour tout $x \in Z$, l'application $t \mapsto d(x, c(t)) - t$ est décroissante (car, par l'inégalité triangulaire,

$$d(x, c(t)) - t \leq d(x, c(t')) + (t - t') - t$$

si $t' \leq t$), minorée par $-d(x, c(0)$ (par l'inégalité triangulaire inverse), donc converge.

(2) Pour tout $x \in Z$, nous avons, par l'inégalité triangulaire inverse,

$$|\beta_c(x)| \leq d(x, c(0))$$

et l'application β_c est 1-lipschitzienne. Elle est convexe si Z est CAT(0).

(3) Si Z est CAT(0), si c et c' sont des rayons géodésiques asymptotes dans X, alors $\beta_{c'} - \beta_c$ est constante (elle vaut la limite quant t tend vers $+\infty$ de la distance algébrique le long de c' entre $c'(t)$ et la projection orthogonale de $c(t)$ sur (l'image de) c').

Soit (X, d) un espace métrique CAT(0) complet (par exemple une variété de Hadamard). La *fonction de Busemann* de X est l'application $\beta : \partial_\infty X \times X \times X \to \mathbb{R}$ définie par $(\xi, x, y) \mapsto \beta_\xi(x, y)$ où

$$\beta_\xi(x, y) = \lim_{t \to +\infty} d(x, c(t)) - d(y, c(t)) \ ,$$

où c est un rayon géodésique de point à l'infini ξ.

Remarques. (1) Par ce qui précède, cette limite existe (elle vaut $\beta_c(x) - \beta_c(y)$). Elle est indépendante de c, et pour tous les $x, y \in X$ et $\xi \in \partial_\infty X$, nous avons

$$|\beta_\xi(x, y)| \leq d(x, y) \ .$$

(2) La fonction de Busemann vérifie les propriétés de *cocycles* suivantes : pour tous les $\xi \in \partial_\infty \widetilde{M}$ et $x, y, z \in \widetilde{M}$, nous avons

$$\beta_\xi(x, y) + \beta_\xi(y, z) = \beta_\xi(x, z), \quad \beta_\xi(y, x) = -\beta_\xi(x, y) \ .$$

(3) La fonction de Busemann est invariante par isométrie, c'est-à-dire que pour tous les $\gamma \in \mathrm{Isom}(X, d)$, $\xi \in \partial_\infty \widetilde{M}$ et $x, y \in \widetilde{M}$, nous avons

$$\beta_{\gamma\xi}(\gamma x, \gamma y) = \beta_\xi(x, y) \ .$$

Les lignes de niveau et les sous-niveaux des fonctions de Busemann des rayons géodésiques jouent un rôle important dans la géométrie des espaces CAT(0).

Pour tout $\xi \in \partial_\infty X$ et tout $x \in X$, *l'horosphère* (Poincaré disait « horisphère ») de X de *centre* ξ passant par x est

$$H(\xi, x) = \{y \in X \ : \ \beta_\xi(y, x) = 0\} \ .$$

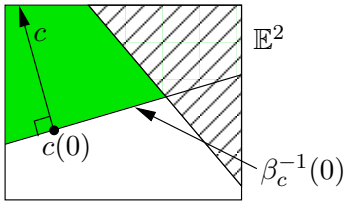
L'horoboule (fermée) de X de *centre* ξ dont le bord contient x est

$$HB(\xi, x) = \{y \in X \ : \ \beta_\xi(y, x) \leq 0\} \ .$$

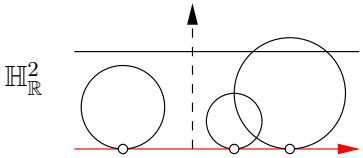
L'horoboule ouverte de X de *centre* ξ dont le bord contient x est $\{y \in X \ : \ \beta_\xi(y, x) < 0\}$.

Exemples.

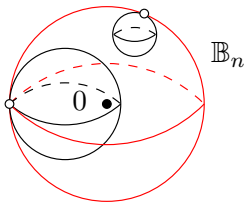
(1) Dans l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$, les horosphères sont les hyperplans affines, et les horoboules sont les demi-espaces.



(2) Dans le demi-espace supérieur hyperbolique $(\mathbb{R}^n_+, ds^2_{\mathrm{hyp}})$, les horosphères sont ou bien les hyperplans affines horizontaux ou bien les sphères euclidiennes tangentes à l'hyperplan de coordonnées horizontal $\mathbb{R}^{n-1}$, privées de leur point de tangence.

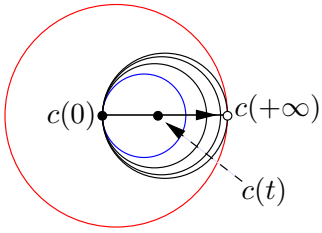


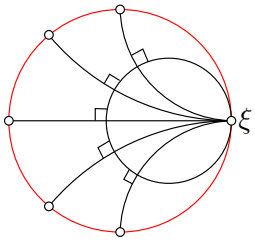
(3) Dans la boule de Poincaré $(\mathbb{B}_n, ds^2_{\text{hyp}})$, les horosphères (respectivement horoboules) sont les sphères (respectivement boules) euclidiennes tangentes à la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$, privées de leur point de tangence.



Remarques. (1) Les horoboules sont les limites des grandes boules, et leurs centres (qui sont des points à l'infini) les limites des centres de ces boules.

Plus précisément, soit $c : [0, +\infty[\to X$ un rayon géodésique de X, et pour tout $t \geq 0$, soit $B(t)$ la boule de centre $c(t)$ et de rayon t. Alors (voir le dessin de gauche ci-dessous) l'application $t \mapsto B(t)$ converge vers l'horoboule HB de centre $c(+\infty)$ contenant $c(0)$ dans son bord pour la distance de Hausdorff sur les bornés (c'est-à-dire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, si K_N est la boule de centre $c(0)$ et de rayon N, alors le fermé $(B(t) \cap K_N) \cup {}^cK_N$ converge vers le fermé $(HB \cap K_N) \cup {}^cK_N$ pour la distance de Hausdorff sur les fermés de X). Ainsi, le centre de l'horoboule HB est la limite quand t tend vers $+\infty$ des centres $c(t)$ des boules $B(t)$, ce qui explique la terminologie. De même, la sphère $S(t)$ de centre $c(t)$ et de rayon t converge pour la distance de Hausdorff sur les bornés vers l'horosphère de centre ξ passant par $c(0)$.





(2) Si (X, d) est une variété riemannienne, alors toute horosphère de centre $\xi \in \partial_\infty X$ est une hypersurface lisse, perpendiculaire aux droites géodésiques de point à l'infini ξ (voir le dessin de droite ci-dessus).

(3) Une horoboule HB est convexe, et la projection orthogonale π_{HB} sur HB vaut, en tout point x n'appartenant pas à HB, l'intersection avec l'horosphère bord de HB de l'unique rayon géodésique d'origine x et de point à l'infini le centre de HB.

(4) Si X est CAT(-1), alors l'adhérence dans $\overline{X}^{\text{geo}} = X \cup \partial_\infty X$ d'une horoboule HB ou d'une horosphère H est la réunion de cette horoboule ou horosphère avec son centre (qui est un point à l'infini).

Ceci n'est en général plus vrai si X est seulement supposé être CAT(0). Par exemple, l'adhérence d'une horoboule de $\mathbb{E}^n$ est la réunion de cette horoboule et d'une hémisphère de $\partial_\infty \mathbb{E}^n = \mathbb{S}_{n-1}$. Ce même exemple montre que l'énoncé suivant aussi n'est plus vrai en général dans un espace métrique CAT(0).

Exercice E.52 *Soient X un espace métrique* CAT(-1) *et C un convexe non vide de X, complet pour la distance induite. Montrer que la projection $\pi_C : X \to C$ admet une unique extension continue $\pi_C : X \cup (\partial_\infty X - \partial_\infty C) \to C$, qui à $\xi \in \partial_\infty X - \partial_\infty C$ associe l'unique point x de C tel que l'horoboule de centre ξ contenant x dans son bord ne rencontre C qu'en $\{x\}$.*

3.7.3 Feuilletages stable et instable du flot géodésique

Soient M une variété riemannienne complète simplement connexe, à courbure sectionnelle inférieure ou égale à -1, et d sa distance riemannienne (qui est CAT(-1)). Notons $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ son flot géodésique (voir la partie 3.3).

Pour tout vecteur tangent unitaire $v \in T^1M$, notons $c_v : \mathbb{R} \to M$ la géodésique telle que $\dot{c}(0) = v$. Notons

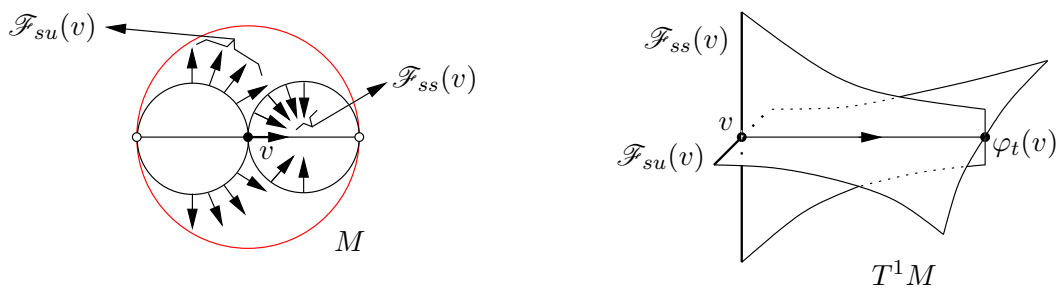
$$\mathscr{F}_{ss}(v) = \{w \in T^1M \ : \ \lim_{t\to+\infty} d(c_v(t), c_w(t)) = 0\} \ ,$$

appelé la *feuille stable forte* de v pour le flot géodésique de M. De même, notons

$$\mathscr{F}_{su}(v) = \{w \in T^1M \ : \ \lim_{t\to-\infty} d(c_v(t), c_w(t)) = 0\} \ ,$$

appelé la *feuille instable forte* de v pour le flot géodésique de M.

Alors $\mathscr{F}_{ss}(v)$ (respectivement $\mathscr{F}_{su}(v)$) est la sous-variété lisse de T^1M, relevée par la normale rentrante (respectivement sortante) de l'horosphère de centre $c_v(-\infty)$ (respectivement $c_v(+\infty)$) passant par $c_v(0)$ (voir le dessin de gauche ci-dessous).



Remarque. Considérons les sous-espaces suivants de $T(T^1M)$:

$$E_{ss} = \bigcup_{v\in T^1M} T_v\mathscr{F}_{ss}(v), \quad E_{su} = \bigcup_{v\in T^1M} T_v\mathscr{F}_{su}(v), \quad E_0 = \bigcup_{v\in T^1M} \mathbb{R}Z(v)$$

(où nous notons $Z(v)$ la valeur en v du champ de vecteurs géodésique Z, c'est-à-dire que $Z(v) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\phi_t(v)$ est le vecteur tangent en $t = 0$ à la courbe $t \mapsto \dot{c}_v(t) = \phi_t(v)$ lisse dans T^1M, voir la remarque (1) de la partie 3.3). Ce sont des sous-fibrés vectoriels topologiques de TT^1M.

Le flot géodésique $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur $N = T^1M$ est un *flot d'Anosov* pour la norme riemannienne de Sasaki $\|\cdot\|$ de N (voir la fin de la partie 3.2), c'est-à-dire que le fibré vectoriel $TN \to N$ est somme directe de trois sous-fibrés vectoriels topologiques

$$TN = E_{su} \oplus E_0 \oplus E_{ss}$$

invariants par ϕ_t pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $E_0 \cap T_vN = \mathbb{R}\frac{d}{dt}\phi_t(v)$ pour tout $v \in N$, et qu'il existe des constantes $c, \lambda > 0$ telles que pour tout $t > 0$ et tout $v \in N$, nous ayons

$$\|T_v\phi_{t\,|E_{ss}}\| \leq c\,e^{-\lambda t} \ \text{ et } \ \|T_v\phi_{-t\,|E_{su}}\| \leq c\,e^{-\lambda t} \ .$$

Ainsi, les feuilles fortement stables sont contractées par le flot géodésique, et les feuilles fortement instables sont dilatées (voir le dessin de droite ci-dessus).

Nous renvoyons par exemple à [KH] pour plus d'informations sur les flots d'Anosov.

3.7.4 Structure conforme au bord des espaces CAT(-1)

Soit X un espace métrique CAT(-1) complet. Le bord à l'infini de X possède alors des propriétés plus fortes que dans le cas CAT(0) général. Les résultats de cette sous-partie ont une extension évidente aux espaces métriques CAT(κ) où $\kappa < 0$, par homothétie des distances.

La propriété suivante, dite *de visibilité*, n'est pas vérifiée par les espaces métriques CAT(0) généraux (considérer par exemple $\mathbb{E}^2$).

Exercice E.53 *Si ξ et η sont deux points distincts de $\partial_\infty X$, alors il existe une droite géodésique $c : \mathbb{R} \to X$, unique à translations près à la source, telle que les rayons géodésiques $t \mapsto c(t)$ et $t \mapsto c(-t)$ convergent vers ξ et η quand $t \to +\infty$.*

Si ξ et η sont deux point distincts de $\partial_\infty X$, nous noterons $]\xi, \eta[$ l'image d'une droite géodésique dont les points à l'infini sont ξ et η. L'hypothèse de complétude de X est nécessaire dans cet exercice, comme le montre l'espace CAT(-1) qui est l'une des deux composantes connexes du complémentaire d'une droite géodésique dans le plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$.

Nous allons munir le bord à l'infini de X d'une structure conforme naturelle, au sens suivant.

Deux distances d et δ sur un ensemble Z sont dites *conformément équivalentes* si elles induisent la même topologie et si pour tout $x_0 \in Z$, la limite

$$\lim_{x \to x_0,\, x \neq x_0} \frac{d(x, x_0)}{\delta(x, x_0)}$$

existe et est strictement positive. La relation « être conformément équivalente à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des distances sur Z, et une *structure conforme* sur Z est une classe d'équivalence pour cette relation.

Soient Z et Z' deux ensembles munis d'une structure conforme, et d et d' des distances sur Z et Z' les représentant. Une bijection $\gamma : Z \to Z'$ est *conforme* si les distances d et $\gamma^* d' : (x, y) \mapsto d'(\gamma x, \gamma y)$ sont conformément équivalentes, c'est-à-dire si pour tout $x_0 \in Z$, la limite

$$\lim_{x \to x_0,\, x \neq x_0} \frac{d'(\gamma x, \gamma x_0)}{d(x, x_0)}$$

existe et est strictement positive. Ceci ne dépend pas du choix des représentants d et d' des structures conformes de Z et Z'. Une structure conforme sur un ensemble muni d'une action d'un groupe G sera dite *naturelle* sous l'action de ce groupe si tout élément de G agit par transformations conformes.

Pour tout $x \in X$, pour tous les $\xi, \xi' \in \partial_\infty X$ distincts, appelons *distance visuelle* entre ξ et ξ' vue de x la quantité

$$d_x(\xi, \xi') = \lim_{t \to +\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(d(x, c(t)) + d(x, c'(t)) - d(c(t), c'(t))\right)} , \qquad (\cdot 65 \cdot)$$

pour tous les rayons géodésiques c et c' de points à l'infini respectivement ξ et ξ'. De manière équivalente, si $t \mapsto \rho_t$ et $t \mapsto \rho'_t$ sont les rayons géodésiques d'origine x qui convergent vers ξ et ξ', alors

$$d_x(\xi, \xi') = \lim_{t \to +\infty} e^{\frac{1}{2} d(\rho_t, \rho'_t) - t} . \qquad (\cdot 66 \cdot)$$

Encore de manière équivalente, si u est n'importe quel point de la géodésique entre ξ et ξ', alors

$$d_x(\xi,\xi') = e^{-\frac{1}{2}(\beta_\xi(x,u)+\beta_{\xi'}(x,u))} \ . \tag{$\cdot 67 \cdot$}$$

Si $\xi = \xi'$, posons $d_x(\xi,\xi') = 0$.

Proposition 3.70 *Soit X un espace métrique* $\mathrm{CAT}(-1)$ *complet. Pour tout $x \in X$, les limites ci-dessus existent et les trois formules ci-dessus coïncident. La distance visuelle d_x est une distance sur $\partial_\infty X$, dont la topologie induite est la topologie originelle de $\partial_\infty X$. Pour tous les $x, y \in X$ et $\xi, \eta \in \partial_\infty X$ distincts, nous avons*

$$e^{-d(x,\,]\xi,\eta[)} \leq d_x(\xi,\eta) \leq (1+\sqrt{2})e^{-d(x,\,]\xi,\eta[)} \ , \tag{$\cdot 68 \cdot$}$$

$$\frac{d_x(\xi,\eta)}{d_y(\xi,\eta)} = e^{-\frac{1}{2}(\beta_\xi(x,y)+\beta_\eta(x,y))} \ , \tag{$\cdot 69 \cdot$}$$

et, pour toute isométrie γ de X, nous avons

$$d_{\gamma x}(\gamma\xi,\gamma\eta) = d_x(\xi,\eta) \ . \tag{$\cdot 70 \cdot$}$$

En particulier, il découle de la formule ($\cdot 69 \cdot$) que les distances visuelles d_x pour $x \in X$ appartiennent à la même structure conforme sur $\partial_\infty X$, et des formules ($\cdot 69 \cdot$) et ($\cdot 70 \cdot$) que les extensions au bord des isométries de X sont des transformations conformes de cette structure conforme.

Démonstration. En prenant la formule ($\cdot 67 \cdot$) (qui ne dépend effectivement pas de u par la propriété de cocycle de la fonction de Busemann) pour la définition de d_x, la formule ($\cdot 69 \cdot$) découle de cette propriété de cocycle, la formule ($\cdot 66 \cdot$) découle de la définition de la fonction de Busemann, et la formule ($\cdot 65 \cdot$) s'en déduit par les propriétés des rayons asymptotes. La propriété d'équivariance ($\cdot 70 \cdot$) découle de celle des fonctions de Busemann.

Montrons que d_x est une distance, en reprenant les arguments de [Bourd1]. Seule l'inégalité triangulaire n'est pas immédiate. Pour tous les $x, y, z \in X$ tels que $y \neq x$ et $z \neq x$, posons

$$\delta_x(y,z) = \Big(\frac{\cosh d(y,z) - \cosh(d(x,y)-d(x,z))}{2\sinh d(x,y)\ \sinh d(x,z)}\Big)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Par les inégalités triangulaires $|d(x,y)-d(x,z)| \leq d(y,z) \leq d(y,x)+d(x,z)$, le nombre réel $\delta_x(y,z)$ est bien défini et appartient à $[0,1]$. Par la loi du cosinus hyperbolique I (voir la proposition 3.23), si $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ sont les sommets d'un triangle de comparaison dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ du triangle géodésique de X de sommets x, y, z, alors

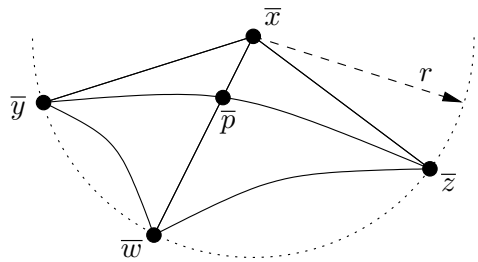
$$\delta_x(y,z) = \sin\frac{\angle_{\overline{x}}(\overline{y},\overline{z})}{2} \ . \tag{$\cdot 71 \cdot$}$$

Notons $S(x,r)$ la sphère dans X de centre x et de rayon r.

Lemme 3.71 *Pour tout $r > 0$, l'application $\delta_x : S(x,r) \times S(x,r) \to [0,1]$ est une distance.*

Démonstration. Seule l'inégalité triangulaire n'est pas immédiate. Soient y, z, w trois points de $S(x,r)$, montrons que $\delta_x(y,z) \leq \delta_x(y,w) + \delta_x(w,z)$. Comme $\delta_x(y,z) \leq 1$, nous pouvons supposer que $\delta_x(y,w) + \delta_x(w,z) < 1$.

Soient $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w} \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ tels que les triangles géodésiques de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ de sommets $\overline{x}, \overline{y}, \overline{w}$ et $\overline{x}, \overline{w}, \overline{z}$ soient des triangles de comparaison des triangles géodésiques de X de sommets x, y, w et x, w, z, avec $\overline{y}$ et $\overline{z}$ de part et d'autre de la géodésique passant par $\overline{x}$ et $\overline{w}$.



Nous avons $\angle_{\overline{x}}(\overline{y}, \overline{w}) + \angle_{\overline{x}}(\overline{w}, \overline{z}) < \pi$ car $\delta_x(y, w) + \delta_x(w, z) < 1$ et par la formule ($\cdot$ 71 $\cdot$). Donc la corde $[\overline{y}, \overline{z}]$ du cercle $S(\overline{x}, r)$ rencontre le rayon $[\overline{x}, \overline{w}]$ de ce cercle en un point, que nous notons $\overline{p}$. Soit $p \in [x, w]$ le point correspondant à $\overline{p}$. Alors par l'inégalité triangulaire et l'inégalité CAT(-1), nous avons

$$d(y, z) \leq d(y, p) + d(p, z) \leq d(\overline{y}, \overline{p}) + d(\overline{p}, \overline{z}) = d(\overline{y}, \overline{z}) \ .$$

Donc, par la définition de δ_x et par la formule ($\cdot$ 71 $\cdot$) appliquée dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, nous avons

$$\delta_x(y, z) = \Big(\frac{\cosh d(y, z)}{2 \sinh^2 r}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\frac{\cosh d(\overline{y}, \overline{z})}{2 \sinh^2 r}\Big)^{\frac{1}{2}} = \delta_{\overline{x}}(\overline{y}, \overline{z}) = \sin \frac{\angle_{\overline{x}}(\overline{y}, \overline{z})}{2} \ .$$

Or $\angle_{\overline{x}}(\overline{y}, \overline{z}) = \angle_{\overline{x}}(\overline{y}, \overline{w}) + \angle_{\overline{x}}(\overline{w}, \overline{z})$ et $\sin(u + v) \leq \sin u + \sin v$ si $u, v \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Le résultat s'en déduit. $\square$

Lemme 3.72 *Pour tous les $\xi, \xi' \in \partial_\infty X$, si $t \mapsto \rho_t$ et $t \mapsto \rho'_t$ sont les rayons géodésiques d'origine x qui convergent vers ξ et ξ', alors*

$$\lim_{t \to +\infty} \delta_x(\rho_t, \rho'_t) = d_x(\xi, \xi') \ .$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que $\xi \neq \xi'$. En particulier, $\lim_{t \to +\infty} d(\rho_t, \rho'_t) = +\infty$. Alors quand $t \to +\infty$, nous avons

$$\delta_x(\rho_t, \rho'_t) = \Big(\frac{\cosh d(\rho_t, \rho'_t)}{2 \sinh^2 t}\Big)^{\frac{1}{2}} \sim e^{\frac{1}{2} d(\rho_t, \rho'_t) - t} \ .$$

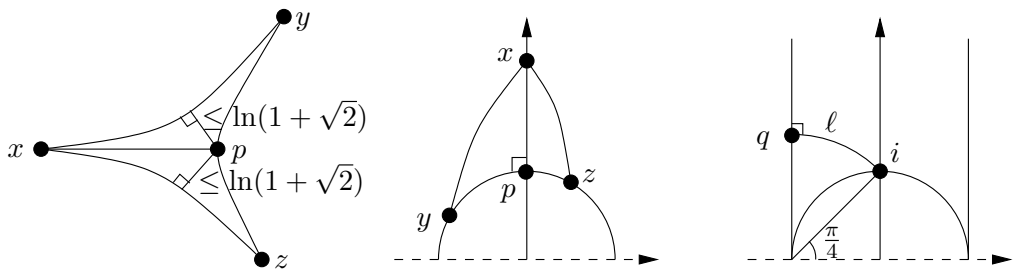
Le résultat s'en déduit par la définition ($\cdot$ 66 $\cdot$) de la distance visuelle. $\square$

Par passage à la limite quand $r \to +\infty$ de l'inégalité triangulaire de δ_x sur $S(x, r)$, l'inégalité triangulaire pour d_x découle des deux lemmes précédents.

Montrons maintenant la formule ($\cdot$ 68 $\cdot$). Le résultat suivant est connu dans la littérature sous l'énoncé de « la borne supérieure des meilleures constantes d'hyperbolicité des espaces métriques CAT(-1) est $\ln(1 + \sqrt{2})$ ». Nous renvoyons à [BrH] pour des explications.

Lemme 3.73 *Soient (X, d) un espace métrique* CAT(-1) *et $x, y, z \in X$. Le point p de $[y, z]$ le plus proche de x vérifie $d(p, [x, y]) \leq \ln(1 + \sqrt{2})$ et $d(p, [x, z]) \leq \ln(1 + \sqrt{2})$.*

La constante $\ln(1 + \sqrt{2})$ est optimale. Ce lemme s'étend, avec les conventions évidentes, lorsque $x, y, z \in X \cup \partial_\infty X$. Par exemple, pour tous les $x \in X$ et $\xi, \eta \in \partial_\infty X$ distincts, la projection p de x sur la droite géodésique $]\xi, \eta[$ de points à l'infini ξ et η vérifie $d(p, [x, \xi[) \leq \ln(1 + \sqrt{2})$ et $d(p, [x, \eta[) \leq \ln(1 + \sqrt{2})$.



Démonstration. Par comparaison, nous pouvons supposer que X est le modèle du demi-plan supérieur du plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Utilisons la notation complexe. Par les propriétés de transitivité des isométries, nous pouvons supposer (voir le dessin du milieu ci-dessus) que x appartient à l'axe imaginaire et que le segment géodésique $[y, z]$ est contenu dans le demi-cercle unité supérieur de $\mathbb{R}^2$ avec z avant y pour l'ordre trigonométrique. En faisant tendre x, y, z vers $\infty, -1, 1$ respectivement, et par symétrie, il suffit de montrer que le point i est à distance hyperbolique au plus $\ln(1+\sqrt{2})$ de la demi-droite d'équation $\operatorname{Re} z = -1$. Par orthogonalité de tout demi-cercle centré en -1 avec cette demi-droite, qui est géodésique, la projection q de i sur cette demi-droite est le point $-1+\sqrt{2}\, i$ intersection du cercle de centre -1 passant par i, donc de rayon $\sqrt{2}$, avec cette demi-droite (voir le dessin de droite ci-dessus). Par le lemme 3.19, la distance hyperbolique ℓ entre i et q est égale à

$$\ell = \operatorname{arcsinh}(\cot \frac{\pi}{4}) = \operatorname{arcsinh} 1 = \ln(1+\sqrt{2}) \ .$$

Le résultat en découle. □

La formule ($\cdot$ 68 $\cdot$) découle alors de la définition ($\cdot$ 66 $\cdot$) de la distance visuelle, du lemme 3.73 appliqué aux points x, ρ_t, ρ'_t comme dans les notations de cette définition, et des inégalités triangulaires.

Pour conclure la démonstration de la proposition 3.70, le lemme 3.73 (et la convexité de la distance) montre que deux points ξ et η de $\partial_\infty X$ sont proches, c'est-à-dire que les rayons géodésiques $[x, \xi[$ et $[x, \eta[$ sont proches, si et seulement si la distance du point x à la droite géodésique $]\xi, \eta[$ est grande. La formule ($\cdot$ 68 $\cdot$) montre alors que la distance visuelle d_x induit la topologie des cônes sur $\partial_\infty X$. □

3.7.5 Distance de Tits au bord des espaces CAT(0)

Soit (X, d) un espace métrique CAT(0) complet. Nous allons aussi construire des distances naturelles sur le bord à l'infini de X, mais qui n'induisent en général pas la topologie des cônes sur $\partial_\infty X$.

Pour tous les $x \in X$ et $\xi, \eta \in \partial_\infty X$, notons ρ_ξ et ρ_η les rayons géodésiques d'origine x et de points à l'infini ξ et η respectivement, et $\angle_x(\xi, \eta)$ l'angle de comparaison en x entre ρ_ξ et ρ_η, c'est-à-dire la limite supérieure quant $t \to 0$ des angles au point correspondant à x d'un triangle de comparison du triangle géodésique de sommets $x, \rho_\xi(t), \rho_\eta(t)$.

Définissons la *distance angulaire* entre ξ et η comme

$$\angle(\xi, \eta) = \sup_{x \in X} \angle_x(\xi, \eta) \ .$$

Proposition 3.74 *Soit (X, d) un espace métrique* CAT(0) *complet.*

(i) L'application $\angle : \partial_\infty X \times \partial_\infty X \to [0, \pi]$ est une distance complète CAT(1) *sur $\partial_\infty X$, appelée la* distance angulaire. *Les extensions au bord des isométries de X sont des isométries pour la distance angulaire.*

(ii) Pour tous les $\xi, \eta \in \partial_\infty X$, nous avons

$$\angle(\xi, \eta) = \lim_{t \to +\infty} \angle_{\rho_\xi(t)}(\xi, \eta) \ .$$

(iii) Pour tous les $\xi, \eta \in \partial_\infty X$, nous avons

$$2 \sin \frac{\angle(\xi, \eta)}{2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{d(\rho_\xi(t), \rho_\eta(t))}{t} \ .$$

Lorsque l'espace $\partial_\infty X$ muni de la distance angulaire est connexe par arcs rectifiables, la distance de longueur de la distance angulaire est appelée la *distance de Tits* sur $\partial_\infty X$, et notée d_{Tits}.

Démonstration. Nous renvoyons à [BrH, Chap. II.9] pour une démonstration de ces assertions. □

Remarques. (1) Si $X = \mathbb{E}^n$, alors la distance angulaire entre deux directions est l'angle entre ces deux directions : pour tous les $x \in X$ et $\xi, \eta \in \partial_\infty X$, nous avons $\angle(\xi, \eta) = \angle_x(\xi, \eta)$.

(2) La borne supérieure $\sup_{x \in X} \angle_x(\xi, \eta)$ définissant la distance angulaire entre ξ et η n'est pas toujours atteinte. S'il existe une droite géodésique de points à l'infini ξ et η, alors cette borne supérieure est atteinte : en prenant un point x sur cette droite, nous avons $\angle(\xi, \eta) = \pi$. Mais contrairement au cas des espaces métriques CAT(-1), étant donné deux points distincts à l'infini ξ et η, il n'existe pas toujours de droite géodésique dont les deux points à l'infini sont ξ et η. Par exemple dans $X = \mathbb{E}^n$, si ξ et η sont deux directions non opposées (c'est-à-dire formant un angle différent de π), alors il n'existe pas de droite géodésique dont les deux points à l'infini sont ξ et η.

(3) La topologie induite par la distance angulaire est plus fine que la topologie des cônes sur $\partial_\infty X$ (c'est-à-dire que tout ouvert pour la topologie des cônes est un ouvert pour la topologie induite par la distance angulaire). Mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Par exemple, si X est un espace CAT(-1) complet, alors la topologie induite par la distance angulaire est la topologie discrète : par la remarque (2), nous avons

$$\angle(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi = \eta \\ \pi & \text{sinon} \ . \end{cases}$$

En particulier, la distance angulaire sur le bord d'un espace métrique CAT(-1) n'est pas connexe par arcs, et la distance de Tits est, par convention, égale à $+\infty$ en dehors de la diagonale de $\partial_\infty X \times \partial_\infty X$.

La distance de Tits sur $\partial_\infty X$ est l'un des outils pour une généralisation due à Gromov du théorème de rigidité de Mostow en rang supérieur à 2 (qui sera démontré dans la partie 4.4), pour laquelle nous renvoyons à [BaGS].

3.8 Exercices supplémentaires

Exercice E.54 Soit K un groupe de Lie compact d'élément neutre e, muni d'une action lisse à gauche sur une variété M connexe de dimension $n \geq 1$. Supposons l'action fidèle, c'est-à-dire que pour tout $k \in K$, si $kx = x$ pour tout $x \in M$, alors $k = e$.

(1) Rappelons que K admet une unique mesure de probabilité μ invariante par translations à droite. Montrer qu'il existe une métrique riemannienne g sur M telle que tout élément de K agisse par isométrie pour g.

(2) Soient $x \in M$ et $K_x = \{k \in K \ : \ kx = x\}$ le stabilisateur de x dans K. Pour tout $k \in K$, notons $A_k : M \to M$ l'application $y \mapsto ky$. En utilisant l'application exponentielle de g en x, montrer que l'application $\rho_x : K_x \to GL(T_xM)$, définie par $\rho_x(k) = T_xA_k$ pour tout $k \in K$, est un morphismes de groupes de Lie injectif.

(3) En déduire que la dimension de K est au plus $\frac{n(n+1)}{2}$.

(4) Montrer que le noyau de toute action lisse non triviale de $\mathrm{SL}_{m+1}(\mathbb{R})$ sur une variété est discret. Montrer qu'il n'existe pas d'action lisse non triviale de $\mathrm{SL}_{m+1}(\mathbb{R})$ sur une variété de dimension inférieure ou égale à $m-1$.

(5) Donner un exemple d'action lisse et fidèle de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur une variété de dimension n.

Exercice E.55 En utilisant la proposition 3.7, montrer que la courbe $c : t \mapsto (0, \ldots, 0, e^t)$ définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans le modèle du demi-espace supérieur $(\mathbb{R}^n_+, ds^2_{\mathrm{hyp}})$ de l'espace hyperbolique réel, est une géodésique.

Exercice E.56 Soient (M, g) une variété riemannienne et $x \in M$.

(1) Soient U un voisinage de 0 dans T_xM assez petit, $\exp_x : U \to M$ la carte exponentielle correspondante en x, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de T_xM, $(x^1, \ldots, x^n)$ les applications coordonnées correspondantes sur U, $(g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{C}^\infty(U)^{n^2}$ la matrice de la métrique riemannienne image réciproque $h = {\exp_x}^*(g_{|\exp_x(U)})$ correspondante à ces coordonnées, $\Gamma^k_{i,j} \in \mathrm{C}^\infty(U)$ les coefficients de Christoffel correspondants, et $y \mapsto \Gamma_y$ le tenseur de Christoffel de h dans U (qui est l'application lisse de U dans l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $T_xM \times T_xM$ dans T_xM définie par $\Gamma_y(u, v) = \Sigma^n_{i,j,k=1} \Gamma^k_{ij}(y) u_i v_j e_k$ si $u = \Sigma^n_{i=1} u_i e_i$ et $v = \Sigma^n_{i=1} v_i e_i$).

a) Montrer que $g_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$ (le symbole de Kronecker) et que $\Gamma^k_{i,j}(0) = 0$ pour $1 \leq i, j, k \leq n$. (ATTENTION : cette propriété n'est vraie qu'en 0 en général).

b) En déduire qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ et $\delta \in [0, 1[$ tels que si y appartient à boule B_{ϵ_0} de centre 0 et de rayon ϵ_0 pour la distance riemannienne de h, alors $\|\Gamma_y(u, v)\|_x \leq \delta \, \|u\|_x \|v\|_x$ pour tous les $u, v \in T_xM$.

c) Soit $c : [0, 1] \to U$ une géodésique contenue dans B_{ϵ_0}. Supposons qu'il existe $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ et $t_0 \in]0, a[$ tels que $c(t_0)$ appartienne à la sphère $S_\epsilon = \partial \overline{B}_\epsilon$, et $\dot{c}(t_0)$ soit tangent à S_ϵ. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour t suffisamment proche de t_0, nous ayons :

$$d(0, c(t)) \geq d(0, c(t_0)) + \lambda (t - t_0)^2.$$

(*Indication* : considérer la fonction $F(t) = \frac{1}{2} \|c(t)\|^2$ et montrer que $\ddot{F}(t_0) > 0$).

d) En déduire que si $\epsilon > 0$ est assez petit, alors la boule B de centre x et de rayon ϵ pour la distance riemannienne est convexe : pour tous les x et y dans B, il existe une géodésique (minimisante) reliant x et y dont l'image est contenue dans B.

Exercice E.57 Soient I, J des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $f : I \to]0, +\infty[$ une application lisse. Sur l'ouvert $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$, on considère la métrique riemannienne qui au point (r, θ) de $I \times J$ vaut

$$ds^2 = dr^2 + f(\theta)\, d\theta^2 \ .$$

À quelle condition sur f cette métrique riemannienne est-elle complète ? Montrer que sa courbure sectionnelle au point (r, θ) vaut

$$K = -\frac{f''(r)}{f(r)} \ .$$

Exercice E.58 Montrer que l'application ϕ de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$(t, \theta) \mapsto \Big(\frac{\cos\theta}{\cosh t}, \frac{\sin\theta}{\cosh t}, t - \tanh t\Big)$$

est un plongement C^∞ sur une sous-variété S de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la métrique riemannienne induite sur S par celle de $\mathbb{E}^3$ est

$$ds^2 = \tanh^2 t\, dt^2 + \frac{1}{\cosh^2 t}\, d\theta^2 \ .$$

Calculer l'aire et la courbure sectionnelle de la surface S. Est-elle complète ?

Pour les personnes ayant oublié la formule ad hoc, et qui malheureusement vont devoir la retrouver, une méthode de calcul de la courbure sectionnelle d'une métrique riemannienne de la forme $ds^2 = dr^2 + f(r)^2\, d\theta^2$ (en coordonnées polaires) utilise, avec (e_1, e_2) la base canonique du plan, le champ de vecteurs $J(r) = f(r)v(r)$ le long de la courbe $r \mapsto r\, e_1$ où $v(r)$ est le champ de vecteurs parallèle le long de cette courbe valant e_2 en $r = 0$.

Exercice E.59 Dans cet exercice, toutes les variétés sont des variétés réelles C^∞. Soient (M, g) une variété riemannienne connexe et ∇ sa connexion de Levi-Civita.

(1) Soit $c : [0, L] \to M$ un segment géodésique paramétré par longueur d'arc. Soient $N = [0, L] \times]-\epsilon, \epsilon[$ et $H : N \to M$ une application lisse telle que $H(t, 0) = c(t)$ pour tout $t \in [0, L]$. Nous noterons par la suite $c_s(t) = H(t, s)$ et $Y(t, s) = \frac{\partial H}{\partial s}(t, s)$ pour tout $(t, s) \in N$. Notons $\overline{\nabla}$ la connexion sur N image réciproque par l'application H de la connexion ∇ sur M. Pour tout $s \in]-\epsilon, \epsilon[$, notons $L(c_s)$ la longueur riemannienne de la courbe lisse c_s. Montrer la *formule de la variation première* :

$$\frac{d}{ds}_{|s=0} L(c_s) = g(Y(L, 0), \dot{c}(L)) - g(Y(0, 0), \dot{c}(0)) \ .$$

Nous admettrons par la suite la *formule de la variation seconde* :

$$\frac{d^2}{ds^2}_{|s=0} L(c_s) = g(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} Y(L, 0), \dot{c}(L)) - g(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} Y(0, 0), \dot{c}(0)) +$$

$$\int_0^L \Big(g(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(t, 0), \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(t, 0)) - R(Y(t, 0), \dot{c}(t), \dot{c}(t), Y(t, 0)) - g(\dot{c}(t), \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(t, 0))^2\Big)\, dt \ .$$

(2) Supposons (M, g) complète et à courbure sectionnelle strictement positive. Soient N_1 et N_2 deux sous-variétés compactes non vides de M, totalement géodésiques, de dimensions

respectives p et q telles que $p+q > \dim M$. Supposons que l'intersection de N_1 et N_2 est vide.

a) Montrer qu'il existe un segment géodésique $c : [0, L] \to M$ paramétré par longueur d'arc tel que $c(0) \in N_1$ et $c(L) \in N_2$, dont la longueur $L > 0$ est minimale.

b) Montrer qu'il existe un vecteur $u \in T_{c(0)}N_1$ unitaire tel que si $t \mapsto U(t)$ est le champ de vecteurs parallèle le long de c tel que $U(0) = u$, alors $U(L) \in T_{c(L)}N_2$.

c) Si $c_s(t) = \exp_{c(t)}(s\,U(t))$ pour $(t, s) \in [0, L] \times]-1, 1[$, montrer en utilisant la formule de la variation seconde que $\frac{d^2}{ds^2}_{|s=0} L(c_s) < 0$.

d) En déduire que l'intersection de N_1 et N_2 est non vide.

(3) Supposons (M, g) complète et à courbure de Ricci strictement positive. Montrer que l'intersection de deux hypersurfaces totalement géodésiques compactes N_1 et N_2 dans M est non vide.

Exercice E.60 Dans cet exercice, toutes les variétés et tous les fibrés sont réels C^∞. Soient (M, g) une variété riemannienne et ∇ sa connexion de Levi-Civita. Soient $\xi_{\mathbb{R}}$ le fibré vectoriel trivial de fibre $\mathbb{R}$ sur M et ξ le fibré vectoriel $TM \oplus \xi_{\mathbb{R}}$ sur M. Pour tous les $F \in \mathrm{C}^\infty(M; \mathbb{R})$ et $X, Y \in \Gamma(TM)$, notons $(X, F) \in \Gamma(\xi)$ l'application $x \mapsto X(x) + F(x) \in T_xM \oplus \mathbb{R}$ et

$$D_X(Y, F) = \big(\nabla_X Y + FX,\, X(F) + g(X, Y)\big)\ .$$

(1) Montrer que cette formule définit une connexion D sur le fibré vectoriel ξ.

(2) Pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $F, G \in \mathrm{C}^\infty(M; \mathbb{R})$, posons

$$h((X, F), (Y, G)) = g(X, Y) - FG\ .$$

Montrer que cette formule définit une section lisse de $\otimes^2\xi^*$, qui est parallèle pour D.

(3) Supposons dans cette question que g est à courbure sectionnelle constante -1.

a) Montrer que le tenseur de courbure R^∇ de g vérifie $R^\nabla(X, Y)Z = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X$ pour tous les $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

b) Montrer que le tenseur de courbure R^D de la connexion D sur ξ est nul.

On dit qu'une connexion D dont le tenseur de courbure est nul est *plate*.

Exercice E.61 Dans cet exercice, toutes les variétés et tous les fibrés sont réels C^∞, et tous les groupes de Lie sont réels.

$\boxed{\text{I}}$ Soient M et N deux variétés riemanniennes, dont nous noterons $\langle\ ,\ \rangle$ les métriques riemanniennes, et $p : M \to N$ une submersion. Notons $V \to M$ le sous-fibré vectoriel du fibré tangent à M de fibre au-dessus de $x \in M$ le sous-espace vectoriel $V_x = \ker T_xp$ de T_xM. Notons $H \to M$ le sous-fibré vectoriel du fibré tangent à M de fibre au-dessus de $x \in M$ le sous-espace vectoriel $V_x^\perp$ orthogonal à V_x dans T_xM. Pour tout $u \in TM$, notons $u = u^V + u^H$ l'écriture de u dans la décomposition en somme de Whitney $TM = V \oplus H$.

Nous dirons que la submersion p est *riemannienne* si, pour tout $x \in M$, l'application T_xp est une isométrie de H_x sur $T_{p(x)}N$. Nous fixons dans la suite une telle submersion.

Pour tout champ de vecteurs X sur N, notons $\overline{X}$ l'unique section de $H \to M$ telle que $Tp \circ \overline{X} = X \circ p$.

(1) Soient $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$. Montrer que $\overline{X}(f \circ p) = X(f) \circ p$ pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(N;\mathbb{R})$, que $Tp \circ [\overline{X}, \overline{Y}] = [X, Y] \circ p$, que $\langle [\overline{X}, \overline{Y}], \overline{Z} \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle \circ p$, et que $\langle [\overline{X}, W], \overline{Z} \rangle = 0$ pour toute section lisse W de $V \to M$.

(2) Notons $\overline{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de M et ∇ celle de N. Soient $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$.

a) Montrer que $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2}\big(X(\langle Y, Z \rangle) + Y(\langle X, Z \rangle) - Z(\langle X, Y \rangle) + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle\big)$.

b) Montrer, en calculant $(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^H$ et $(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^V$ que

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} = \overline{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\,\overline{X}, \overline{Y}\,]^V \ .$$

c) Montrer que pour toute section lisse W de $V \to M$, nous avons

$$\langle \overline{\nabla}_W \overline{X}, \overline{Y} \rangle = -\frac{1}{2}\langle [\,\overline{X}, \overline{Y}\,]^V, W \rangle \ .$$

(3) Soient $X, Y \in \Gamma(TN)$ orthonormés en un point $p(x)$ où $x \in M$. Notons P le plan engendré par $X(p(x)), Y(p(x))$, et $\overline{P}$ celui engendré par $\overline{X}(x), \overline{Y}(x)$. Montrer que si $\overline{K}$ est la courbure sectionnelle de M et K celle de N, alors

$$K(P) = \overline{K}(\overline{P}) + \frac{3}{4}\|[\,\overline{X}, \overline{Y}\,]^V\|^2(x) \ .$$

Cette formule s'appelle la *formule de O'Neill*.

(4) Soient G un groupe de Lie, $\langle\ ,\ \rangle$ une métrique riemannienne bi-invariante sur G et H un sous-groupe de Lie plongé de G.

a) Montrer que la variété homogène quotient G/H admet une unique métrique riemannienne invariante par l'action par translations à gauche de G, telle que la projection canonique de G sur G/H soit une submersion riemannienne.

b) Montrer que la courbure sectionnelle de G/H est positive ou nulle.

Exercice E.62 (1) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$(\theta, t) \mapsto \big((1 + t^2)\cos\theta, \sin\theta, t\big)$$

est une immersion lisse, dont l'image est une sous-variété M difféomorphe au cylindre $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (ne pas hésiter à faire un dessin).

(2) Munissons M de sa métrique riemannienne induite par celle de l'espace euclidien standard $\mathbb{E}^3$, et notons ∇ sa connexion de Levi-Civita. Notons ∂_θ le champ de vecteurs $f(\theta, t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, t)$ sur M et ∂_t le champ de vecteurs $f(\theta, t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(\theta, t)$ sur M. Calculer $\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta, \nabla_{\partial_t}\partial_t, \nabla_{\partial_t}\partial_\theta, \nabla_{\partial_\theta}\partial_t$ en tout point $f(\theta, 0)$ de M.

(3) Montrer que la courbe $\theta \mapsto f(\theta, 0)$ est une géodésique de M et que le champ de vecteurs $\theta \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(\theta, 0)$ le long de cette courbe est parallèle.

Exercice E.63 Soient (M, g) une variété riemannienne connexe de dimension $n \geq 2$, $\|\cdot\|$ sa norme riemannienne, exp son application exponentielle, et ∇ sa connexion de Levi-Civita. Notons $\Gamma(TM)$ le $\mathrm{C}^\infty(M)$-module des champs de vecteurs lisses sur M, $(\varphi_t^X)_t$ le flot local de $X \in \Gamma(TM)$ et, pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$,

$$X(f) : x \mapsto d_x f(X(x)) \in \mathrm{C}^\infty(M) \ .$$

Rappelons que $X \in \Gamma(TM)$ est un *champ de Killing* sur (M,g) si l'application $\mathscr{L}_X g = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\varphi_t^X)^* g$ est égale à 0, et que l'opérateur ∇X est alors *antisymétrique* pour g, c'est-à-dire tel que

$$g(\nabla_V X, W) = -g(V, \nabla_W X)$$

pour tous les $V, W \in \Gamma(TM)$, Rappelons qu'un endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel réel de dimension impaire admet 0 pour valeur propre. Fixons X un champ de Killing sur (M,g). Notons $f : M \to [0, +\infty[$ l'application $x \mapsto \frac{1}{2}\|X(x)\|^2$.

(1) Soit $V \in \Gamma(TM)$. Montrer que

$$g(\nabla_{[V,X]} X, V) = g(\nabla_X V, \nabla_V X) - g(\nabla_V X, \nabla_V X)\ ,$$

que $g(\nabla_V X, V) = 0$, que $g(\nabla_X \nabla_V X, V) + g(\nabla_V X, \nabla_X V) = 0$, et que

$$V(f) = -g(\nabla_X X, V)\,.$$

En déduire que si f admet un extrémum en x_0, alors $\nabla_X X(x_0) = 0$.

(2) Montrer que pour tout $V \in \Gamma(TM)$,

$$V(V(f)) = g(\nabla_V X, \nabla_V X) - R(V, X, X, V) - g(\nabla_X X, \nabla_V V).$$

(3) Soient $x \in M$ et $v \in T_x M$. Montrer que si $\epsilon > 0$ est assez petit, il existe $V \in \Gamma(TM)$ tel que $V(\exp_x(tv)) = \frac{d}{dt}(\exp_x(tv))$ pour tout $t \in [-\epsilon, +\epsilon]$, et que

$$\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0}(f(\exp_x(tv))) = g_x(\nabla_v X\,(x), \nabla_v X\,(x)) - R(v, X(x), X(x), v)\,. \qquad (\cdot 72 \cdot)$$

(4) Supposons M compacte, et la courbure sectionnelle de g strictement négative. Montrer que f admet un maximum et que X est identiquement nul.

(5) Supposons M compacte et de dimension paire. Montrer que si x est un point de M tel que l'endomorphisme de $T_x M$ défini par $v \mapsto \nabla_v X(x)$ admette 0 pour valeur propre, alors le sous-espace propre associé à 0 est de dimension paire. En déduire que si g est à courbure sectionnelle strictement positive, alors f admet un minimum, et que X s'annule en au moins un point (ce résultat est dû à M. Berger).

Exercice E.64 Soient (M,g) une variété riemannienne complète, connexe et simplement connexe, à courbure sectionnelle strictement négative, et d sa distance riemannienne. Soit Γ un sous-groupe du groupe des isométries de (M,g), agissant librement (si $\gamma \in \Gamma$, $x \in M$ et $\gamma x = x$ alors $\gamma = e$) et proprement (pour tout compact K de M, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma\ :\ \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini) sur M, tel qu'il existe un compact C de M tel que $M = \Gamma C$, où $\Gamma C = \{\gamma c\ :\ \gamma \in \Gamma, c \in C\}$.

(1) Pour tout $\gamma \in \Gamma$, notons $\ell(\gamma) = \inf_{x \in M} d(x, \gamma x)$. Montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'ensemble

$$\mathrm{Min}(\gamma) = \{x_0 \in M\ :\ d(x_0, \gamma x_0) = \ell(\gamma)\}$$

est non vide, convexe et invariant par γ.

(2) Montrer que si γ n'est pas l'élément neutre e, alors $\ell(\gamma) > 0$ et si m est le milieu du segment géodésique $[x_0, \gamma x_0]$ où $x_0 \in \mathrm{Min}(\gamma)$, alors γx_0 est le milieu du segment géodésique

$[m, \gamma m]$. En déduire qu'il existe une géodésique $c : \mathbb{R} \to M$ telle $\gamma\, c(t) = c(t + \ell(\gamma))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(3) Rappelons que la somme des angles de comparaison d'un triangle géodésique non aplati d'un espace métrique géodésique $\mathrm{CAT}(\kappa)$, où $\kappa < 0$, est strictement inférieure à π. Montrer que la somme des angles d'un quadrilatère géodésique non aplati de M est strictement inférieure à 2π. En déduire qu'une géodésique c comme dans la question (2) est unique à translation à la source près.

(4) Montrer que tout sous-groupe abélien non trivial de Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

(5) Montrer que la variété produit de deux variétés lisses compactes connexes non simplement connexes n'admet pas de métrique riemannienne à courbure sectionnelle strictement négative.

3.9 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.42 (1) Utiliser la formule ($\cdot$ 19 $\cdot$) et le caractère sans torsion des connexions de Levi-Civita.

(2) Utiliser la formule ($\cdot$ 20 $\cdot$).

Schème E.47 Soient (M, g) une variété riemannienne homogène, $x \in M$ et $\epsilon \in]0, \mathrm{inj}_M(x)[$. Par homogénéité, l'application inj_M est constante. Montrons que toute géodésique maximale est définie sur $\mathbb{R}$. Pour toute géodésique $c : I \to M$ et tout $t \in I$, soit γ une isométrie de M telle que $\gamma\, c(t) = x$. Alors $s \mapsto \gamma^{-1} \exp_{c(t)} \big(s\, T_{c(t)}\gamma(\dot c(t))\big)$, qui est définie sur $]-\epsilon, +\epsilon[$, et dont le vecteur vitesse à l'instant $s = 0$ est $\dot c(t)$, est une géodésique qui permet d'étendre c sur $]t - \epsilon, t + \epsilon[$.

Schème E.54 (1) Soit μ une mesure de Haar à droite sur K, qui est finie puisque K est compact. Considérons une métrique riemannienne h sur M (qui existe par un résultat du cours). Pour tout $x \in M$ et tout couple $(u, v) \in T_xM \times T_xM$, posons :

$$g_x(u, v) = \int_{k \in K} h_{kx}(T_xk(u), T_xk(v))\, d\mu(k)\,.$$

Dans la suite, nous noterons $F_{x,u,v} : K \to \mathbb{R}$ l'application définie par $F_{x,u,v} : k \mapsto h_{kx}(T_xk(u), T_xk(v))$. Il est clair que pour tout $x \in M$, g_x est une forme bilinéaire symétrique sur T_xM, que $g_x(u, u) > 0$ si $u \neq 0$, comme intégrale de la fonction $F_{x,u,u}$ qui est strictement positive sur K, et que $x \mapsto g_x$ est lisse (par les propriétés de régularité des intégrales à paramètre, K étant compact). Nous avons donc bien défini une métrique riemannienne g sur M. Vérifions que les éléments de K agissent par isométries pour g. Si $k_0 \in K$, $x \in M$ et $(u, v) \in T_xM \times T_xM$, nous avons, en notant $R_{k_0} : k \mapsto kk_0$ la translation à droite par k_0 :

$$\begin{aligned}(k_0{}^*g)_x(u, v) = g_{k_0x}(T_xk_0(u), T_xk_0(v)) &= \int_K F_{x,u,v} \circ R_{k_0}\, d\mu \\ &= \int_K F_{x,u,v}\, d(R_{k_0})_*\mu = \int_K F_{x,u,v}\, d\mu = g_x(u, v)\,.\end{aligned}$$

(2) Il est clair que ρ_x est un morphisme de groupes, et c'est une application lisse de K_x dans $GL(T_xM)$ car nous avons supposé l'action de K sur M lisse. Le morphisme ρ_x est donc un morphisme de groupes de Lie. Nous allons montrer qu'il est injectif.

La remarque clé est qu'une isométrie riemannienne envoie géodésiques paramétrées sur géodésiques paramétrées. Si exp désigne l'application exponentielle de la métrique g, et si U est un voisinage ouvert de 0 dans T_xM tel que $\exp_x$ soit un difféomorphisme de U sur son image, nous avons donc, pour tout $v \in U$, et tout $k \in K_x$:

$$k \exp_x(v) = \exp_x(T_x k(v)) \ , \tag{$\cdot 73 \cdot$}$$

car l'application $t \mapsto k \exp_x(tv)$ de $]-\epsilon, 1+\epsilon[$ dans M, où $\epsilon > 0$ est assez petit, est une géodésique, de vecteur vitesse en $t = 0$ égal à $T_x k(v)$. Cette relation ($\cdot 73 \cdot$) montre en toute généralité que pour une isométrie riemannienne f de (M, g), l'ensemble des points y où $f(y) = y$ et $T_y f = \mathrm{id}$ forme un ouvert. Comme cet ensemble est clairement fermé, nous obtenons par connexité de M qu'une isométrie riemannienne f qui fixe un point y, et telle que $T_y f = \mathrm{id}$, est l'application identique.

Pour conclure, les éléments de $\ker(\rho_x)$ agissent trivialement sur M, et puisque l'action de K est fidèle, le morphisme de groupe ρ_x est injectif.

(3) Comme le morphisme ρ_x envoie injectivement K_x dans le groupe orthogonal de la forme quadratique g_x, nous avons $\dim K_x \leq \frac{n(n-1)}{2}$. L'orbite $K \cdot x$ de x sous l'action de K, qui est une sous-variété de M difféomorphe à l'espace homogène K/K_x car K est compact, a une dimension majorée par n, d'où $\dim K \leq n + \dim K_x \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

(4) Considérons une action lisse non triviale de $\mathrm{SL}_{m+1}(\mathbb{R})$ sur une variété M de dimension n, c'est-à-dire un morphisme injectif de groupes $\varphi : \mathrm{SL}_{m+1}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Diff}_\infty(M)$. Puisque $\mathrm{SL}_{m+1}(\mathbb{R})$ est connexe, nous pouvons supposer que M est connexe. Le noyau de φ est un sous-groupe fermé (donc un sous-groupe de Lie plongé, par le théorème de Cartan), distingué dans $\mathrm{SL}_{m+1}(\mathbb{R})$. Son noyau est donc un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{m+1}(\mathbb{R})$ de $\mathrm{SL}_{m+1}(\mathbb{R})$. Cet idéal est différent de $\mathfrak{sl}_{m+1}(\mathbb{R})$ car l'action n'est pas triviale et puisque, par connexité, $\mathrm{SL}_{m+1}(\mathbb{R})$ est engendré par l'image de son application exponentielle. Comme $\mathfrak{sl}_{m+1}(\mathbb{R})$ est une algèbre de Lie simple, nous en déduisons que $\ker \varphi$ est discret dans $\mathrm{SL}_{m+1}(\mathbb{R})$. Le morphisme φ passe au quotient en une action lisse et fidèle du groupe de Lie quotient $\mathrm{SL}_{m+1}(\mathbb{R})/\ker\varphi$. Notons K le groupe de Lie compact image de $\mathrm{O}(m+1)$ par la projection canonique dans $\mathrm{SL}_{m+1}(\mathbb{R})/\ker\varphi$, qui a la même dimension que $\mathrm{O}(m+1)$ puisque $\ker\varphi$ est discret. La question précédente donne l'inégalité $\frac{m(m+1)}{2} \leq \frac{n(n+1)}{2}$, d'où il ressort que $n \geq m$.

(5) L'action de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur la sphère $\mathbb{S}_n$ de dimension n obtenue en faisant agir linéairement $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur les demi-droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$ est lisse et fidèle.

Schème E.55 Notons $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un point générique de $\mathbb{R}^n_+$, et $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un point générique de $T_x\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^n$. Notons ds^2_{euc} la restriction à $\mathbb{R}^n_+$ de la métrique riemannienne de $\mathbb{E}^n$. Nous avons $ds^2_{\mathrm{hyp}} = e^{2f} ds^2_{\mathrm{euc}}$ où $e^{2f(x)} = \frac{1}{x_n^2}$, c'est-à-dire $f(x) = -\log x_n$. Donc $df_x(X) = -\frac{X_n}{x_n}$ et, pour la métrique riemannienne ds^2_{euc}, nous avons $\mathrm{grad}\, f(x) = (0, \ldots, 0, -\frac{1}{x_n})$ (qui est le gradient usuel de f). Par la proposition 3.7, en notant ∇ et $\overline{\nabla}$ les connexions de Levi-Civita de $(\mathbb{R}^n_+, ds^2_{\mathrm{euc}})$ et $(\mathbb{R}^n_+, ds^2_{\mathrm{hyp}})$ respectivement, nous avons

$$\overline{\nabla}_{\frac{d}{dt}} \dot{c} = \nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c} \ + \ 2df \circ c(\dot{c})\, \dot{c} \ - \ g(\dot{c}, \dot{c})(\mathrm{grad}\, f) \circ c \ .$$

Or $\nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c} = \ddot{c}$, car la connexion de Levi-Civita de $\mathbb{E}^n$ est la connexion triviale sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, toutes les composantes de $\overline{\nabla}_{\frac{d}{dt}} \dot{c}(t)$ sont nulles sauf peut-être la dernière, qui,

puisque $g(\dot c(t),\dot c(t)) = \|\dot c(t)\|^2_{\mathrm{euc}} = e^{2t}$, vaut

$$e^t + 2(-\frac{e^t}{e^t})e^t - e^{2t}(-\frac{1}{e^t}) = 0\ .$$

Donc $\overline{\nabla}_{\frac{d}{dt}}\dot c = 0$: le vecteur vitesse de c est parallèle le long de c, et par définition, c est une géodésique.

Schème E.56 a) La première égalité vient du fait que la base choisie $(e_1,\dots,e_n) = (\frac{\partial}{x^1}(0),\dots,\frac{\partial}{x^n}(0))$ est orthonormée pour h, car $T_0\exp_x = \mathrm{id}_{T_xM}$. La seconde égalité vient du fait que, pour tout $v\in U$, l'application $c_v : [0,1]\to U$ définie par $t\mapsto tv$ est une géodésique. Donc pour tout $v\in U$, nous avons $\Gamma_0(v,v) = \ddot c_u(0) + \Gamma_0(\dot c_v(0),\dot c_v(0)) = 0$ par l'équation des géodésiques en coordonnées locales. Puisque Γ_0 est bilinéaire symétrique (ceci a été vu, comme conséquence du fait que la connexion de Levi-Civita est sans torsion), nous avons donc $\Gamma_0(u,v) = 0$ pour tous $u,v\in T_xM$. En prenant $u = e_i, v = e_j$ et en écrivant les coordonnées de $\Gamma_0(u,v)$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$, l'affirmation a) en découle.

Schème E.58 Nous avons

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \Big(\frac{\cos\theta\sinh t}{\cosh^2 t}, \frac{\sin\theta\sinh t}{\cosh^2 t}, \tanh^2 t\Big) \ \text{ et } \ \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \Big(-\frac{\sin\theta}{\cosh t}, \frac{\cos\theta}{\cosh t}, 0\Big)\ .$$

L'application ϕ est clairement C^∞, injective (notons que sa dernière coordonnée est strictement croissante en t), propre, de différentielle injective. Donc ϕ est un plongement C^∞.

Nous avons $\|\frac{\partial\phi}{\partial t}\|^2 = \tanh^2 t$, $\langle\frac{\partial\phi}{\partial t},\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\rangle = 0$ et $\|\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\|^2 = \frac{1}{\cosh^2 t}$, d'où la formule pour la première forme fondamentale ds^2, par son expression donnée dans l'exemple (iii) de la partie 3.1.

L'aire de S est

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \tanh t\frac{1}{\cosh t}\ d\theta\, dt = 2\pi\int_0^{+\infty}\frac{d(\cosh t)}{\cosh^2 t} = 2\pi\ .$$

Posons $u = \ln(\cosh t)$. L'application $t\mapsto u$ est un C^∞-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ dans lui-même, et la métrique riemannienne de S dans les coordonnées (u,θ) s'écrit

$$ds^2 = du^2 + f(u)^2\ d\theta^2\ ,$$

où $f(u) = e^{-u}$. Par l'exercice E.57, la courbure sectionnelle de S au point de coordonnées (u,θ) est donc

$$K = -\frac{f''(u)}{f(u)} = -1\ .$$

L'image de la courbe $c : t\mapsto f(t,0)$, qui est une composante connexe de l'ensemble des points fixes de l'isométrie riemannienne $\phi(t,\theta)\mapsto\phi(t,-\theta)$, est une sous-variété totalement géodésique de dimension 1. Donc, cette courbe, reparamétrée par longueur d'arc, est une géodésique. Sa longueur (qui ne dépend pas du paramétrage) pour la métrique riemannienne entre $t = 0^+$ et $t = 1$, qui est égale à celle en tant que courbe dans $\mathbb{R}^3$ par définition de la métrique riemannienne induite, est finie, car c se prolonge sur tout $\mathbb{R}$ de manière C^∞. Donc la géodésique obtenue par reparamétrage par longueur d'arc n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, et S n'est pas complète.

Schème E.59 (1) Puisque c est paramétrée par la longueur d'arc, nous avons

$$\frac{d}{ds}_{|s=0} L(c_s) = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} (g(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t)))\, dt \ .$$

Puisque g est parallèle pour ∇, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial s} g(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t)) = 2g(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \dot{c}_s, \dot{c}_s) = 2g(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, \dot{c}_s) \ ,$$

car ∇ est sans torsion et les champs $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial s}$ commutent. De nouveau puisque g est parallèle pour ∇, nous avons

$$g(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, \dot{c}_s) = \frac{\partial}{\partial t} g(Y, \dot{c}_s) - g(Y, \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{c}_s) \ .$$

Le second terme de l'expression ci-dessus s'annule lorsque s vaut 0 puisque c est une géodésique. Donc $\frac{d}{ds}_{|s=0} L(c_s) = \int_0^L \frac{d}{dt} g(Y(t,0), \dot{c}(t))\, dt$, d'où l'expression souhaitée.

(2) Raisonnons par l'absurde, et supposons que N_1 et N_2 ne s'intersectent pas. Par compacité, il existe $x \in N_1$ et $y \in N_2$ tels que $L = \inf\{d(a,b) \mid a \in N_1,\ b \in N_2\} = d(x,y)$. L'hypothèse $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ entraîne que $L > 0$. Comme (M, g) est complète, le théorème de Hopf-Rinow assure l'existence d'un segment géodésique $c : [0, L] \to M$ tel que $c(0) = x$ et $c(L) = y$. Comme $p + q > \dim M$, le sous-espace vectoriel de T_yM obtenu par transport parallèle de T_xN_1 le long de c, qui est de dimension p, intersecte en un vecteur non nul le sous-espace vectoriel T_yN_2 de T_yM qui est de dimension q. Il existe donc $u \in T_xN_1$ unitaire tel que si $t \mapsto U(t)$ désigne le champ de vecteurs parallèle le long de c tel que $U(0) = u$, nous ayons $U(L) \in T_yN_2$. Considérons alors la famille lisse de courbes $(t, s) \mapsto c_s(t) = \exp_{c(t)}(sU(t))$ paramétrée par $[0, L] \times \mathbb{R}$ (bien définie par complétude de M). Puisque N_1 et N_2 sont totalement géodésiques, nous avons $c_s(0) \in N_1$, et $c_s(L) \in N_2$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Par la minimalité de L, les deux relations suivantes doivent être satisfaites :

$$\frac{d}{ds}_{|s=0} L(c_s) = 0, \tag{$\cdot 74 \cdot$}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}_{|s=0} L(c_s) \geq 0. \tag{$\cdot 75 \cdot$}$$

Reprenons les notations de la formule de la variation seconde. Comme $s \mapsto c_s(0)$ et $s \mapsto c_s(L)$ sont des géodésiques, le terme tout intégré dans l'expression de $\frac{d^2}{ds^2}_{|s=0} L(c_s)$ s'annule. Par ailleurs comme $U(t)$ est le transport parallèle de u le long de c, nous avons $\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(t,0) = 0$, si bien que le premier et le troisième terme sous l'intégrale intervenant dans l'expression de $\frac{d^2}{ds^2}_{|s=0} L(c_s)$ valent aussi 0. Au final, nous avons

$$\frac{d^2}{ds^2}_{|s=0} L(c_s) = -\int_0^L R(Y(t,0), \dot{c}(t), \dot{c}(t), Y(t,0))\, dt \ .$$

La relation ($\cdot 74 \cdot$) montre que les vecteurs $u = U(0) = Y(0,0)$ et $U(L) = Y(L,0)$ doivent être orthogonaux à $\dot{c}(0)$ et $\dot{c}(L)$ respectivement. Puisque le vecteur u est unitaire orthogonal à $\dot{c}(0)$ et puisque le champ de vecteurs U est parallèle, la quantité

$$R(Y(t,0), \dot{c}(t), \dot{c}(t), Y(t,0))$$

est la courbure sectionnelle du plan vectoriel engendré par les vecteurs orthonormés $Y(t,0)$ et $\dot{c}(t)$. Ce terme est strictement positif d'après les hypothèses et $L > 0$. Nous avons donc $\frac{d^2}{ds^2}_{|s=0} L(c_s) < 0$, d'où une contradiction avec (· 75 ·).

(3) Comme dans la question précédent, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une géodésique $c : [0, L] \to M$ joignant deux points x et y de N_1 et N_2 respectivement, où la borne inférieure définissant la distance $L > 0$ entre N_1 et N_2 est atteinte. Du fait que c est de longueur minimale parmi tous les segments géodésiques reliant N_1 et N_2, nous devons avoir T_xN_1 orthogonal à $\dot{c}(0)$ et T_yN_2 orthogonal à $\dot{c}(L)$. Le transport parallèle de T_xN_1 le long de c coïncide donc avec T_yN_2 en $t = L$ (car deux hyperplans orthogonaux à $\dot{c}(L)$ sont égaux). Choisissons $u_1, \dots, u_{n-1}$ une base orthonormée de T_xN_1, et transportons-la parallèlement le long de c. Nous obtenons un champ de repères orthonormés $s \mapsto (U_1(t), \dots, U_{n-1}(t))$ le long de c, de sorte que $(U_1(L), \dots, U_{n-1}(L))$ soit une base orthonormée de T_yN_2. En considérant des variations de courbes du type $c_s^i(t) = \exp_{c(t)}(s\, U_i(t))$, et en raisonnant comme à la question précédente, nous obtenons, pour tout $i = 1, \dots, n-1$:

$$-\int_0^L R(U_i, \dot{c}, \dot{c}, U_i)\, dt \geq 0.$$

En sommant ces inégalités, nous avons $\int_0^L \mathrm{Ric}(\dot{c}, \dot{c})\, dt \leq 0$, une contradiction avec l'hypothèse que la courbure de Ricci est strictement positive.

Schème E.60 (1) Par la définition de la somme de Whitney de deux fibrés, toute section lisse de ξ est de la forme (X, F) où $X \in \Gamma(TM)$ et $F \in \mathrm{C}^\infty(M; \mathbb{R})$. L'application de $\Gamma(TM) \times \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)$ définie par $(X, (Y, F)) \mapsto D_X(Y, F)$ est clairement linéaire en X et en (Y, F). De plus, pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(M; \mathbb{R})$, nous avons

$$\begin{aligned} D_{fX}(Y, F) &= \big(\nabla_{fX} Y + F(fX),\, (fX)(F) + g(fX, Y)\big) \\ &= f\big(\nabla_X Y + FX,\, X(F) + g(X, Y)\big) = f D_X(Y, F)\ , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_X(f(Y, F)) = D_X(fY, fF)) &= \big(\nabla_X(fY) + (fF)X,\, X(fF) + g(X, fY)\big) \\ &= \big(f\nabla_X Y + X(f)Y + fFX,\, X(f)F + fX(F) + fg(X, Y)\big) \\ &= f D_X(Y, F) + X(f)(Y, F)\ . \end{aligned}$$

Donc D est bien une connexion.

(2) L'application $h : \Gamma(\xi) \times \Gamma(\xi) \to \mathrm{C}^\infty(M; \mathbb{R})$ définie par $((X, F), (Y, G)) \mapsto g(X, Y) - FG$ est $\mathrm{C}^\infty(M; \mathbb{R})$-bilinéaire, donc définit, par le lemme de tensorialité, une section de $\otimes^2 \xi^*$. Pour tous les $F, G \in \mathrm{C}^\infty(M; \mathbb{R})$ et $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, nous avons, puisque la métrique riemannienne g est symétrique et parallèle pour sa connexion de Levi-Civita ∇,

$$\begin{aligned} &h(D_Z(X, F), (Y, G)) + h((X, F), D_Z(Y, G)) \\ &= h((\nabla_Z X + FZ, Z(F) + g(Z, X)), (Y, G)) + h((X, F), (\nabla_Z Y + GZ, Z(G) + g(Z, Y))) \\ &= g(\nabla_Z X + FZ, Y) - (Z(F) + g(Z, X))G + g(X, \nabla_Z Y + GZ) - F(Z(G) + g(Z, Y)) \\ &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) - Z(F)G - FZ(G) \\ &= Z(g(X, Y)) - Z(FG) = Z\big(h((X, F), (Y, G))\big)\ . \end{aligned}$$

(3) a) L'application $\mathrm{C}^\infty(M;\mathbb{R})$-trilinéaire

$$(X,Y,Z) \mapsto a(X,Y)Z = g(X,Z)Y - g(Y,Z)X$$

vérifie les mêmes propriétés de symétrie que R^∇ : elle est antisymétrique en les deux premières variables, vérifie l'identité de Bianchi $a(X,Y)Z + a(Y,Z)X + a(Z,X)Y = 0$, vérifie $g(a(X,Y)Z,W) = -g(Z,a(X,Y)W)$ et $g(a(X,Y)Z,W) = g(a(Z,W)X,Y)$ pour tous les $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$. Puisqu'un tel tenseur est déterminé par sa courbure sectionnelle, et puisque si deux vecteurs tangents u et v en un même point sont linéairement indépendants, alors

$$\frac{g(a(u,v)v,u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2} = \frac{g(u,v)g(v,u) - g(v,v)g(u,u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2} = -1 \ ,$$

le résultat en découle.

b) Pour tous les $F \in \mathrm{C}^\infty(M;\mathbb{R})$ et $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$, nous avons, puisque la métrique riemannienne g est symétrique,

$$\begin{aligned}
&R^D(X,Y)(Z,F) = D_X D_Y(Z,F) - D_Y D_X(Z,F) - D_{[X,Y]}(Z,F) \\
&= D_X(\nabla_Y Z + FY,\ Y(F) + g(Y,Z)) - D_Y(\nabla_X Z + FX,\ X(F) + g(X,Z)) \\
&\quad - (\nabla_{[X,Y]}Z + F[X,Y],\ [X,Y](F) + g([X,Y],Z)) \\
&= (\nabla_X(\nabla_Y Z + FY) + (Y(F) + g(Y,Z))X,\ X(Y(F) + g(Y,Z)) + g(X,\nabla_Y Z + FY)) \\
&\quad - (\nabla_Y(\nabla_X Z + FX) + (X(F) + g(X,Z))Y,\ Y(X(F) + g(X,Z)) + g(Y,\nabla_X Z + FX)) \\
&\quad - (\nabla_{[X,Y]}Z + F[X,Y], X(Y(F)) - Y(X(F)) + g([X,Y],Z)) \\
&= (R^\nabla(X,Y)Z + g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + F(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]), \\
&\quad X(g(Y,Z)) - Y(g(X,Z)) + g(X,\nabla_Y Z) - g(Y,\nabla_X Z) - g([X,Y],Z)) \ .
\end{aligned}$$

Comme la métrique riemannienne g est parallèle pour sa connexion de Levi-Civita ∇, qui est sans torsion, le terme de la dernière ligne est égal à

$$\begin{aligned}
&g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z) - g(\nabla_Y X,Z) - g(X,\nabla_Y Z) + g(X,\nabla_Y Z) - g(Y,\nabla_X Z) \\
&- g([X,Y],Z) = g(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],Z) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Par a) et encore puisque ∇ est sans torsion, nous avons donc $R^D(X,Y)(Z,F) = 0$.

Schème E.61 $\boxed{\mathrm{I}}$ (1) Soient $f \in \mathrm{C}^\infty(N;\mathbb{R})$, $x \in M$, et W une section lisse de $V \to M$. Nous avons

$$\overline{X}(f \circ p)(x) = d_x(f \circ p)(\overline{X}(x)) = d_{p(x)}f(Tp \circ \overline{X}(x)) = d_{p(x)}f(X \circ p(x)) = X(f) \circ p(x) \ ,$$

et

$$W(f \circ p)(x) = d_x(f \circ p)(W(x)) = d_{p(x)}f(T_x p(W(x))) = d_{p(x)}f(0) = 0 \ . \qquad (\cdot 76 \cdot)$$

Donc

$$\begin{aligned}
Tp \circ [\overline{X},\overline{Y}]\,(f) &= [\overline{X},\overline{Y}](f \circ p) = \overline{X}(\overline{Y}(f \circ p)) - \overline{Y}(\overline{X}(f \circ p)) \\
&= X(Y(f)) \circ p - Y(X(f)) \circ p = [X,Y](f) \circ p \ ,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Tp \circ [\overline{X}, W]\,(f) &= [\overline{X}, W](f \circ p) = \overline{X}(W(f \circ p)) - W(\overline{X}(f \circ p)) \\ &= \overline{X}(0) - W(X(f) \circ p) = 0 - 0 = 0\ . \end{aligned}$$

Par l'identification entre champs de vecteurs et dérivations, les deux premiers résultats en découlent.

Donc, puisque Tp est une isométrie sur les fibres de H et s'annule sur celles de V,

$$\begin{aligned} \langle [\overline{X}, \overline{Y}], \overline{Z}\rangle &= \langle [\overline{X}, \overline{Y}]^H, \overline{Z}\rangle = \langle Tp \circ [\overline{X}, \overline{Y}]^H, Tp \circ \overline{Z}\rangle = \langle Tp \circ [\overline{X}, \overline{Y}], Tp \circ \overline{Z}\rangle \\ &= \langle [X, Y] \circ p, Z \circ p\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle \circ p\ . \end{aligned}$$

De même,

$$\langle [\overline{X}, W], \overline{Z}\rangle = \langle [\overline{X}, W]^H, \overline{Z}\rangle = \langle Tp \circ [\overline{X}, W]^H, Tp \circ \overline{Z}\rangle = \langle Tp \circ [\overline{X}, W], Tp \circ \overline{Z}\rangle = 0\ .$$

(2) a) Ceci découle de la définition de la connexion d'une variété riemannienne (et se retrouve en utilisant le fait qu'elle rend parallèle la métrique riemannienne pour développer les trois premiers termes, et qu'elle est sans torsion pour simplifier avec les trois derniers termes).

b) Nous avons vu ci-dessus que $\overline{X}(f \circ p) = X(f) \circ p$ et que $\langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle = \langle Tp \circ \overline{X}, Tp \circ \overline{Y}\rangle = \langle X, Y\rangle \circ p$. Donc

$$\begin{aligned} &\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}, \overline{Z}\rangle \\ &\quad = \frac{1}{2}\big(\overline{X}\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle + \overline{Y}\langle \overline{X}, \overline{Z}\rangle - \overline{Z}\langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle + \langle [\overline{X}, \overline{Y}], \overline{Z}\rangle - \langle [\overline{X}, \overline{Z}], \overline{Y}\rangle - \langle [\overline{Y}, \overline{Z}], \overline{X}\rangle\big) \\ &\quad = \frac{1}{2}\big(X\langle Y, Z\rangle \circ p + Y\langle X, Z\rangle \circ p - Z\langle X, Y\rangle \circ p \\ &\qquad + \langle [X, Y], Z\rangle \circ p - \langle [X, Z], Y\rangle \circ p - \langle [Y, Z], X\rangle \circ p\big) \\ &\quad = \langle \nabla_X Y, Z\rangle \circ p = \langle \nabla_X Y \circ p, Z \circ p\rangle = \langle Tp(\overline{\nabla_X Y}), Tp(\overline{Z})\rangle = \langle \overline{\nabla_X Y}, \overline{Z}\rangle\ . \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute section lisse $\overline{Z}$ de $H \to M$, nous avons donc $(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^H = \overline{\nabla_X Y}$. Si W est une section lisse de $V \to M$, alors

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}, W\rangle = \frac{1}{2}\big(&\overline{X}\langle \overline{Y}, W\rangle + \overline{Y}\langle \overline{X}, W\rangle - W\langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle \\ &+ \langle [\overline{X}, \overline{Y}], W\rangle - \langle [\overline{X}, W], \overline{Y}\rangle - \langle [\overline{Y}, W], \overline{X}\rangle\big)\ . \end{aligned}$$

Dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus, les deux premiers termes sont nuls par l'orthogonalité des fibres de H et V, le troisième est nul car par la formule (·76·), nous avons

$$W\langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle = W\langle Tp \circ \overline{X}, Tp \circ \overline{Y}\rangle = W(\langle X, Y\rangle \circ p) = 0\ ,$$

et les deux derniers sont nuls par la question (1). Donc

$$\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}, W\rangle = \frac{1}{2}\langle [\overline{X}, \overline{Y}], W\rangle = \frac{1}{2}\langle [\overline{X}, \overline{Y}]^V, W\rangle\ .$$

Ceci étant vrai pour toute section lisse W de $V \to M$, nous avons donc $(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^V = \frac{1}{2}[\,\overline{X}, \overline{Y}\,]^V$. Le résultat découle donc du fait que $u = u^H + u^V$ pour tout $u \in TM$.

c) Par ce qui précède, en utilisant le fait que $\overline{\nabla}$ est sans torsion et rend parallèle la métrique riemannienne de M, et par la dernière affirmation de la question (1), nous avons

$$\begin{aligned}\langle\overline{\nabla}_W\overline{X},\overline{Y}\rangle &= \langle\overline{\nabla}_{\overline{X}}W,\overline{Y}\rangle + \langle[W,\overline{X}],\overline{Y}\rangle = \overline{X}(\langle W,\overline{Y}\rangle) - \langle W,\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\rangle \\ &= -\langle W,\overline{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\overline{X},\overline{Y}]^V\rangle = -\frac{1}{2}\langle[\overline{X},\overline{Y}]^V,W\rangle\ .\end{aligned}$$

(3) Soient $X,Y\in\Gamma(TN)$. Nous avons, en utilisant respectivement le fait que la métrique riemannienne de M soit parallèle pour $\overline{\nabla}$, ce qui précède et le fait que $[\overline{X},\overline{X}] = [\overline{Y},\overline{Y}] = 0$, le fait que p soit une submersion riemannienne, et un argument inverse,

$$\begin{aligned}\langle\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Y},\overline{X}\rangle &= \overline{X}(\langle\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Y},\overline{X}\rangle) - \langle\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Y},\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{X}\rangle = X(\langle\nabla_Y Y,X\rangle)\circ p - \langle\overline{\nabla_Y Y},\overline{\nabla_X X}\rangle \\ &= X(\langle\nabla_Y Y,X\rangle)\circ p - \langle\nabla_Y Y,\nabla_X X\rangle\circ p = \langle\nabla_X\nabla_Y Y,X\rangle\circ p\ .\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\langle\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{X}\rangle &= \overline{Y}(\langle\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{X}\rangle) - \langle\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}\rangle \\ &= Y(\langle\nabla_X Y,X\rangle)\circ p - \langle\overline{\nabla_X Y},\overline{\nabla_Y X}\rangle - \frac{1}{4}\langle[\overline{X},\overline{Y}]^V,[\overline{Y},\overline{X}]^V\rangle \\ &= \langle\nabla_Y\nabla_X Y,X\rangle\circ p + \frac{1}{4}\big\|[\overline{X},\overline{Y}]^V\big\|^2\ .\end{aligned}$$

Enfin, par la question (1), nous avons $[\overline{X},\overline{Y}]^H = \overline{[X,Y]}$ et donc par la question (2) en utilisant en particulier $W = [\overline{X},\overline{Y}]^V$,

$$\begin{aligned}\langle\overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{Y},\overline{X}\rangle &= \langle\overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]^H}\overline{Y},\overline{X}\rangle + \langle\overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]^V}\overline{Y},\overline{X}\rangle \\ &= \langle\overline{\nabla}_{\overline{[X,Y]}}\overline{Y},\overline{X}\rangle - \frac{1}{2}\langle[\overline{Y},\overline{X}]^V,[\overline{X},\overline{Y}]^V\rangle \\ &= \langle\nabla_{[X,Y]}Y,X\rangle\circ p + \frac{1}{2}\big\|[\overline{X},\overline{Y}]^V\big\|^2\ .\end{aligned}$$

Par la définition de la courbure sectionnelle, comme $\overline{X}(x)$ et $\overline{Y}(x)$ sont aussi orthonormés puisque T_xp est une isométrie, nous avons donc, en notant $\overline{R}$ et R les tenseurs de courbures $(3,1)$ de M et de N respectivement,

$$\begin{aligned}\overline{K}(\overline{P}) &= \langle\overline{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{Y},\overline{X}\rangle(x) = \langle\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{Y},\overline{X}\rangle(x) \\ &= \langle\nabla_X\nabla_Y Y - \nabla_Y\nabla_X Y - \nabla_{[X,Y]}Y,X\rangle(p(x)) - \frac{1}{4}\big\|[\overline{X},\overline{Y}]^V\big\|^2 - \frac{1}{2}\big\|[\overline{X},\overline{Y}]^V\big\|^2 \\ &= \langle R(X,Y)Y,X\rangle(p(x)) - \frac{3}{4}\big\|[\overline{X},\overline{Y}]^V\big\|^2 = K(P) - \frac{3}{4}\big\|[\overline{X},\overline{Y}]^V\big\|^2\ .\end{aligned}$$

Le résultat en découle.

(4) a) L'unicité est immédiate, car si $p : M\to N$ est une submersion riemannienne, alors la métrique riemannienne de N est déterminée par celle de M.

Nous savons que la structure de variété de G/H est (l'unique) telle que la projection canonique p est une submersion. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{h}$ celle de H, et $\mathfrak{h}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{h}$ dans l'espace euclidien $\mathfrak{g}$. Pour tout $g\in G$, en notant L_g les translations à gauche par g sur G et sur G/H, nous avons $p\circ L_g = L_g\circ p$ par équivariance de p. Donc $T_gp\circ T_eL_g = T_{eH}L_g\circ T_ep$. Comme nous savons que $\mathfrak{h} = \ker T_gp$, nous avons donc

$T_eL_g(\mathfrak{h}) \subset \ker T_ep$, et cette inclusion est une égalité, par égalité des dimensions. Donc $V_g = T_eL_g(\mathfrak{h})$ et $H_g = T_eL_g(\mathfrak{h}^\perp)$ par invariance à gauche de la métrique riemannienne de G.

Notons que $T_gp : H_g \to T_{gH}(G/H)$ coïncide avec $T_gp \circ T_eL_g \circ (T_eL_g)^{-1}$. Par invariance à gauche de la métrique riemannienne de G, il suffit donc de construire une métrique riemannienne sur G/H telle que les applications $T_gp \circ T_eL_g : \mathfrak{h}^\perp \to T_{gH}(G/H)$ soient des isométries.

Pour tout $g \in G$, l'application $T_gp \circ T_eL_g : \mathfrak{h}^\perp \to T_{gH}(G/H)$ est un isomorphisme linéaire, qui dépend de manière lisse de g. Munissons $T_{gH}(G/H)$ du produit scalaire qui rend isométrique cet isomorphisme. Notons que ce produit scalaire ne dépend que de la classe de g dans G/H. En effet, pour tout $h \in H$, nous avons, puisque p est constante sur les classes à droite de H et puisque les translations à droite et à gauche dans un groupe commutent,

$$\begin{aligned} T_{gh}p \circ T_eL_{gh} &= T_g(p \circ R_h) \circ (T_gR_h)^{-1} \circ T_hL_g \circ T_eL_h = T_gp \circ T_{gh}R_{h^{-1}} \circ T_hL_g \circ T_eL_h \\ &= T_gp \circ T_eL_g \circ T_hR_{h^{-1}} \circ T_eL_h = T_gp \circ T_eL_g \circ \operatorname{Ad} h \ . \end{aligned}$$

De plus, comme la métrique riemannienne de G est bi-invariante, nous avons, pour tous les $X, Y \in \mathfrak{h}^\perp$,

$$\langle \operatorname{Ad} h(X), \operatorname{Ad} h(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle \ ,$$

ce qui montre le résultat.

b) Nous savons que la courbure sectionnelle de G est positive ou nulle, car elle est invariante par les isométries et si $u, v \in \mathfrak{g}$ sont orthonormés, si $\overline{P}$ est le plan tangent qu'ils engendrent, alors la courbure sectionnelle de $\overline{P}$ est $\frac{1}{4}\|[u,v]\|^2 \geq 0$ (voir la proposition 3.27). Donc la courbure sectionnelle de G/H est positive, par la question (3) appliquée à $M = G$ et $N = G/H$.

Schème E.62 (1) L'application f est clairement lisse. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = (-(1+t^2)\sin\theta, \cos\theta, 0) \ ,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \big(2t\cos\theta, 0, 1\big) \ .$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}$ sont linéairement indépendants en tout point, et f est une immersion. L'application f passe au quotient en une immersion $\overline{f}$ de la variété $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, qui est injective (car la dernière coordonnée est injective en t, et les deux premières permettent de récupérer θ modulo $2\pi\mathbb{Z}$ quand t est fixé) et propre (car $\|f(t)\|$ tend vers $+\infty$ quand $|t|$ tend vers $+\infty$). Donc $\overline{f}$ est un difféomorphisme sur son image.

(2) Nous avons par le lemme de Schwarz

$$[\partial_t, \partial_\theta] = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial f}{\partial \theta}\Big) - \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}\Big) = 0 \ .$$

Puisque la connexion de Levi-Civita ∇ est sans torsion, nous avons donc

$$\nabla_{\partial_t}\partial_\theta = \nabla_{\partial_\theta}\partial_t + [\partial_t, \partial_\theta] = \nabla_{\partial_\theta}\partial_t \ .$$

Puisque la métrique riemannienne de M est parallèle pour sa connexion de Levi-Civita, nous avons

$$\langle \nabla_{\partial_t}\partial_t, \partial_t\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle \partial_t, \partial_t\rangle = 4t\cos^2\theta \ ,$$

$$\langle \nabla_{\partial_\theta}\partial_t, \partial_t\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}\langle \partial_t, \partial_t\rangle = -4t^2\cos\theta\sin\theta \ ,$$

$$\langle \nabla_{\partial_t}\partial_\theta, \partial_\theta\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle \partial_\theta, \partial_\theta\rangle = 2t(1+t^2)\sin^2\theta \ ,$$

$$\langle \nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta, \partial_\theta\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}\langle \partial_\theta, \partial_\theta\rangle = \sin\theta\cos\theta\ t^2(2+t^2) \ ,$$

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{\partial_t}\partial_t, \partial_\theta\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\langle \partial_t, \partial_\theta\rangle - \langle \partial_t, \nabla_{\partial_t}\partial_\theta\rangle = -2\sin\theta\cos\theta(1+3t^2) + 4t^2\cos\theta\sin\theta \\ &= -2\sin\theta\cos\theta(1+t^2) \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta, \partial_t\rangle &= \frac{\partial}{\partial \theta}\langle \partial_\theta, \partial_t\rangle - \langle \partial_\theta, \nabla_{\partial_\theta}\partial_t\rangle = -2t(1+t^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2t(1+t^2)\sin^2\theta \\ &= -2t(1+t^2)\cos^2\theta \ .\end{aligned}$$

En un point $f(\theta, 0)$ de M, nous avons

$$\|\partial_\theta\| = 1, \ \|\partial_t\| = 1 \quad \text{et} \quad \langle \partial_\theta, \partial_t\rangle = 0 \ ,$$

donc $(\partial_\theta, \partial_t)$ est une base orthonormée de $T_{f(\theta,0)}M$. Donc en un tel point

$$\nabla_{\partial_t}\partial_t = \langle \nabla_{\partial_t}\partial_t, \partial_t\rangle\ \partial_t + \langle \nabla_{\partial_t}\partial_t, \partial_\theta\rangle\ \partial_\theta = -2\sin\theta\cos\theta\ \partial_\theta \ ,$$

$$\nabla_{\partial_\theta}\partial_t = \nabla_{\partial_t}\partial_\theta = \langle \nabla_{\partial_\theta}\partial_t, \partial_t\rangle\ \partial_t + \langle \nabla_{\partial_\theta}\partial_t, \partial_\theta\rangle\ \partial_\theta = 0 \ .$$

$$\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta = \langle \nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta, \partial_t\rangle\ \partial_t + \langle \nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta, \partial_\theta\rangle\ \partial_\theta = 0 \ ,$$

[Autre méthode : par le calcul de la connexion de Levi-Civita des sous-variétés riemanniennes, en notant $\|$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan vectoriel $T_{f(\theta,0)}M$, qui est l'orthogonal du vecteur $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, nous avons, au point $f(\theta, 0)$,

$$\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}(\theta, 0)\Big)^{\|} = (-\cos\theta, -\sin\theta, 0)^{\|} = 0 \ ,$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_t}\partial_t = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\theta, 0)\Big)^{\|} &= (2\cos\theta, 0, 0)^{\|} = (2\cos\theta, 0, 0) - 2\cos^2\theta(\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ &= -2\sin\theta\cos\theta\ \partial_\theta \ .\end{aligned}$$

Puisque la connexion de Levi-Civita ∇ est sans torsion et par le lemme de Schwarz, nous avons

$$\nabla_{\partial_t}\partial_\theta = \nabla_{\partial_\theta}\partial_t = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial t}(\theta, 0)\Big)^{\|} = 0^{\|} = 0 \ .\ ]$$

(3) Par la dernière équation ci-dessus (avant l'autre méthode), le vecteur vitesse de la courbe $\theta \mapsto f(\theta, 0)$ est parallèle le long de lui-même, donc cette courbe est une géodésique

de M. La dernière assertion de (3) découle de même de l'avant-dernière équation ci-dessus (avant l'autre méthode).

Schème E.63 (1) Par l'antisymétrie de ∇X pour g, et puisque ∇ est sans torsion,

$$g(\nabla_{[V,X]}X, V) = -g([V,X], \nabla_V X) = g(\nabla_X V, \nabla_V X) - g(\nabla_V X, \nabla_V X)\,.$$

Par l'antisymétrie de ∇X pour g, nous avons $g(\nabla_V X, V) = -g(\nabla_V X, V)$, et par conséquent $g(\nabla_V X, V) = 0$. Puisque g est parallèle pour ∇, nous avons donc

$$g(\nabla_X \nabla_V X, V) + g(\nabla_V X, \nabla_X V) = X(g(\nabla_V X, V)) = X(0) = 0\,.$$

Puisque g est parallèle pour ∇ et encore par l'antisymétrie de ∇X pour g, nous avons

$$V(g(X,X)) = 2g(\nabla_V X, X) = -2g(V, \nabla_X X)\,,$$

donc $V(f) = -g(\nabla_X X, V)$. Si f admet un extrémum en x_0, alors $d_{x_0} f = 0$ et donc pour tout $V \in \Gamma(TM)$, nous avons $V(f)(x_0) = d_{x_0} f(V(x_0)) = 0$. Comme le produit scalaire g_{x_0} est non dégénéré, et que tout vecteur $v \in T_{x_0}M$ s'étend en un champ de vecteurs lisses sur M, nous avons donc $\nabla_X X(x_0) = 0$.

(2) Par la question précédente et puisque g est parallèle pour ∇, nous avons

$$V(V(f)) = -g(\nabla_V \nabla_X X, V) - g(\nabla_X X, \nabla_V V)\,.$$

Par la définition du tenseur de courbure $(4,0)$,

$$g(\nabla_V \nabla_X X, V) = g(\nabla_X \nabla_V X, V) + g(\nabla_{[V,X]}X, V) + R(V,X,X,V)\,.$$

Par les égalités montrées dans (1), nous avons

$$\begin{aligned}
&V(V(f))\\
&= g(\nabla_V X, \nabla_V X) - R(V,X,X,V) - g(\nabla_X X, \nabla_V V) - g(\nabla_X \nabla_V X, V) - g(\nabla_V X, \nabla_X V)\\
&= g(\nabla_V X, \nabla_V X) - R(V,X,X,V) - g(\nabla_X X, \nabla_V V)\,.
\end{aligned}$$

(3) Le résultat est immédiat si $v = 0$. Supposons donc $v \neq 0$. Si $\epsilon > 0$ est assez petit, alors l'application $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \to M$ définie par $t \mapsto \exp_x(tv)$ est bien définie, et est un plongement, par les propriétés de l'application exponentielle. En prenant une carte locale et par un argument standard de fonction plateau, il existe donc $V \in \Gamma(TM)$ qui coïncide au point $\gamma(t)$ avec le vecteur vitesse $\dot\gamma(t)$, si $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, quitte à restreindre ϵ. Il est alors immédiat que pour tout $F \in \mathrm{C}^\infty(M)$, le nombre $V(F)(\gamma(t))$ est égal à $\frac{d}{dt}(F(\gamma(t)))$. Donc en itérant, $V(V(f))(\gamma(t)) = \frac{d^2}{dt^2}(f(\gamma(t)))$. Comme γ est une géodésique, nous avons $(\nabla_V V)(\gamma(t)) = 0$ pour tout $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, et la formule

$$\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0}(f(\exp_x(tv))) = g_x(\nabla_v X\,(x), \nabla_v X\,(x)) - R(v, X(x), X(x), v)$$

découle alors directement de la question (2), puisque $\gamma(0) = x$ et $V(x) = v$.

(4) Supposons qu'il existe un champ de Killing X non identiquement nul sur M. Par la compacité de M et la continuité de f, il existe un point $x_0 \in M$ où f admet un maximum.

Comme X n'est pas identiquement nul, nous avons $X(x_0) \neq 0$. Soit $v \in T_{x_0}M$ non nul tel que v et $X(x_0)$ soient orthogonaux, de plan engendré P. Puisque la courbure sectionnelle de g est strictement négative, nous avons $R(v, X(x_0), X(x_0), v) = K(P)\,\|v\|^2\,\|X(x_0)\|^2 < 0$.

Par l'équation ($\cdot\,72\,\cdot$), nous avons

$$\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0}(f(\exp_{x_0}(tv))) = \|\nabla_v X\,(x_0)\|^2 - R(v, X(x_0), X(x_0), v) > 0\,,$$

ce qui contredit le fait que x_0 soit un maximum de f.

(5) Soit E le sous-espace propre de $\nabla X(x)$ associé à 0. L'orthogonal $E^\perp$ de E pour g_x est stable par $\nabla X(x)$ par antisymétrie. Supposons par l'absurde que E soit de dimension impaire. Alors $E^\perp$ est également de dimension impaire car la dimension de M est paire, et $\nabla X(x)$ est antisymétrique en restriction à $E^\perp$. Or un endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel réel de dimension impaire admet 0 pour valeur propre (considérer le déterminant). Ceci contredit le fait que les valeurs propres de la restriction de $\nabla X(x)$ à $E^\perp$ sont non nulles.

Supposons maintenant que X soit un champ de Killing sur M. Par compacité, il existe $x_0 \in M$ où la fonction f admet un minimum. La question (1) montre que $(\nabla_X X)(x_0) = 0$. Supposons par l'absurde que $X(x_0) \neq 0$. Alors $X(x_0)$ est un vecteur propre de $\nabla X(x_0)$ associé à la valeur propre 0. Par ce qui précède, il existe un vecteur $v \in T_{x_0}M$, non colinéaire à $X(x_0)$, tel que $\nabla_v X(x_0) = 0$. Comme la courbure sectionnelle du plan engendré par v et $X(x_0)$ est strictement positive, l'équation ($\cdot\,72\,\cdot$) montre que $\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0}(f(\exp_{x_0}(tv))) < 0$, ce qui contredit le fait que x_0 soit un minimum de f.

Schème E.64 Sous les hypothèses d'action libre et propre, il est en fait équivalent de demander que la variété quotient $\Gamma\backslash M$ soit compacte et qu'il existe un compact C de M tel que $\Gamma C = M$. Un sens est immédiat car l'image d'un compact par une application continue à valeurs dans un espace séparé est compacte. Réciproquement, si $\Gamma\backslash M$ est compacte (et connexe), son diamètre D pour la distance riemannienne quotient est fini, et si $C = B(x_0, D)$ où $x_0 \in M$ est fixé, alors C est compact par le théorème de Hopf-Rinow, et $\Gamma C = M$.

(1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans M telle que $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, \gamma x_n) = \ell(\gamma)$. Écrivons $x_n = \gamma_n x'_n$ avec $\gamma_n \in \Gamma$ et $x'_n \in C$. Quitte à extraire, nous pouvons supposer que $\lim_{n\to+\infty} x'_n = y$ dans le compact C. Puisque $d(x'_n, \gamma_n^{-1}\gamma\gamma_n x'_n)$ tend vers $\ell(\gamma)$, pour n assez grand, si $K = B(y, \ell(\gamma) + 1)$, alors $\gamma_n^{-1}\gamma\gamma_n K \cap K \neq \emptyset$. Par la propreté de l'action de Γ, nous pouvons donc supposer, quitte à extraire, que la suite $(\gamma_n^{-1}\gamma\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Donc

$$d(\gamma_0 y, \gamma\gamma_0 y) = d(y, \gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0 y) = \lim_{n\to+\infty} d(x'_n, \gamma_0^{-1}\gamma\gamma_0 x'_n) = \lim_{n\to+\infty} d(x'_n, \gamma_n^{-1}\gamma\gamma_n x'_n) = \ell(\gamma)$$

et $\gamma_0 y \in \mathrm{Min}(\gamma)$. Comme $d(x_0, \gamma x_0) = d(\gamma^k x_0, \gamma^k \gamma x_0)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathrm{Min}(\gamma)$ est invariant par γ. Il est convexe par la convexité de la fonction distance d'un espace CAT(0) comme (M, d).

(2) Si $\ell(\gamma) = 0$, alors γ admet un point fixe dans M par ce qui précède, donc $\gamma = e$ puisque Γ agit librement sur M.

Soit m le milieu de $[x_0, \gamma x_0]$. Alors $m \in \mathrm{Min}(\gamma)$ par convexité et invariance par γ, donc $d(m, \gamma m) = \ell(\gamma) = d(x_0, \gamma x_0) = d(m, \gamma x_0) + d(\gamma x_0, \gamma m)$, donc la réunion des segments

géodésiques $[m, \gamma x_0]$ et $[\gamma x_0, \gamma m]$ est géodésique, et la réunion des segments géodésiques $[\gamma^k x_0, \gamma^{k+1} x_0]$ pour $k \in \mathbb{Z}$ est une géodésique locale, donc globale car M est CAT(0). Elle est clairement invariante par γ, qui agit par translation de $\ell(\gamma)$ sur elle.

(3) Puisque la courbure sectionnelle est invariante par le groupe d'isométries Γ, et qu'elle est strictement négative sur le compact des 2-plans tangents en un point du compact C, il existe $\kappa < 0$ tel que la courbure sectionnelle de M soit au plus κ. Par le corollaire 3.56, l'espace métrique (M, d) est donc CAT(κ). En décomposant en deux triangles géodésiques un quadrilatère géodésique, la première affirmation en découle. Si c et c' sont deux géodésiques comme dans (2), alors par invariance par isométries des angles, la somme des angles du quadrilatère de sommets $c(t), \gamma c(t), \gamma c'(t), c'(t)$ est égale à $\alpha + \beta + (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) = 2\pi$ où $\alpha = \angle_{c(t)}(\gamma c(t), c'(t))$ et $\beta = \angle_{c'(t)}(\gamma c'(t), c(t))$, une contradiction.

(4) Tout élément qui commute avec un élément non trivial γ de Γ préserve $\mathrm{Min}(\gamma)$. Donc par l'unicité précédente, tout sous-groupe abélien non trivial de Γ agit par isométries librement et proprement sur $\mathbb{R}$. Les seuls tels sous-groupes du groupe des isométries de $\mathbb{R}$ sont les groupes infinis cycliques engendrés par une translation, ce qui montre le résultat.

(5) Soient N et N' deux variétés lisses compactes connexes non simplement connexes, et γ, γ' deux éléments non triviaux de leurs groupes fondamentaux respectifs. Notons C (respectivement C') le sous-groupe de $\pi_1 N$ (respectivement $\pi_1 N'$) engendré par γ (respectivement γ'). Alors le groupe $C \times C'$ est un sous-groupe abélien non trivial et non isomorphe à $\mathbb{Z}$ du groupe fondamental $\Gamma = \pi_1 N \times \pi_1 N'$ de la variété lisse compacte connexe $N \times N'$. Donc $N \times N'$ n'admet pas de métrique riemannienne à courbure sectionnelle strictement négative, sinon son revêtement universel M et Γ contrediraient la question précédente.

4 Espaces symétriques et rigidité

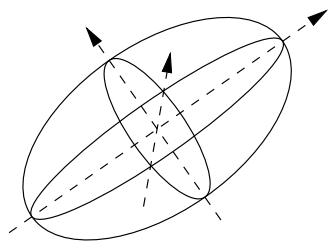
4.1 Espaces (globalement) symétriques

Un *espace (globalement) symétrique (riemannien)* est une variété riemannienne connexe M telle que pour tout $x \in M$, il existe une isométrie s_x de M fixant x telle que $T_x s_x = -\operatorname{id}_{T_x M}$.

Notons $G = \operatorname{Isom}_0(M)$ la composante neutre du groupe des isométries de M (muni de la topologie compacte-ouverte), et $K = K_{x_0}$ le stabilisateur dans G d'un point fixé x_0 de M.

Exemples. (1) Les variétés riemanniennes complètes simplement connexes à courbure sectionnelle constante sont des espaces symétriques. Par le théorème de classification 3.38, il suffit de vérifier que les variétés riemanniennes $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{S}_n$ et $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ sont des espaces symétriques. Or ces variétés riemanniennes sont homogènes, et les applications respectivement $x \mapsto -x$, $(x_0, x_1 \dots, x_n) \mapsto (x_0, -x_1, \dots, -x_n)$ et $(x_0, x_1 \dots, x_n) \mapsto (x_0, -x_1, \dots, -x_n)$ (dans le modèle du demi-hyperboloïde supérieur de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$) sont des isométries fixant les points $(0, \dots, 0) \in \mathbb{E}^n$, $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}_n$ et $(1, 0, \dots, 0) \in \mathscr{H}^n_+$ respectivement, et valant $-\operatorname{id}$ sur l'espace tangent en ce point.

(2) L'exemple suivant servira de fil conducteur à tout ce chapitre.



Pour tout entier $n \geq 2$, notons $\mathrm{Ell_n}$ l'espace des ellipsoïdes de volume 1 de l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$, c'est-à-dire le sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques définies positives de déterminant 1, qui est une sous-variété car l'application déterminant est une submersion du sous-espace vectoriel des matrices symétriques à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons x_0 la matrice identité I_n de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathfrak{p} = T_{x_0} \mathrm{Ell_n}$ l'espace tangent en x_0 à $\mathrm{Ell_n}$, qui est constitué des matrices symétriques de trace nulle.

• L'application exponentielle des matrices $X \mapsto e^X$ est un C^∞-difféomorphisme de $\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{Ell_n}$, dont nous noterons log l'inverse. En particulier, $\mathrm{Ell_n}$ est simplement connexe (et homéomorphe à $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$). Nous considèrerons aussi l'application $x \mapsto \sqrt{x} = \exp(\frac{1}{2}\log x)$, qui est l'unique C^∞-difféomorphisme de $\mathrm{Ell_n}$ dans $\mathrm{Ell_n}$ tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

• Le groupe de Lie connexe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ agit à gauche de manière lisse et transitive sur $\mathrm{Ell_n}$ par $(g, x) \mapsto g \cdot x = g\, x\, {}^t g$, où ${}^t g$ désigne toujours la matrice transposée de g, et le stabilisateur de $x_0 = I_n$ est le sous-groupe compact $\mathrm{SO}(n)$. Par le théorème 1.62, l'application orbitale $g \mapsto g \cdot x_0 = g\, {}^t g$ induit un C^∞-difféomorphisme de la variété homogène quotient $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ dans $\mathrm{Ell_n}$.

• Munissons $\mathfrak{p} = T_{x_0} \mathrm{Ell_n}$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{x_0}$, restriction du produit scalaire usuel $(X, Y) \mapsto \operatorname{tr}({}^t XY)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: pour tous les $X = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $Y = (Y_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathfrak{p}$, nous avons

$$\langle X, Y \rangle_{x_0} = \operatorname{tr}(XY) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} X_{i,j}\, Y_{i,j}\ .$$

Ce produit scalaire sur $\mathfrak{p}$ est invariant par l'action (tangente) de $\mathrm{SO}(n)$. En effet, notons tout d'abord que pour tout $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, le C^∞-difféomorphisme $m_g : \mathrm{Ell_n} \to \mathrm{Ell_n}$ défini par $x \mapsto g \cdot x$, étant une restriction d'une application linéaire, admet pour application tangente en x_0 l'application $n_g = T_{x_0} m_g : X \mapsto gX\,{}^t g$ de $T_{x_0}\mathrm{Ell_n}$ dans $T_{g\cdot x_0}\mathrm{Ell_n}$. Si $g \in \mathrm{SO}(n)$, l'application linéaire $n_g : T_{x_0}\mathrm{Ell_n} \to T_{x_0}\mathrm{Ell_n}$ est isométrique, car pour tous les $X, Y \in \mathfrak{p}$, nous avons, puisque $g^{-1} = {}^t g$ et par les propriétés de la trace,

$$\langle n_g(X), n_g(Y)\rangle_{x_0} = \mathrm{tr}(gX\,{}^t g g Y\,{}^t g) = \mathrm{tr}(XY\,{}^t g g) = \mathrm{tr}(XY) = \langle X, Y\rangle_{x_0} \ .$$

Par exemple par le corollaire 3.4, il existe donc une unique métrique riemannienne sur $\mathrm{Ell_n}$, invariante à gauche par $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, qui vaut $\langle\cdot,\cdot\rangle_{x_0}$ sur $\mathfrak{p} = T_{x_0}\mathrm{Ell_n}$. Dans ce qui suit, nous munissons $\mathrm{Ell_n}$ de cette métrique riemannienne. Pour tout $x \in \mathrm{Ell_n}$, l'élément $\sqrt{x} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ envoie le point x_0 sur le point x. Donc la norme riemannienne de cette métrique riemannienne vérifie, pour tout $x \in \mathrm{Ell_n}$ et tout $X \in T_x\mathrm{Ell_n}$,

$$\|X\|_x = \|\sqrt{x}^{-1} X \sqrt{x}^{-1}\|_{x_0} \ .$$

- Notons s_{x_0} le C^∞-difféomorphisme de $\mathrm{Ell_n}$ défini par

$$s_{x_0} : x \mapsto x^{-1} \ .$$

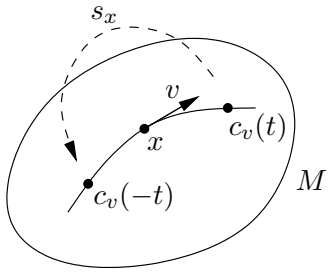
Puisque l'application tangente en $x \in \mathrm{Ell_n}$ de s_{x_0} est $X \mapsto -x^{-1}Xx^{-1}$, l'application s_{x_0} est une isométrie riemannienne, qui vaut $-\,\mathrm{id}$ en $x = x_0$. Par homogénéité, l'espace $\mathrm{Ell_n}$ est donc un espace symétrique.

- Remarquons que la composante neutre du groupe des isométries de $\mathrm{Ell_n}$ est alors le groupe $G = \mathrm{PSL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/(\{\pm I_n\} \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}))$, et le stabilisateur de x_0 est l'image $\mathrm{PSO}(n)$ de $\mathrm{SO}(n)$ dans G.

Exercice E.65 *Montrer que la distance riemannienne de* $\mathrm{Ell_n}$ *est*

$$d(x, y) = \frac{1}{2}\|\log \sqrt{x}^{-1} y \sqrt{x}^{-1}\|_{x_0} \ .$$

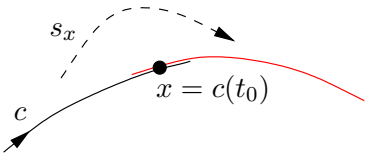
Remarques. (1) Pour tout point x d'une variété riemannienne N, une *symétrie (géodésique) locale* de N en x est une application lisse $s_x : U \to U$, où U est un voisinage ouvert de x dans N, telle que pour toute géodésique $c :]-\epsilon, +\epsilon[\to N$ d'origine $c(0) = x$ et d'image contenue dans U, nous ayons $s_x(c(t)) = c(-t)$ pour tout $t \in]-\epsilon, +\epsilon[$. Par exemple, si $\epsilon < \mathrm{inj}_N(x)$, alors l'application $s_x : B(x, \epsilon) \to B(x, \epsilon)$ définie par $y \mapsto \exp_x(-\exp_x^{-1}(y))$ est une symétrie locale en x. Celle-ci n'est en général pas une isométrie. Toute autre symétrie locale en x coïncide avec s_x sur un voisinage de x.



La condition $T_x s_x = -\,\mathrm{id}_{T_x M}$ dans la définition d'un espace symétrique M est donc équivalente à demander qu'en restriction à un voisinage ouvert assez petit de x, l'isométrie s_x soit une symétrie locale de M en x.

(2) Tout espace symétrique M est complet, car toute géodésique maximale de M est définie sur tout $\mathbb{R}$:

si $c :]a, b[\to M$ est une géodésique et $b \in \mathbb{R}$, soit $t_0 \in]a, b[$ suffisamment proche de b pour que $2t_0 - a > b$. Alors l'application $t \mapsto s_{c(t_0)} \circ c(2t_0 - t)$ de $]2t_0 - b, 2t_0 - a[$ est une géodésique, qui coïncide avec c sur un voisinage de t_0, donc permet de prolonger c au-delà de b.



(3) Par le théorème de Myers-Steenrod 3.10, G est un groupe de Lie réel connexe agissant de manière lisse sur M, et par la proposition 3.11, K est un sous-groupe de Lie compact de G. Nous noterons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G.

(4) Comme M est connexe, et par la proposition 3.11, une isométrie s_x comme dans la définition d'un espace symétrique est unique. Nous l'appellerons la *symétrie géodésique* en x de M. En particulier, pour tout $g \in \mathrm{Isom}(M)$, nous avons

$$g \circ s_x \circ g^{-1} = s_{g(x)} \ .$$

En utilisant l'application exponentielle riemannienne, il est facile de montrer que l'application $x \mapsto s_x$ de M dans le groupe des isométries de M (muni de la topologie compacte-ouverte) est alors continue.

(5) Tout espace symétrique M est homogène. En fait, le groupe G agit transitivement sur M, car pour tous les x, y dans M, si m est le milieu d'un segment géodésique $c : [0, d(x, y)] \to M$ entre x et y (qui existe par complétude), alors l'isométrie $s_m \circ s_x$ (qui appartient bien à G car $t \mapsto s_{c(t)} \circ s_{c(0)}$ est un chemin (continu) d'isométries de id à $s_m \circ s_x$) envoie x sur y. Réciproquement, si M est une variété riemannienne homogène, il suffit qu'il existe un point x de X et une isométrie s de M tels que $T_x s = -\mathrm{id}_{T_x M}$ pour que M soit un espace symétrique.

Par le théorème 1.62 (4), l'application orbitale $\varphi_{x_0} : g \mapsto g x_0$ induit par passage au quotient un C^∞-difféomorphisme

$$G/K \to M \ ,$$

et $T_e \varphi_{x_0} : \mathfrak{g} \to T_{x_0} M$ est une application linéaire surjective de noyau l'algèbre de Lie $\mathfrak{K}$ de K, par le théorème 1.60.

4.1.1 Involutions de Cartan

Soient M un espace symétrique, $G = \mathrm{Isom}_0(M)$, $x_0 \in M$, $K = \mathrm{Stab}_G(x_0)$ et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G.

Pour tout $x \in M$, si s_x est la symétrie géodésique en x, l'application $\sigma_x : G \to G$ définie par $g \mapsto s_x \circ g \circ s_x$ est un automorphisme involutif du groupe de Lie G. Donc $\theta_x = T_e \sigma_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est un automorphisme involutif de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, appelé *l'involution de Cartan* de M (relativement à x).

Notons $\sigma = \sigma_{x_0}$, et pour tout automorphisme de groupes α de G, notons $G^\alpha = \{g \in G \ : \ \alpha(g) = g\}$ le sous-groupe fixe de α et G_0^α la composante neutre de G^α. Ce sont des sous-groupes fermés, donc des sous-groupes de Lie plongés de G.

Proposition 4.1 *(1) Nous avons $G_0^\sigma \subset K \subset G^\sigma$.*

(2) Pour tout groupe de Lie connexe G, pour tout automorphisme involutif σ de G et pour tout sous-groupe compact K de G tel que $G_0^\sigma \subset K \subset G^\sigma$, toute métrique riemannienne invariante à gauche par G sur la variété quotient G/K est symétrique.

De plus, il existe une telle métrique riemannienne invariante à gauche : si $x = eK$, prendre $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ un produit scalaire sur $T_x(G/K)$; le rendre invariant par l'action de K quitte à le remplacer par $(v, w) \mapsto \int_{k \in K} \langle T_x m_k(v), T_x m_k(w) \rangle_x \, d\mu_K(k)$ où $m_k : y \mapsto ky$ est l'action de $k \in K$ sur G/K et μ_K est la mesure de Haar normalisée de K (qui est invariante par translations à droite, voir l'exemple (v) de la partie 3.1) ; enfin, pour tout $y \in G/K$, poser $\langle v, w \rangle_y = \langle (T_x g)^{-1} v, (T_x g)^{-1} w \rangle_x$ pour n'importe quel $g \in G$ tel que $y = gx$.

Démonstration. (1) Pour tout $k \in K$, l'élément $k' = s_{x_0} \circ k \circ s_{x_0}$ fixe x_0 et $T_{x_0} k' = T_{x_0} k$, donc les isométries k et k' sont égales par la connexité de M et la proposition 3.11. Donc K est contenu dans G^σ.

Si $(\gamma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un sous-groupe à un paramètre de G^σ, alors $s_{x_0} \circ \gamma_t(x_0) = s_{x_0} \circ \gamma_t \circ s_{x_0}(x_0) = \gamma_t(x_0)$, donc $t \mapsto \gamma_t(x_0)$ est un chemin de points fixes de s_{x_0}, qui vaut x_0 en $t = 0$. Comme x_0 est un point fixe isolé de s_{x_0}, pour tout $t \in \mathbb{R}$, ceci implique que $\gamma_t(x_0) = x_0$ et donc γ_t appartient à K. Ceci montre que G_0^σ, qui est engendré par l'image de son application exponentielle, est contenu dans K.

(2) Notons que K est fermé, donc un sous-groupe de Lie plongé, et la variété homogène quotient G/K est bien définie. Puisque K est contenu dans le sous-groupe fixe de σ, l'involution lisse σ induit par passage au quotient une involution lisse $s : G/K \to G/K$ fixant $x_0 = eK$.

Montrons que $T_{x_0} s = -\operatorname{id}$. L'application linéaire $T_e\sigma$ est diagonalisable, car $(T_e\sigma)^2 = \operatorname{id}$ (et le polynôme $X^2 - 1$ est scindé). Le sous-espace propre $\mathfrak{K}$ associé à la valeur propre 1 est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ car $T_e\sigma$ est un automorphisme d'algèbres de Lie. Puisque $\sigma \circ \exp = \exp \circ T_e\sigma$, le sous-groupe de Lie connexe immergé d'algèbre de Lie $\mathfrak{K}$, engendré par $\exp(\mathfrak{K})$, est donc fixe par σ, donc contenu dans G_0^σ, et en fait égal, car l'inclusion inverse est immédiate. Puisque K est coincé entre G^σ et G_0^σ, l'algèbre de Lie de K est donc égale au sous-espace propre de $T_e\sigma$ associé à la valeur propre 1. La projection canonique $\pi : G \to G/K$ induit donc un isomorphisme entre le sous-espace propre $\mathfrak{p}$ de $T_e\sigma$ associé à la valeur propre -1 et $T_{x_0}(G/K)$, ce qui montre que $T_{x_0} s = -\operatorname{id}$.

Un automorphisme f d'un groupe de Lie H préserve une métrique riemannienne invariante à gauche sur H si et seulement si $T_e f$ préserve le produit scalaire sur $T_e H$. En effet, pour tout $h \in H$, en rappelant que L_h est la translation à gauche par h dans H, nous avons $f \circ L_h = L_{f(h)} \circ f$, donc $T_h f = T_e L_{f(h)} \circ T_e f \circ (T_e L_h)^{-1}$ est une composée d'applications préservant le produit scalaire.

Notons $\pi : G \to G/K$ la projection canonique. Munissons G d'une métrique riemannienne invariante à gauche rendant $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{p}$ orthogonaux et telle que $T_e\pi_{|\mathfrak{p}}$ préserve les produits scalaires. Alors $T_e\sigma$ préserve le produit scalaire de $T_e G = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$, donc σ est une isométrie. Par conséquent, s, qui est obtenue par passage au quotient de σ, est une isométrie fixant x_0.

Par homogénéité de la variété riemannienne G/K, ceci montre l'assertion (2). □

Notons $\theta = \theta_{x_0} = T_e\sigma_{x_0} = T_e\sigma$,

$$\mathfrak{K} = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ \theta(X) = X\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ \theta(X) = -X\}$$

les espaces propres de θ pour les valeurs propres $+1$ et -1.

Proposition 4.2 *Ces espaces propres vérifient*

(i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ *et cette décomposition en somme directe est* $\mathrm{Ad}(K)$*-invariante ;*

(ii) $[\mathfrak{K}, \mathfrak{K}] \subset \mathfrak{K}$, $[\mathfrak{K}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{K}$ *;*

(iii) $\mathfrak{K}$ *est l'algèbre de Lie de* K *et* $T_e\varphi_{x_0} : \mathfrak{p} \to T_{x_0}M$ *est un isomorphisme ;*

(iv) la restriction de la forme de Killing B *de* $\mathfrak{g}$ *à* $\mathfrak{K}$ *est définie négative ;*

(v) la restriction de B *à* $\mathfrak{K} \times \mathfrak{p}$ *est nulle.*

La décomposition en somme directe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$$

est appelée la *décomposition de Cartan* de M (relativement à x_0). Elle est orthogonale pour la forme de Killing, par la dernière assertion. Nous identifierons dans la suite $\mathfrak{p}$ et $T_{x_0}M$ par l'isomorphisme $T_e\varphi_{x_0} : \mathfrak{p} \to T_{x_0}M$. Notons que $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ si et seulement si elle est abélienne.

Démonstration. (i) La première affirmation est immédiate car $\theta^2 = \mathrm{id}$ (et le polynôme $X^2 - 1$ est scindé). Pour tout $k \in K$, puisque $k \circ s_{x_0} \circ k^{-1} = s_{kx_0} = s_{x_0}$ (donc $i_k \circ \sigma = \sigma \circ i_k$ en notant i_k la conjugaison par k) et en différentiant en e, nous avons $(\mathrm{Ad}\, k) \circ \theta = \theta \circ (\mathrm{Ad}\, k)$, ce qui montre l'invariance de $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{p}$ par $\mathrm{Ad}\, K$.

(ii) C'est immédiat car θ est un automorphisme d'algèbres de Lie.

(iii) Par les propriétés de l'application exponentielle de G, nous avons

$$\sigma(\exp tX) = \exp(t\theta(X))$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Ceci entraîne que l'algèbre de Lie de K, qui est contenue dans celle de G^σ, est contenue dans $\mathfrak{K}$. Ceci entraîne aussi que $\mathfrak{K}$ est contenu dans l'algèbre de Lie de G_0^σ, qui est contenue dans celle de K.

Puisque $\mathfrak{K}$ est le noyau de $T_e\varphi_{x_0}$, la restriction de cette application linéaire surjective à tout supplémentaire de $\mathfrak{K}$ est un isomorphisme.

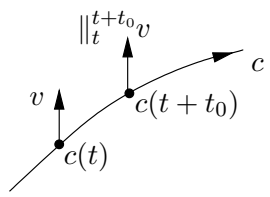
(iv) Puisque K est compact, considérons un produit scalaire $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ sur $\mathfrak{g}$ qui est $\mathrm{Ad}\, K$-invariant, donc $\mathrm{ad}\, \mathfrak{K}$ alterné puisque $\mathfrak{K}$ est l'algèbre de Lie de K. Pour tout X dans $\mathfrak{K}$, l'opérateur $\mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, X$ étant symétrique pour ce produit scalaire est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_i)_{1 \le i \le n}$ de $\mathfrak{g}$. Donc

$$B(X, X) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, X) = \sum_{i=1}^{n} \langle\langle \mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, X(e_i), e_i \rangle\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle\langle [X, e_i], [X, e_i] \rangle\rangle \ .$$

En particulier, $B(X, X)$ est négatif ou nul, et nul si et seulement si $[X, e_i] = 0$ pour tout i, donc si et seulement si X appartient au centre de $\mathfrak{g}$. Comme K agit fidèlement sur M, ceci implique que $X = 0$. En effet, l'élément $\exp tX$ de K fixe x_0. Puisque X est central, l'élément $\exp tX$ commute avec les élements $\exp(tY)$ pour $Y \in \mathfrak{g}$, qui engendrent G par connexité. Comme G agit transitivement sur M, ceci implique que $(\exp tX)x = x$ pour tout $x \in M$, donc que l'isométrie $\exp tX$ de M est égale à l'élément neutre pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(v) La dernière assertion découle d'un calcul par blocs dans la décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ de la trace de $\mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, Y$ si $X \in \mathfrak{K}$ et $Y \in \mathfrak{p}$, en utilisant l'assertion (ii). $\square$

Une *transvection* ϕ d'une variété riemannienne complète N est une isométrie de N qui translate une géodésique et induit le transport parallèle le long d'elle :



il existe une géodésique (riemannienne) $c : \mathbb{R} \to N$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $v \in T_{c(t)}N$, en notant $\|$ le transport parallèle le long de c,

$$\phi(c(t)) = c(t+t_0) \quad \text{et} \quad T_{c(t)}\phi(v) = \|_t^{t+t_0} v \ .$$

Cette géodésique n'est pas forcément unique. Par exemple, les translations dans $\mathbb{R}^n$ sont les transvections de $\mathbb{E}^n$.

Proposition 4.3 *Les sous-groupes lisses à un paramètre de transvections de M sont les $t \mapsto g(\exp tv)g^{-1}$ où $v \in \mathfrak{p}$ et $g \in G$.*

Les géodésiques de M issues de x_0 sont des applications de $\mathbb{R}$ dans M de la forme

$$t \mapsto (\exp tv)x_0$$

où $v \in \mathfrak{p}$.

Démonstration. Soit $c : \mathbb{R} \to M$ une géodésique telle que $c(0) = x_0$, considérons l'application $t \mapsto \gamma_t = s_{c(\frac{t}{2})} \circ s_{c(0)}$. Puisque M est complet et connexe, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe au plus une isométrie translatant le long de c d'une distance algébrique t et induisant le transport parallèle le long de c.

L'application $\gamma_s = s_{c(\frac{s}{2})} \circ s_{c(0)}$ translate de s le long de c, et induit le transport parallèle. En effet, soit $t \mapsto X(t)$ un champ de vecteurs parallèle le long de c. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, puisque $s_{c(s)}$ est une isométrie, l'application $t \mapsto Y(t) = T_{c(t)}s_{c(s)}(X(t))$ est un champ de vecteurs parallèle le long de $t \mapsto s_{c(s)}(c(t)) = c(2s-t)$, valant $-X(s)$ en $t = s$, donc $Y(t) = -X(2s-t)$ par unicité. En appliquant deux fois ce raisonnement, nous obtenons que $T_{c(t)}\gamma_s(X(t)) = X(t+s)$, ce qui montre le résultat cherché. Puisque le transport parallèle $\|$ le long de c vérifie $\|_s^t \circ \|_u^s = \|_u^t$, nous en déduisons que $t \mapsto \gamma_t$ est un sous-groupe lisse à un paramètre de transvections le long de c. Par l'unicité énoncée en préambule, tout sous-groupe lisse à un paramètre de transvections de M le long d'une géodésique passant par x_0 est de cette forme. Par homogénéité de M par G, les sous-groupes lisses à un paramètre de transvections de M sont donc les conjugués de ceux-ci.

Par définition de l'exponentielle, le sous-groupe lisse à un paramètre $t \mapsto \gamma_t$ est de la forme $t \mapsto \exp tv$ où $v \in \mathfrak{g}$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sigma(\exp tv) = s_{x_0} \circ s_{c(\frac{t}{2})} \circ s_{c(0)} \circ s_{x_0}^{-1} = s_{c(0)} \circ s_{c(\frac{t}{2})} = (\exp tv)^{-1} = \exp(-tv) \ .$$

En dérivant en $t = 0$, nous avons donc $\theta(v) = -v$, donc $v \in \mathfrak{p}$. En particulier, $c(t) = s_{c(\frac{t}{2})}(x_0) = s_{c(\frac{t}{2})} \circ s_{c(0)}(x_0) = (\exp tv)x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, soit $v \in \mathfrak{p}$, notons $c : t \mapsto c(t)$ la géodésique de M telle que $\dot{c}(0) = T_{x_0}\varphi_{x_0}(v)$. Par ce qui précède, il existe $w \in \mathfrak{p}$ tel que $c(t) = (\exp tw)x_0$. En dérivant en $t = 0$, nous avons $T_{x_0}\varphi_{x_0}(w) = \dot{c}(0) = T_{x_0}\varphi_{x_0}(v)$. Par la proposition 4.2 (iii), nous en déduisons que $v = w$. Ceci montre que $t \mapsto (\exp tv)x_0$ est une géodésique. $\square$

Exemple. Reprenons l'exemple standard $\mathrm{Ell_n}$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de la composante neutre $G = \mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$ du groupe des isométries de $\mathrm{Ell_n}$ est

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \ : \ \mathrm{tr}\, X = 0\} \ .$$

Nous avons vu que la symétrie géodésique de $\mathrm{Ell_n}$ en $x_0 = I_n$ est $s_{x_0} : x \mapsto x^{-1}$. Pour tout $g \in G$, l'isométrie $s_{x_0} \circ g \circ s_{x_0}$ agit sur $\mathrm{Ell_n}$ par $x \mapsto {}^t g^{-1} x g^{-1}$. Donc l'involution $\sigma : g \mapsto s_{x_0} g s_{x_0}$ de G est $\sigma : g \mapsto {}^t g^{-1}$. Donc l'involution de Cartan est $\theta = T_e\sigma : X \mapsto -\,{}^t X$. L'espace propre $\mathfrak{K}$ de θ pour la valeur propre $+1$ et celui $\mathfrak{p}$ pour la valeur propre -1 sont

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \ : \ {}^t X = -X\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \ : \ {}^t X = X\} \ .$$

La décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ est la décomposition $X = \frac{1}{2}(X - {}^t X) + \frac{1}{2}(X + {}^t X)$ d'une matrice en sa partie anti-symétrique et sa partie symétrique. L'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to G$ du groupe de Lie G est $X \mapsto \pm e^X$, où nous notons par $\pm A$ l'image de $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$. Les géodésiques passant par $x_0 = I_n$ sont donc les courbes de la forme suivante, où $X \in \mathfrak{p}$ est une matrice symétrique de trace nulle,

$$s \mapsto \exp(sX) \cdot x_0 = e^{sX} \cdot x_0 = (e^{sX})\, {}^t(e^{sX}) = e^{2sX} \ .$$

4.1.2 Décomposition de de Rham

Soient (M, g) une variété riemannienne et $x_0 \in M$. Rappelons (voir la partie 2.3.7) que le groupe d'holonomie $\mathrm{Hol}(x_0) = \mathrm{Hol}_g(x_0)$ de g est le sous-groupe du groupe orthogonal $\mathrm{O}(g_{x_0})$ du produit scalaire g_{x_0} sur l'espace tangent $T_{x_0}M$ constitué des applications de transport parallèle le long des lacets en x_0 de classe C^1 par morceaux. Si M est un produit riemannien $M_1 \times \cdots \times M_\ell$ et $x_0 = (x_1, \ldots, x_\ell)$, alors $\mathrm{Hol}(x_0) = \mathrm{Hol}(x_1) \times \cdots \times \mathrm{Hol}(x_\ell)$.

Nous dirons qu'un champ de k-plans Δ sur M est *parallèle* si pour toute courbe C^1 par morceaux $c : [a, b] \to M$, le transport parallèle le long de c envoie $\Delta_{c(a)}$ sur $\Delta_{c(b)}$.

Proposition 4.4 *Soient (M, g) une variété riemannienne connexe de dimension n et $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) M admet un champ lisse parallèle de k-plans ;

(ii) $\mathrm{Hol}(x_0)$ préserve un sous-espace vectoriel de dimension k de $T_{x_0}M$.

De plus,

(iii) tout champ lisse parallèle de k-plans est intégrable, et toute feuille du feuilletage qu'il définit est totalement géodésique ;

(iv) si M est complète, simplement connexe et admet un champ lisse parallèle de k-plans, alors M est isométrique à un produit riemannien $M_1 \times M_2$ où M_1 est de dimension k.

Démonstration. L'équivalence entre (i) et (ii) est immédiate.

Montrons l'assertion (iii). Si Δ est un champ lisse parallèle de k-plans, si X et Y sont deux champs de vecteurs lisses sur M qui appartiennent à Δ en tout point (c'est-à-dire tels que $X(x), Y(x) \in \Delta(x)$ pour tout $x \in M$), alors $\nabla_X Y$ appartient aussi à Δ en tout point, car si $\|$ est le transport parallèle le long d'une courbe intégrale $t \mapsto c(t)$ de X passant par $c(0) = x \in M$, alors, par la formule $(\cdot 34 \cdot)$ de la partie 2.3.7,

$$\nabla_X Y(x) = \lim_{t \to 0,\, t \neq 0} \frac{\|_t^0\, Y(c(t)) - Y(x)}{t} \in \Delta(x) \ .$$

Donc puisqu'une connexion de Levi-Civita est sans torsion, le champ de vecteurs

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

appartient à Δ en tout point. Par le théorème de Frobénius 1.40, Δ est donc intégrable.

Soit $c : I \to M$ une géodésique telle que $0 \in I$ et $\dot{c}(0) \in \Delta(c(0))$. Puisque le champ de vecteurs vitesses de c est parallèle le long de c et puisque le champ de k-plans Δ est parallèle, la géodésique c est tangente en tout point à Δ, donc reste dans la feuille du feuilletage intégrant Δ passant par $c(0)$. Donc toute telle feuille est totalement géodésique.

Montrons l'assertion (iv). Puisque $\mathrm{Hol}(x_0)$ est contenu dans le groupe orthogonal de $T_{x_0}M$, s'il préserve un sous-espace E de dimension k de $T_{x_0}M$, il préserve aussi son supplémentaire orthogonal $E^\perp$.

Soient Δ et $\Delta^\perp$ les champs lisses parallèles de k-plans sur M valant E et $E^\perp$ en x_0, les feuilletages $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}^\perp$ qu'ils définissent sont à feuilles totalement géodésiques, complètes et perpendiculaires en tout point, donc chacun d'eux est invariant par le transport parallèle le long de l'autre. Dans une carte locale feuilletée en tout point $x \in M$, la variété riemannienne M est donc isométrique au produit riemannien $\mathscr{F}_{x,loc} \times \mathscr{F}^\perp_{x,loc}$ des feuilles locales de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}^\perp$ en x.

Soient $\mathscr{F}_{x_0} = \exp_{x_0} E$ et $\mathscr{F}^\perp_{x_0} = \exp_{x_0} E^\perp$ les feuilles de ces feuilletages passant par x_0. Notons π_E la projection orthogonale de $T_{x_0}M$ dans E, et $p : M \to \mathscr{F}_{x_0}$ l'application qui à un point x de M associe $\exp(\pi_E(v))$ où $v \in T_{x_0}M$ est tel que $\exp_{x_0} v = x$. Définissons de même $p^\perp : M \to \mathscr{F}^\perp_{x_0}$. En utilisant la structure de produit riemannien local, il est possible de montrer que cette application ne dépend pas des choix des vecteurs v, et que l'application $(p, p^\perp)$ de M dans le produit riemannien $\mathscr{F}_{x_0} \times \mathscr{F}^\perp_{x_0}$ est une isométrie locale. D'après la proposition 3.25 (1), cette isométrie locale est un revêtement riemannien, par complétude de M. Puisque M est simplement connexe, ce revêtement riemannien se relève en une isométrie de M dans le produit de deux revêtements riemanniens universels M_1 de $\mathscr{F}_{x_0}$ et M_2 de $\mathscr{F}^\perp_{x_0}$. □

Une variété riemannienne est dite *irréductible* si elle est non vide et non réduite à un point, et n'est pas isométrique à un produit riemannien de deux variétés riemanniennnes non réduites à un point.

Théorème 4.5 (Théorème de décomposition de de Rham) *Soit (M, g) une variété riemannienne complète simplement connexe non vide. Alors il existe $k, \ell \in \mathbb{N}$ et $M_1, \ldots, M_\ell$ des variétés riemanniennes complètes, simplement connexes, irréductibles, non isométriques à $\mathbb{R}$ telles que M soit isométrique au produit riemannien $\mathbb{R}^k \times M_1 \times \cdots \times M_\ell$.*

De plus, le couple (k, ℓ) est unique, et les $M_1, \ldots, M_\ell$ sont uniques à isométries et permutations près. En particulier, il existe un groupe fini F et une suite exacte de groupes

$$1 \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^k) \times \mathrm{Isom}(M_1) \times \cdots \times \mathrm{Isom}(M_\ell) \longrightarrow \mathrm{Isom}(M) \longrightarrow F \longrightarrow 1 \,.$$

Les variétés riemanniennes $\mathbb{R}^k, M_1, \ldots, M_\ell$ sont appelées les *facteurs* de de Rham de M, et sont bien définies à isométries et permutations près. Le facteur $\mathbb{R}^k$ est appelé le *facteur euclidien* de M. De plus, nous avons par restriction un isomorphisme de groupes

$$\mathrm{Isom}_0(\mathbb{R}^k) \times \mathrm{Isom}_0(M_1) \times \cdots \times \mathrm{Isom}_0(M_\ell) \simeq \mathrm{Isom}_0(M) \,.$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur la dimension de M. Si M est irréductible, le résultat est immédiat, avec $(k,l) = (1,0)$ si M est isométrique à $\mathbb{R}$ et $(k,l) = (0,1)$ sinon. Si M n'est pas irréductible, c'est-à-dire si M est isométrique à un produit riemannien non trivial $M' \times M''$, alors une décomposition de de Rham de M est obtenue en prenant une décomposition de de Rham de M' et de M'' et en regroupant leurs facteurs euclidiens.

L'unicité, qui est la partie délicate de ce résultat, vient du fait que le groupe d'holonomie d'un produit riemannien est le produit des groupes d'holonomie des facteurs, et que ce facteur est irréductible si et seulement si son groupe d'holonomie ne préserve pas de sous-espace vectoriel de dimension et de codimension non nulle, par la proposition 4.4 (et le fait qu'un produit d'espaces topologiques non vides est simplement connexe si et seulement si chacun d'entre eux l'est). □

4.1.3 Courbure des espaces symétriques

Soient M un espace symétrique, $G = \mathrm{Isom}_0(M)$, $x_0 \in M$, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de M relativement à x_0. Identifions $\mathfrak{p}$ avec $T_{x_0}M$ par $T_e\varphi_{x_0}$ où $\varphi_{x_0} : g \mapsto gx_0$ est l'application orbitale en x_0.

Pour calculer la courbure, par homogénéité, il suffit de calculer les valeurs du tenseur de courbure sur les vecteurs tangents en x_0.

Proposition 4.6 *Pour tous les $u, v, w \in \mathfrak{p}$, nous avons*

$$R(u,v)w = -[[u,v],w] \ .$$

Notons que $[[u,v],w] \in \mathfrak{p}$ si $u, v, w \in \mathfrak{p}$, par la proposition 4.2 (ii), et donc la formule ci-dessus a un sens par l'identification entre $T_{x_0}M$ et $\mathfrak{p}$.

Démonstration. Soient X, Y, Z les champs de vecteurs sur M, dont les flots sont les sous-groupes à un paramètre de transvections $t \mapsto \exp(tu), \exp(tv), \exp(tw)$ respectivement, c'est-à-dire tels que

$$X(x) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp(tu)x$$

et de même pour Y et Z, de sorte que $X(x_0) = u, Y(x_0) = v$ et $Z(x_0) = w$. Nous avons par définition

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \ .$$

Rappelons que le crochet de Lie $[X,Y]$ de deux champs de vecteurs X et Y de flots locaux $(\phi_t)_t$ et $(\psi_t)_t$ se calcule par

$$[X,Y](x) = \frac{d}{dt}_{|t=0^+} \phi_{\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \phi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{-\sqrt{t}}(x) \ ,$$

(voir l'exercice E.5 de la partie 1.2.1) et (voir l'exercice E.11 de la partie 1.4.1) que le crochet de Lie $[u,v]$ de deux vecteurs de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie se calcule par

$$[u,v] = \frac{d}{dt}_{|t=0^+} \exp(\sqrt{t}\,u)\, \exp(\sqrt{t}\,v)\, \exp(-\sqrt{t}\,u)\, \exp(-\sqrt{t}\,v) \ .$$

Donc $[X,Y](x_0) = T_e\varphi_{x_0}([u,v])$ est nul, car $[u,v] \in \mathfrak{K}$ et $\mathfrak{K}$ est le noyau de $T_e\varphi_{x_0}$. Comme l'évaluation de $\nabla_{[X,Y]}Z$ en x_0 ne dépend que de la valeur de $[X,Y]$ en x_0, nous avons donc $\nabla_{[X,Y]}Z(x_0) = 0$.

Si W est un champ de vecteurs complet sur une variété riemannienne N, dont le flot $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un sous-groupe à un paramètre d'isométries, alors pour tous les $t \in \mathbb{R}$, $x \in N$ et $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$,

$$\begin{aligned}\langle \phi_t^* Y, \phi_t^* Z\rangle(x) &= \langle (T_x\phi_t)^{-1} Y(\phi_t(x)), (T_x\phi_t)^{-1} Z(\phi_t(x))\rangle = \langle Y(\phi_t(x)), Z(\phi_t(x))\rangle \\ &= \langle Y, Z\rangle \circ \phi_t(x) \ ,\end{aligned}$$

et par les propriétés d'unicité de la connexion de Levi-Civita, nous avons

$$\phi_t^*(\nabla_Y Z) = \nabla_{\phi_t^* Y}(\phi_t^* Z) \ , \tag{$\cdot 77 \cdot$}$$

car

$$\phi_{-t}^* \nabla_{\phi_t^* Y}(\phi_t^* Z) - \phi_{-t}^* \nabla_{\phi_t^* Z}(\phi_t^* Y) = \phi_{-t}^*[\phi_t^* Y, \phi_t^* Z] = [Y, Z] \ ,$$

et

$$\begin{aligned}&\langle \phi_{-t}^* \nabla_{\phi_t^* Y}(\phi_t^* Z), X\rangle + \langle Z, \phi_{-t}^* \nabla_{\phi_t^* Y}(\phi_t^* X)\rangle \\ &= \langle \nabla_{\phi_t^* Y}(\phi_t^* Z), \phi_t^* X\rangle \circ \phi_{-t} + \langle \phi_t^* Z, \nabla_{\phi_t^* Y}(\phi_t^* X)\rangle \circ \phi_{-t} \\ &= (\phi_t^* Y)(\langle \phi_t^* Z, \phi_t^* X\rangle) \circ \phi_{-t} = (\phi_t^* Y)(\langle Z, X\rangle \circ \phi_t) \circ \phi_{-t} = Y\langle Z, X\rangle \ .\end{aligned}$$

D'où en notant $\mathscr{L}_X : Y \mapsto [X, Y] = \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi_t^* Y$ la dérivée de Lie le long de X, qui vérifie $\mathscr{L}_{[X,Y]} = \mathscr{L}_X \circ \mathscr{L}_Y - \mathscr{L}_Y \circ \mathscr{L}_X$ (voir la formule ($\cdot 16 \cdot$) au début de la partie 2.3), et en dérivant en $t = 0$ l'équation ($\cdot 77 \cdot$), nous avons par $\mathbb{R}$-bilinéarité

$$\mathscr{L}_X(\nabla_Y Z) = \nabla_{\mathscr{L}_X Y} Z + \nabla_Y(\mathscr{L}_X Z) \ .$$

Par la formule ($\cdot 34 \cdot$) de la partie 2.3.7 et comme le flot de X induit le transport parallèle $\|$ le long de $t \mapsto \phi_t(x_0) = \exp(tu)x_0$, nous avons

$$\nabla_X Y(x_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\|_t^0 \, Y(\phi_t(x_0)) - Y(x_0)}{t} = \frac{d}{dt}_{|t=0^+} \phi_t^* Y = \mathscr{L}_X Y(x_0) \ .$$

En particulier, comme la connexion de Levi-Civita est sans torsion, nous avons

$$\mathscr{L}_X Y(x_0) - \mathscr{L}_Y X(x_0) = \nabla_X Y(x_0) - \nabla_Y X(x_0) = [X, Y](x_0) = 0 \ .$$

D'où

$$\begin{aligned}R(X, Y)Z(x_0) &= \mathscr{L}_X(\nabla_Y Z)(x_0) - \mathscr{L}_Y(\nabla_X Z)(x_0) - 0 \\ &= \big((\nabla_{\mathscr{L}_X Y} Z)(x_0) + \nabla_Y(\mathscr{L}_X Z)(x_0)\big) - \big((\nabla_{\mathscr{L}_Y X} Z)(x_0) + \nabla_X(\mathscr{L}_Y Z)(x_0)\big) \\ &= \nabla_Y(\mathscr{L}_X Z)(x_0) - \nabla_X(\mathscr{L}_Y Z)(x_0) + (\nabla_{\mathscr{L}_X Y - \mathscr{L}_Y X} Z)(x_0) \\ &= \mathscr{L}_Y \mathscr{L}_X Z(x_0) - \mathscr{L}_X \mathscr{L}_Y Z(x_0) = \mathscr{L}_{[Y,X]} Z(x_0) = -[[X, Y], Z](x_0) \ .\end{aligned}$$

Ceci démontre la proposition 4.6. □

Corollaire 4.7 *Pour tous les $u, v, w \in \mathfrak{p}$, si $[u, v] = 0$, alors*

$$R(u, v)w = 0 \ . \quad \square$$

Corollaire 4.8 *Les images des sous-variétés totalement géodésiques immergées connexes complètes de M sont les $g \exp_{x_0} E$ où $g \in G$ et E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{p}$ tel que, pour tous les $u, v, w \in E$,*

$$[[u, v], w] \in E \ .$$

Démonstration. Par homogénéité, il suffit de considérer les telles sous-variétés passant par x_0.

Soit E un tel sous-espace vectoriel de $\mathfrak{p}$. Notons $\mathfrak{h} = [E, E] \oplus E$, qui est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ par la condition demandée à E et l'identité de Jacobi. Notons H le sous-groupe de Lie immergé connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. La restriction à H de l'application orbitale $\varphi_{x_0} : g \mapsto gx_0$ passe au quotient en une immersion injective i_E de $S_E = H/(H \cap K)$ dans M. Par la description des géodésiques de M passant par x_0, la sous-variété immergée S_E, sur laquelle H agit transitivement par isométries, contient toutes les géodésiques de M dont le vecteur tangent à l'origine appartient à E, donc est totalement géodésique, connexe et complète, d'image $\exp_{x_0} E$.

Réciproquement, soit $i : S \to M$ une sous-variété totalement géodésique immergée connexe complète de M telle qu'il existe $s \in S$ tel que $x_0 = i(s)$. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{p}$ correspondant à $T_s i(T_s S) \subset T_{x_0} M$. Le crochet de Lie des champs de vecteurs et la connexion de Levi-Civita préservent les champs de vecteurs tangents à $i(S)$ (voir la proposition 3.51 (4)). Donc, avec les notations de la démonstration précédente, $R(u, v)w = \nabla_X \nabla_Y Z(x_0) - \nabla_Y \nabla_X Z(x_0) - \nabla_{[X,Y]} Z(x_0)$ appartient à E pour tous les $u, v, w \in E$. Par la proposition 4.6, nous avons donc $[[u, v], w] \in E$. Soit S_E la sous-variété totalement géodésique immergée connexe complète construite ci-dessus. En regardant l'application exponentielle en x_0, il est immédiat que S et S_E ont même image. En particulier $i(S) = \exp_{x_0} E$. □

4.1.4 Espaces symétriques de type non compact

Soient M un espace symétrique, $G = \mathrm{Isom}_0(M)$, $x_0 \in M$, $K = \mathrm{Stab}_G(x_0)$, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ relativement à x_0, et $B = B_{\mathfrak{g}}$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Identifions toujours $\mathfrak{p}$ avec $T_{x_0} M$ par $T_e \varphi_{x_0}$ où $\varphi_{x_0} : g \mapsto gx_0$ est l'application orbitale en x_0.

Rappelons qu'un sous-groupe G du groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ d'un espace vectoriel V est *irréductible* (ou agit irréductiblement sur V) si les seuls sous-espaces vectoriels de V préservés par G sont $\{0\}$ et V.

Proposition 4.9 *Supposons que M soit simplement connexe et irréductible.*

(1) Le groupe $\mathrm{Ad}(K)$ agit irréductiblement sur $\mathfrak{p}$.

(2) Il existe une unique constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que, pour tous les $u, v \in \mathfrak{p}$, nous ayons

$$B(u, v) = \alpha \, \langle u, v \rangle_{x_0} \ .$$

En particulier, B est nulle, définie positive ou définie négative en restriction à $\mathfrak{p}$.

(3) Pour tous les $u, v \in \mathfrak{p}$ orthonormés, engendrant un plan vectoriel noté P, nous avons $K(P) = 0$ si $\alpha = 0$, et sinon

$$K(P) = \frac{1}{\alpha} B([u, v], [u, v]) \ .$$

En particulier, la courbure sectionnelle de M est de signe constant.

(4) Supposons que M ne soit pas isométrique à $\mathbb{R}$. Si M est à courbure sectionnelle négative ou nulle, alors le centre $Z(G)$ de G est trivial. Si M est à courbure sectionnelle positive ou nulle, alors M et G sont compacts, et le centre $Z(G)$ de G est fini.

Démonstration. (1) Dans un espace symétrique, le transport parallèle le long de géodésiques est induit par des isométries. Comme le transport parallèle le long de courbes C^1 par morceaux peut être approché par des transports parallèles le long de géodésiques par morceaux, le groupe d'holonomie $\mathrm{Hol}(x_0)$ est contenu dans l'image de la représentation d'isotropie de $K = \mathrm{Stab}_G(x_0)$. Si M est irréductible, alors le groupe d'holonomie $\mathrm{Hol}(x_0)$ agit irréductiblement sur $T_{x_0}M$ par la proposition 4.4.

Pour tout $k \in K$, considérons les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_{x_0}} & M \\ {\scriptstyle i_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ G & \xrightarrow{\varphi_{x_0}} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{p} & \xrightarrow{T_e\,\varphi_{x_0}} & T_{x_0}M \\ {\scriptstyle \mathrm{Ad}\,k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_{x_0}k} \\ \mathfrak{p} & \xrightarrow{T_e\,\varphi_{x_0}} & T_{x_0}M\ . \end{array}$$

Le diagramme de gauche commute, car k^{-1} fixe x_0, donc celui de droite, obtenu en prenant l'application tangente en e et en restreignant à $\mathfrak{p}$, aussi. L'irréductibilité de $\mathrm{Ad}(K)$ sur $\mathfrak{p}$ découle donc de celle de $\mathrm{Hol}(x_0)$ sur $T_{x_0}M$, puisque $T_e\,\varphi_{x_0} : \mathfrak{p} \to T_{x_0}M$ est un isomorphisme linéaire.

(2) Les formes bilinéaires symétriques $B_{|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ et $\langle T_e\varphi_{x_0}(\cdot), T_e\varphi_{x_0}(\cdot)\rangle$ sur $\mathfrak{p}$ sont toutes deux invariantes par le groupe $\mathrm{Ad}\,K$ d'isomorphismes linéaires de $\mathfrak{p}$, qui est irréductible. Le résultat découle alors de la remarque suivante.

Lemme 4.10 *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie n. Une action irréductible d'un sous-groupe compact H du groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ préserve au plus une forme bilinéaire symétrique b non nulle à homothétie près.*

Démonstration. Tout d'abord, b est non dégénérée, sinon son noyau serait un sous-espace vectoriel invariant non nul (et propre car b est non nulle).

Pour tous les $p, q \in \mathbb{N}$, tout sous-groupe compact du groupe orthogonal usuel $\mathrm{O}(p,q)$ est conjugué à un sous-groupe du groupe compact maximal de $\mathrm{O}(p,q)$

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \ :\ A \in \mathrm{O}(p), B \in \mathrm{O}(q) \right\},$$

donc préserve un sous-espace vectoriel non nul et propre si $pq \neq 0$. Puisque H agit irréductiblement, et quitte à remplacer b par $-b$, nous pouvons donc supposer que b est de signature $(0,n)$, c'est-à-dire définie positive.

Si b' est une autre forme bilinéaire symétrique b non nulle invariante par H, alors quitte à changer son signe, nous pouvons aussi supposer que b' est définie positive. Elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée pour b. Tout espace propre de b' est invariant par H, donc par irréductibilité, b' n'a qu'un espace propre, et b' est proportionnelle à b. $\square$

(3) En utilisant respectivement la définition de la courbure sectionnelle, l'assertion (2), la proposition 4.6, la formule de Jacobi $\mathrm{ad}[u,v] = \mathrm{ad}\,u \circ \mathrm{ad}\,v - \mathrm{ad}\,v \circ \mathrm{ad}\,u$ et le fait que la

forme de Killing est ad-alternée, nous avons

$$\begin{aligned}\alpha\, K(P) &= \alpha\langle R(u,v)v,u\rangle_{x_0} = B(R(u,v)v,u) = -B((\mathrm{ad}[u,v])(v),u)\\ &= B(\mathrm{ad}\, v\circ \mathrm{ad}\, u(v),u) - B(\mathrm{ad}\, u\circ \mathrm{ad}\, v(v),u) = -B(\mathrm{ad}\, u(v),\mathrm{ad}\, v(u))\\ &= B([u,v],[u,v])\ .\end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 0$, ceci montre le résultat. Rappelons que $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{K}$ et que la restriction de B à $\mathfrak{K}$ est définie négative d'après la proposition 4.2. Ceci montre en particulier que la courbure sectionnelle est de signe constant si $\alpha \neq 0$. Si $\alpha = 0$, ce calcul implique alors que $[u,v] = 0$, donc que $R(u,v)v = 0$ par le corollaire 4.6, d'où $K(P) = 0$ (et donc M est isométrique à $\mathbb{E}^n$, où n est la dimension de M, par la classification des variétés riemanniennes complètes simplement connexes à courbure sectionnelle nulle, donc est isométrique à $\mathbb{R}$ par irréductibiblité).

(4) Si la courbure sectionnelle de M est négative ou nulle, alors M est un espace CAT(0) par le corollaire 3.56. Soit $g \in Z(G)$. Si g n'est pas l'identité, alors par homogénéité de M, la fonction $x \mapsto d(x,gx)$ est constante non nulle (si $x = hx_0$, alors $d(x,gx) = d(hx_0,ghx_0) = d(hx_0,hgx_0) = d(x_0,gx_0)$). Donc en particulier, g est une isométrie hyperbolique de M et (avec les notations de la fin de la partie 3.6.7), l'ensemble $\min(g)$ est égal à tout M. Donc par la proposition 3.65, M n'est pas irréductible.

Si la courbure sectionnelle de M est positive ou nulle et si M n'est pas isométrique à $\mathbb{E}^n$, il découle de ce qui précède que $\alpha < 0$. Pour tout $v \in \mathfrak{p}$ unitaire, soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de $\mathfrak{p}$ telle que $e_1 = v$. Par le calcul de la courbure sectionnelle, la courbure de Ricci vérifie

$$\alpha\,\mathrm{Ric}(v,v) = \sum_{i=2}^{n} \alpha\langle R(e_i,v)v,e_i\rangle_{x_0} = \sum_{i=2}^{n} B([e_i,v],[e_i,v])\ .$$

En particulier, en tant que somme de termes positifs ou nuls (puisque la restriction de B à $\mathfrak{K}$ est définie négative), nous avons $\mathrm{Ric}(v,v) \geq 0$. Montrons par l'absurde que l'égalité est impossible. Si $\mathrm{Ric}(v,v) = 0$, puisque $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathfrak{p}$, l'élément v commuterait avec tout élément de $\mathfrak{p}$. Le centralisateur

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}) = \{X \in \mathfrak{g}\ :\ \forall Y \in \mathfrak{p},\ [X,Y] = 0\}$$

de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$ serait donc non nul. Comme il est invariant par $\mathrm{Ad}\, K$ et par irréductibilité, nous aurions donc $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. En particulier, la courbure sectionnelle serait nulle, ce qui contredirait le fait que M n'est pas isométrique à $\mathbb{E}^n$. L'application $v \mapsto \mathrm{Ric}(v,v)$, qui est continue et strictement positive sur la sphère unité (compacte) de $T_{x_0}M$ admet donc une borne inférieure strictement positive. Par le théorème de Myers 3.43, la variété riemannienne connexe complète M est donc compacte. Par le théorème d'Ascoli, son groupe des isométries est compact, donc G est compact.

Enfin, B est définie négative sur $\mathfrak{g}$ (car elle l'est sur les sous-espaces $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{p}$ orthogonaux pour B), donc non dégénérée. En particulier le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est trivial. Donc le centre $Z(G)$ de G, dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (voir l'exercice E.12 de la partie 1.4.4), est discret. Il est par conséquent fini, car contenu dans le compact G. □

Corollaire 4.11 *Si M est un espace symétrique simplement connexe sans facteur euclidien, alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est semi-simple.*

Démonstration. Par le théorème de décomposition de de Rham et comme un groupe de Lie et sa composante neutre ont la même algèbre de Lie, l'algèbre de Lie de G est isomorphe à l'algèbre de Lie produit des algèbres de Lie des composantes neutres $G_1, \dots, G_\ell$ des groupes d'isométries des facteurs $M_1, \dots, M_\ell$ de de Rham de M. Chacun de ces facteurs est un espace symétrique simplement connexe irréductible, et la forme de Killing de B est la somme des formes de Killing de chaque G_i. Par absence de facteur euclidien et par les propositions 4.9 (2) et 4.2 (iv) et (v), nous en déduisons que B est non dégénérée. Donc $\mathfrak{g}$ est semi-simple, par le critère de Cartan (voir la partie 1.3.5). □

Corollaire 4.12 *Soit M un espace symétrique simplement connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) la courbure sectionnelle de M est négative ou nulle et M n'est pas isométrique à une variété riemannienne produit $M' \times \mathbb{R}$;

(ii) les facteurs de la décomposition de de Rham de M sont non compacts et non euclidiens ;

(iii) la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ restreinte à $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ est définie positive.

Un espace symétrique vérifiant ces conditions sera appelé un espace symétrique *de type non compact*.

Il est en particulier CAT(0) par le corollaire 3.56. Notons que la composante neutre G de son groupe des isométries est alors sans centre (par la proposition 4.9 (4)), et en particulier $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est injective, où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 4.9 à chaque facteur de de Rham de M. □

Exemples. (1) Pour tout entier $n \geq 2$, considérons le modèle $(\mathscr{H}^n_+, ds^2_{\mathrm{hyp}})$ du demi-hyperboloïde supérieur de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. La composante neutre du groupe des isométries $\mathrm{O}_+(1,n)$ de ce modèle, qui est la composante neutre $\mathrm{SO}_0(1,n)$ du groupe de Lie $\mathrm{SO}(1,n)$, a pour algèbre de Lie (rappelons qu'une matrice antisymétrique est de trace nulle)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & u \\ v & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{1+n}(\mathbb{R}) \ : \ v = {}^t u, \ A = -{}^t A, \ a = -\operatorname{tr} A = 0 \right\} .$$

Nous avons vu que la symétrie géodésique en $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$ est

$$s_{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_+(1,n) .$$

L'involution de Cartan de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,n)$ correspondante, qui est l'application tangente en l'élément neutre de la conjugaison par s_{x_0}, est donc

$$\theta : \begin{pmatrix} a & u \\ v & A \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -u \\ -v & A \end{pmatrix} .$$

En particulier, la décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ est définie par

$$\mathfrak{K} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \ : \ A \in \mathfrak{so}(n) \right\} ,$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u \\ {}^t u & 0 \end{pmatrix} \ : \ u \in \mathbb{R}^n \right\} .$$

Puisque $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ est simplement connexe et à courbure sectionnelle strictement négative, c'est donc, par la définition 4.12 (i), un espace symétrique de type non compact, irréductible.

(2) Reprenons l'exemple standard $\mathrm{Ell_n}$. Nous avions vu que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de la composante neutre $G = \mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$ du groupe des isométries de $\mathrm{Ell_n}$ est $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$. Nous avions déjà calculé la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ dans la partie 1.3.5, qui est

$$B(X, Y) = 2n \ \mathrm{tr}(XY) \ .$$

En notant $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(\ {}^t XY)$ le produit scalaire usuel sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$, nous avons $B_{|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}} = 2n\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie positive, $B_{|\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}} = -2n\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie négative et $B_{|\mathfrak{p}\times\mathfrak{k}} = 0$. Nous avions déjà vu que $\mathrm{Ell_n}$ est simplement connexe. En particulier, $\mathrm{Ell_n}$ est un espace symétrique de type non compact, par la définition 4.12 (iii). Comme l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ est simple, $\mathrm{Ell_n}$ est un espace symétrique irréductible (il n'a qu'un seul facteur de de Rham, sinon son algèbre de Lie serait un produit non trivial, et ce facteur est non euclidien). Par le corollaire 4.12 (i), la courbure sectionnelle de $\mathrm{Ell_n}$ est négative ou nulle. En particulier, $\mathrm{Ell_n}$ est CAT(0).

L'espace hyperbolique complexe.

Soit $n \geq 1$. Nous présentons sous forme d'exercices l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, un exemple intéressant d'espace symétrique de type non compact (certes de rang un), ainsi que d'espace métrique CAT(-1) complet propre. Nous renvoyons à l'excellent livre [Gol] (et à [Par]) pour des compléments.

$\boxed{\text{I}}$ **(Géodésiques, courbures et isométries de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$)**

Munissons l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^{n+1}$ de la forme hermitienne de signature $(1, n)$

$$\langle z, z\rangle = -|z_0|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 \ ,$$

où $z = (z_0, \ldots, z_n)$. Dans toute la suite, nous noterons $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$, π la projection canonique de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et $\mathscr{Q}_{-1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ \langle z, z\rangle = -1\}$. Pour tout $[x]$ dans l'ouvert $\pi(\mathscr{Q}_{-1})$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $u \in T_{[x]}\pi(\mathscr{Q}_{-1})$, choisissons $x \in \mathscr{Q}_{-1}$ tel que $\pi(x) = [x]$ et $y \in \mathbb{C}^{n+1}$ orthogonal (pour cette forme hermitienne) à x tel que $T_x\pi(y) = u$, et posons $g(u, u) = \langle y, y\rangle$.

1. Montrer que $g(u, u)$ ne dépend pas des choix de x et de y, et définit une métrique riemannienne g sur $\pi(\mathscr{Q}_{-1})$. La variété $\pi(\mathscr{Q}_{-1})$ munie de la métrique riemannienne g est notée $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, et est appelée le *modèle projectif* de l'*espace hyperbolique complexe* de dimension n.
2. Notons $\mathrm{U}(1, n)$ le sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ formé des éléments qui préservent la forme hermitienne $\langle\ ,\ \rangle$, et $\mathrm{PU}(1, n)$ son image dans $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Montrer que l'action linéaire de $\mathrm{U}(1, n)$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ induit une action isométrique de $\mathrm{PU}(1, n)$ sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, et que celle-ci est transitive sur le fibré unitaire tangent de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.
3. Montrer que l'application $z \mapsto \overline{z}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$ induit une isométrie ι de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.
4. Montrer que $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est un espace symétrique simplement connexe.

5. Soient $x \in \mathscr{Q}_{-1}$ et $y \in \mathbb{C}^{n+1}$ orthogonal à x tel que $\langle y, y\rangle = 1$. Montrer que $c : t \mapsto \pi(\cosh t\, x + \sinh t\, y)$ est la géodésique de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ passant par $\pi(x)$ en $t = 0$ telle que $\dot{c}(0) = T_x\pi(y)$.
6. Supposons $n = 1$ dans cette question. Montrer que $\varphi : z \mapsto \pi((1, z))$ est un C^∞-difféomorphisme du disque unité de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{H}^1_{\mathbb{C}}$. Montrer que $\varphi^* g_z(v, v) = \frac{|v|^2}{(1-|z|^2)^2}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et pour tout $v \in \mathbb{C}$. En déduire que $\mathbb{H}^1_{\mathbb{C}}$ est une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle constante -4.
7. Supposons maintenant que n est un entier ≥ 1. Soit V un plan vectoriel complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$ sur lequel $\langle\, ,\, \rangle$ induit une forme hermitienne de signature $(1, 1)$. Montrer que $\pi(V - \{0\}) \cap \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est une sous-variété de dimension 2 totalement géodésique de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, de courbure sectionnelle constante égale à -4.

   Soit V un sous-espace vectoriel réel de dimension 3 de $\mathbb{C}^{n+1}$ invariant par l'involution $z \mapsto \overline{z}$. Supposons que $\langle\, ,\, \rangle$ induit sur V une forme quadratique de signature $(1, 2)$. Montrer que $\pi(V - \{0\}) \cap \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, totalement géodésique, de courbure sectionnelle constante égale à -1.
8. On se place au point $x_0 = \pi(e_0)$. Montrer que

$$R(T_{e_0}\pi(e_1), T_{e_0}\pi(e_2), T_{e_0}\pi(e_2), T_{e_0}\pi(e_1)) = -1$$

   et

$$R(T_{e_0}\pi(e_1), T_{e_0}\pi(i\, e_1), T_{e_0}\pi(i\, e_1), T_{e_0}\pi(e_1)) = -4\ .$$

   En utilisant les identités de Bianchi, montrer que si $v = \lambda i\, e_1 + \mu\, e_2$, avec λ et μ réels tels que $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, et si P est le plan vectoriel engendré par $T_{e_0}\pi(e_1)$ et $T_{e_0}\pi(v)$, alors :

$$K(P) = -3\lambda^2 - 1\ .$$

   Conclure que la courbure sectionnelle de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est pincée entre -1 et -4.
9. Montrer que le groupe des isométries de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est engendré par $\mathrm{PU}(1, n)$ et ι. (*Indication :* une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}^n$ qui envoie droite complexe sur droite complexe et préserve une norme hermitienne appartient au groupe unitaire de la forme hermitienne.)

$\boxed{\text{II}}$ (Étude du bord à l'infini de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$)

Munissons maintenant l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^{n+1}$ d'une autre forme hermitienne de signature $(1, n)$

$$\langle z, z\rangle = -(z_0\overline{z_1} + z_1\overline{z_0}) + \sum_{i=2}^{n} |z_i|^2\ .$$

Notons toujours $\mathrm{U}(1, n)$ le sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ formé des éléments qui préservent cette forme hermitienne, et $\mathrm{PU}(1, n)$ son image dans $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Définissons $\mathscr{Q}_{-1}$, g et $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ de la même manière que dans l'exercice précédent. Il est aisé de vérifier que cette variété riemannienne $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est isométrique à celle de l'exercice précédent. Nous continuerons donc à l'appeler l'espace hyperbolique complexe de dimension n.

1. Dans la suite, notons ∞ le point de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ dont les coordonnées homogènes sont $[0, 1, 0, \ldots, 0]$. Appelons N le groupe des matrices de la forme :

$$n(\zeta, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}|\zeta|^2 - \frac{i}{2}s & 1 & \zeta^* \\ \zeta & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} ,$$

où $\zeta \in \mathbb{C}^{n-1}$, ζ^* désigne la matrice ligne transposée de la matrice colonne $\overline{\zeta}$, et $s \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de $\mathrm{U}(1, n)$ qui fixe ∞.

2. Soit $h^t = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$. Vérifier qu'il s'agit d'un élément de $\mathrm{U}(1, n)$ et que $h^t\, n(\zeta, s)\, h^{-t} = n(e^{-t}\zeta, e^{-2t}s)$. En déduire que tous les éléments de N sont des isométries paraboliques de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

3. Notons $\mathscr{S} = \{(w_1, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \mid 2\,\mathrm{Re}\ w_1 - |w|^2 > 0\}$. Montrer que l'application $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ définie par $\varphi((w_1, w)) = \pi(1, w_1, w)$ est un C^∞-difféomorphisme. On appelle $\mathscr{S}$, muni de la métrique riemannienne rendant isométrique φ, le (modèle du) *domaine de Siegel* de l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

4. Montrer que l'action de $n(\zeta, s)$ sur $\mathscr{S}$ est donnée par :

$$n(\zeta, s)(w_1,\ w) = (w_1 + \langle w, \overline{\zeta}\rangle + \frac{1}{2}|\zeta|^2 - \frac{i}{2}s,\ w + \zeta) .$$

5. Montrer que l'application $c : [0, +\infty[\to \mathscr{S}$ définie par $t \mapsto (e^{-2t}, 0)$ est un rayon géodésique du domaine de Siegel. Montrer que les rayons géodésiques asymptotes à c sont des translatés de c par des éléments nh^s où $n \in N$ et $s \in \mathbb{R}$. Soit $\mathscr{Q}_0 = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \ :\ \langle z, z\rangle = 0\}$. Montrer que $\pi(\mathscr{Q}_0)$ s'identifie au bord à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

6. Montrer que la fonction de Busemann $\beta_c : z \mapsto \lim_{t\to+\infty} d(z, c(t)) - t$ est invariante par l'action de N (adopter une technique similaire à celle de la question 2). En déduire que les ensembles $H_t = \{(w_1, w) \in \mathscr{S} \ :\ 2\,\mathrm{Re}\ w_1 - |w|^2 = t\}$ où $t > 0$ sont les horosphères de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ centrées en ∞.

4.1.5 Espaces localement symétriques

Nous renvoyons à la remarque (1) du début de la partie 4.1 pour la définition d'une symétrie locale en un point d'une variété riemannienne. Un *espace localement symétrique* est une variété riemannienne M telle que pour tout $x \in M$, il existe une symétrie locale en x qui est une isométrie. Nous renvoyons par exemple à [Hel, Chap. IV ; §1, §5] pour une démonstration des deux résultats suivants, qui donnent des caractérisations locales des espaces symétriques.

Théorème 4.13 *Soit M une variété riemannienne. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) M est localement symétrique ;

(ii) le tenseur de courbure R de M est parallèle :

$$\nabla R = 0 ,$$

ou de manière équivalente, pour tout chemin $c : [0,1] \to M$ de classe C^1, pour tous les $u, v, w \in T_{c(0)}M$,

$$\|_0^1 R(u,v)w = R(\|_0^1 u, \|_0^1 v) \|_0^1 w \ ;$$

(iii) pour tout $v \in TM$, l'opérateur de courbure R_v est parallèle le long de la géodésique maximale $t \mapsto c_v(t)$ telle que $\dot{c}_v(0) = v$:

$$R_{\dot{c}_v(t)} = \|_0^t \circ R_v \circ (\|_0^t)^{-1} \ ;$$

(iv) la courbure sectionnelle est parallèle : pour tout chemin $c : [0,1] \to M$ de classe C^1, pour tout 2-plan vectoriel P de $T_{c(0)}M$, nous avons

$$K(\|_0^1 P) = K(P) \ .$$

Théorème 4.14 *Une variété riemannienne complète simplement connexe localement symétrique est globalement symétrique.*

En particulier, un revêtement riemannien universel d'une variété riemannienne complète connexe localement symétrique est globalement symétrique.

4.2 Algèbres de Lie semi-simples réelles

Toutes les algèbres de Lie de cette partie sont supposées de dimension finie.

Il découle de la partie 4.1.1, du corollaire 4.11 et du corollaire 4.12 (iii) que si M est un espace symétrique de type non compact, alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G = \mathrm{Isom}_0(M)$ est semi-simple réelle, et admet un automorphisme involutif θ de $\mathfrak{g}$ tel que la forme bilinéaire symétrique $B_\theta : (X,Y) \mapsto -B(\theta X, Y)$ soit définie positive. La classification des espaces symétriques de type non compact (à homothétie près sur chaque facteur de de Rham) se ramènera à la classification des tels couples $(\mathfrak{g}, \theta)$.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple réelle et B sa forme de Killing. Une *involution de Cartan* de $\mathfrak{g}$ est un automorphisme involutif θ de $\mathfrak{g}$ tel que la forme bilinéaire $B_\theta : (X,Y) \mapsto -B(\theta X, Y)$ soit définie positive.

Notons que B_θ est symétrique car la forme de Killing B est symétrique, invariante par tout automorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ et puisque θ est un automorphisme involutif. Les affirmations suivantes se démontrent comme dans la proposition 4.2.

Si $\mathfrak{K} = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ \theta X = X\}$ et $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ \theta X = -X\}$ sont les espaces propres de θ pour les valeurs propres $+1$ et -1, alors $\mathfrak{g}$ admet une décomposition en somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$, appelée *la décomposition de Cartan* de $\mathfrak{g}$ (relativement à θ). Notons que $B_\theta = B$ sur $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$, $B_\theta = -B$ sur $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$, et $B_\theta = 0$ sur $\mathfrak{p} \times \mathfrak{K}$. Les sous-espaces vectoriels $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{p}$ sont orthogonaux pour la forme de Killing, qui est définie négative sur $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$ et définie positive sur $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$. De plus, $[\mathfrak{K}, \mathfrak{K}] \subset \mathfrak{K}$, $[\mathfrak{K}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{K}$.

Par exemple, si B est définie négative, alors $\theta = -\mathrm{id}$ est une involution de Cartan, et alors $\mathfrak{K} = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{p} = \{0\}$.

4.2.1 Sous-espace de Cartan et systèmes de racines restreintes

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple réelle, B sa forme de Killing, θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée.

Un *sous-espace de Cartan* de $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{p}$, maximale pour ces propriétés.

On prendra bien garde à ne pas confondre sous-espace de Cartan et sous-algèbre de Cartan (voir la partie 1.3.6). Dans la suite de la partie 4.2.1, nous fixons un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$.

Nous appellerons *rang réel* de $\mathfrak{g}$ la dimension de $\mathfrak{a}$. Par exemple, si B est définie négative, alors le rang réel de $\mathfrak{g}$ est nul. Nous verrons dans les propositions 4.18 et 4.24 que le rang réel ne dépend que de la classe d'isomorphisme de $\mathfrak{g}$.

Nous appellerons *rang* d'un espace symétrique de type non compact le rang réel de l'algèbre de Lie de son groupe d'isométries (voir la proposition 4.31 (iii) pour des définitions équivalentes, plus géométriques).

Remarquons que pour tout $X \in \mathfrak{p}$, l'endomorphisme $\operatorname{ad} X$ de $\mathfrak{g}$ est symétrique pour le produit scalaire B_θ (car θ est un automorphisme d'algèbres de Lie valant $-\operatorname{id}$ sur $\mathfrak{p}$ et la forme de Killing B est ad-alternée). Par l'identité de Jacobi $\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y - \operatorname{ad} Y \circ \operatorname{ad} X = \operatorname{ad}[X, Y]$, les endomorphismes $\operatorname{ad} X$ pour $X \in \mathfrak{a}$ commutent. Donc ils sont simultanément diagonalisables en base orthonormée pour B_θ, et nous pouvons raisonner comme dans la partie 1.3.7.

Pour tout élément α du dual $\mathfrak{a}^*$ de $\mathfrak{a}$, posons

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{Y \in \mathfrak{g} \ : \ \forall\, X \in \mathfrak{a}, \ \ \operatorname{ad} X(Y) = \alpha(X)Y\} \ .$$

En particulier, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})$ est le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. Appelons *racine restreinte* de $\mathfrak{a}$ tout élément $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ tel que $\alpha \neq 0$ et $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$, et *espace de racine restreinte* de α le sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}_\alpha$. Notons Φ l'ensemble des racines restreintes de $\mathfrak{a}$. Nous avons une décomposition en somme directe orthogonale pour B_θ

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \ ,$$

appelée la *décomposition en espaces de racine restreinte* de $\mathfrak{g}$ (relativement au choix du sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$).

Le produit scalaire de $\mathfrak{a}$ (restriction à $\mathfrak{a}$ du produit scalaire B_θ sur $\mathfrak{g}$, donc de la forme de Killing B) induit un isomorphisme de $\mathfrak{a}$ dans son espace vectoriel dual $\mathfrak{a}^*$, ce qui permet en particulier de munir $\mathfrak{a}^*$ d'un produit scalaire euclidien.

Proposition 4.15 *La décomposition en espaces de racine restreinte vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\theta(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{z}_\mathfrak{K}(\mathfrak{a})$ *et* $\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{K}) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p})$ *;*

(ii) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ *pour tous les* $\alpha, \beta \in \mathfrak{a}^*$ *;*

(iii) si $\alpha \in \Phi$ *alors* $-\alpha \in \Phi$, *et* $\theta : \mathfrak{g}_\alpha \to \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *est un isomorphisme ;*

(iv) si $\alpha, \beta \in \Phi$ *et* $\alpha + \beta \notin \Phi \cup \{0\}$, *alors* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$, *et de plus* $\mathfrak{g}_\alpha$ *et* $\mathfrak{g}_\beta$ *sont orthogonaux pour la forme de Killing ;*

(v) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{a}$ *;*

(vi) Φ *est un système de racines de l'espace vectoriel euclidien* $\mathfrak{a}^*$.

La démonstration est assez proche de celle dans le cas des algèbres de Lie semi-simples complexes, voir par exemple la partie 1.3.7, [Hel, Chap. V, §3] et [Ebe2, §2.7, §2.9]. Remarquons que les différences principales avec le cas complexe sont que pour le système de racines restreintes, le centralisateur $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ n'est pas forcément égal à $\mathfrak{a}$, les espaces de racine restreinte ne sont pas forcément de dimension 1, et le système de racines Φ n'est pas toujours réduit.

Il découlera des propositions 4.18 et 4.24 qu'à isomorphisme près, le système de racines restreintes Φ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de l'algèbre de Lie semi-simple réelle $\mathfrak{g}$.

Démonstration. (i) Si $Y \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$, alors puisque $\mathfrak{a}$ est contenu dans $\mathfrak{p}$ et la restriction de θ à $\mathfrak{p}$ est $-\operatorname{id}$, pour tout $X \in \mathfrak{a}$, nous avons

$$[\theta Y, X] = -[\theta Y, \theta X] - \theta[Y, X] = 0 \ ,$$

donc $\theta Y \in \mathfrak{g}_0$. D'où $\theta(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$ par le caractère involutif de θ. Comme θ préserve $\mathfrak{g}_0$, les espaces propres de $\theta_{|\mathfrak{g}_0}$ sont les intersections de $\mathfrak{g}_0$ avec les espaces propres de θ dans $\mathfrak{g}$, donc $\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{K}) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p})$. Pour tout $Y \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p}$, puisque $[X, Y] = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{a}$, le sous-espace $\mathfrak{a} + \mathbb{R}Y$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$, contenue dans $\mathfrak{p}$ et contenant $\mathfrak{a}$. Par maximalité, nous avons $Y \in \mathfrak{a}$ et donc $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$.

(ii) Ceci découle de l'identité de Jacobi, comme pour la formule (· 12 ·).

(iii) Soit $\alpha \in \mathfrak{a}^*$. Si $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$ alors pour tout $X \in \mathfrak{a}$, nous avons

$$\operatorname{ad} X(\theta Y) = \theta[\theta X, Y] = -\theta[X, Y] = -\alpha(X)\theta Y$$

car θ est un automorphisme involutif d'algèbres de Lie, dont la restriction à $\mathfrak{p}$ (donc à $\mathfrak{a}$) est $-\operatorname{id}$.

Donc $\theta(\mathfrak{g}_\alpha) \subset \mathfrak{g}_{-\alpha}$ et l'égalité découle du caractère involutif de θ. En particulier, nous avons $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ si et seulement si $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq \{0\}$, ce qui montre la première affirmation.

L'affirmation (iv) découle de (ii), (iii) et de l'orthogonalité de $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_\beta$ pour B_θ. Nous renvoyons aux références ci-dessus pour les démonstrations des deux dernières assertions. □

Exemples. (1) Pour tout entier $n \geq 2$, considérons l'algèbre de Lie réelle simple

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u \\ {}^t u & A \end{pmatrix} \ : \ u \in \mathbb{R}^n, \ A \in \mathfrak{so}(n) \right\} ,$$

munie de l'involution de Cartan $\theta : X \mapsto -{}^t X$. Les sous-espaces abéliens maximaux de

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u \\ {}^t u & 0 \end{pmatrix} \ : \ u \in \mathbb{R}^n \right\} .$$

sont de dimension 1, comme par exemple

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R} \right\} .$$

En particulier, l'espace hyperbolique réel est un espace symétrique de type non compact de rang 1.

Le système de racines restreintes de $\mathfrak{a}$ est de type A_1, formé de deux racines opposées $\pm\alpha : \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \pm t$. La décomposition en espaces de racine restreinte est $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ où

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R},\ A \in \mathfrak{so}(n-1) \right\}$$

$$\mathfrak{g}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & u \\ {}^t u & -{}^t u & 0 \end{pmatrix} \ : \ u \in \mathbb{R}^{n-1} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{-\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & -u \\ {}^t u & {}^t u & 0 \end{pmatrix} \ : \ u \in \mathbb{R}^{n-1} \right\}.$$

Si $n \geq 3$, ceci est un exemple où les espaces de racine restreinte ne sont pas de dimension 1, et où le sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ est strictement contenu dans son centralisateur $\mathfrak{g}_0$.

(2) Pour tout entier $n \geq 2$, considérons l'algèbre de Lie réelle simple $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ munie de l'involution de Cartan $\theta : X \mapsto -{}^t X$. Les sous-espaces abéliens maximaux du sous-espace vectoriel $\mathfrak{p}$ des matrices symétriques de trace nulle sont de dimension $n-1$, comme par exemple le sous-espace $\mathfrak{a}$ des matrices diagonales de trace nulle (toute matrice de $\mathfrak{g}$ commutant avec toute matrice de $\mathfrak{a}$ appartenant à $\mathfrak{a}$) :

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \ : \ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \right\}.$$

En particulier, l'espace $\mathrm{Ell_n}$ des ellipsoïdes de volume 1 de $\mathbb{R}^n$ est un espace symétrique de type non compact de rang $n-1$.

Remarquons que dans ce cas particulier, le sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ est aussi une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Les racines restreintes coïncident donc avec les racines, et la décomposition en espaces de racine restreinte coïncide avec celle en espaces de racine. En particulier, le système de racines restreintes est de type A_{n-1}. Rappelons que les racines restreintes sont les formes linéaires sur $\mathfrak{a}$ définies par

$$\alpha_{i,j} : (\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto \lambda_{i,i} - \lambda_{j,j}$$

pour $1 \leq i \neq j \leq n$, d'espace de racine $\mathbb{R}E_{i,j}$, où $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq q}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La décomposition en espaces de racine restreinte correspondante est donc

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbb{R}E_{i,j}\ .$$

Exercice E.66 *(1) Pour tout $n \geq 1$, notons $\mathfrak{su}(1,n)$ l'ensemble des matrices X de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui satisfont la relation $X^*J + JX = 0$, où J est la matrice de la forme hermitienne $(z_0\overline{z_n} + z_n\overline{z_0}) + \sum_{i=1}^{n-1} |z_i|^2$. Montrer qu'il s'agit d'une sous-algèbre de Lie réelle de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.*

En exhiber une involution de Cartan et un sous-espace de Cartan (chercher dans les matrices diagonales) et donner la décomposition de $\mathfrak{su}(1,n)$ en espaces de racines restreintes associée.

(2) Même question pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ constituée des matrices X de $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ satisfaisant ${}^tXJ + JX = 0$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

4.2.2 Éléments réguliers et chambres de Weyl

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple réelle, θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée, $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$ et Φ son système de racines restreintes.

Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, rappelons que $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X) = \{Y \in \mathfrak{g} \ : \ [Y,X] = 0\}$ est le centralisateur de X dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Proposition 4.16 *Pour tout $X \in \mathfrak{p}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) le sous-espace $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X) \cap \mathfrak{p}$ est abélien ;

b) l'élément X appartient à un unique sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$;

c) pour tout sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}'$ de $\mathfrak{p}$ contenant X, nous avons $\alpha(X) \neq 0$ pour toute racine restreinte α de $\mathfrak{a}'$;

d) il existe un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}'$ de $\mathfrak{p}$ contenant X tel que $\alpha(X) \neq 0$ pour toute racine restreinte α de $\mathfrak{a}'$.

Un élément $X \in \mathfrak{p}$ vérifiant l'une de ces conditions est dit *régulier*.

Démonstration. L'équivalence entre les assertions a) et b) est immédiate.

Montrons que a) implique c). Supposons que $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X) \cap \mathfrak{p}$ soit abélien. Soit $\mathfrak{a}'$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$ contenant X. En particulier, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}'$. Pour toute racine restreinte α d'espace de racine $\mathfrak{g}_\alpha$ relativement à $\mathfrak{a}'$, soit $Y \in \mathfrak{g}_\alpha - \{0\}$. Écrivons $Y = Y_{\mathfrak{K}} + Y_{\mathfrak{p}}$ où $Y_{\mathfrak{K}} \in \mathfrak{K}$ et $Y_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}$. Pour tout X' dans $\mathfrak{a}'$, nous avons

$$\alpha(X')Y_{\mathfrak{K}} + \alpha(X')Y_{\mathfrak{p}} = \alpha(X')Y = [X',Y] = [X',Y_{\mathfrak{K}}] + [X',Y_{\mathfrak{p}}] \ .$$

Par unicité de l'écriture d'un vecteur dans la décomposition de Cartan et puisque $[\mathfrak{p},\mathfrak{K}] \subset \mathfrak{p}$ et $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{K}$, nous avons donc les deux égalités

$$\alpha(X')Y_{\mathfrak{K}} = [X',Y_{\mathfrak{p}}] \quad \text{et} \quad \alpha(X')Y_{\mathfrak{p}} = [X',Y_{\mathfrak{K}}] \ . \tag{$\cdot 78 \cdot$}$$

Supposons par l'absurde que $\alpha(X) = 0$. En utilisant la première des deux égalités ci-dessus, nous avons $Y_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}'$, donc pour tout $X' \in \mathfrak{a}'$, nous avons $\alpha(X')Y_{\mathfrak{K}} = 0$. Puisque α n'est pas la forme linéaire nulle, ceci implique que $Y_{\mathfrak{K}} = 0$. Par la seconde égalité, ceci implique que $Y_{\mathfrak{p}} = 0$. D'où $Y = Y_{\mathfrak{K}} + Y_{\mathfrak{p}} = 0$, ce qui est une contradiction.

Réciproquement, montrons que d) implique a). Soient $\mathfrak{a}'$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$ et $X \in \mathfrak{a}'$ n'appartenant pas au noyau d'une racine restreinte relativement à $\mathfrak{a}'$. Pour tout $Y \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X) \cap \mathfrak{p}$, dans la décomposition en espaces de racine restreinte relativement à $\mathfrak{a}'$, écrivons $Y = Y_0 + \sum_{\alpha \in \Phi} Y_\alpha$. Puisque $0 = [X,Y] = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(X) Y_\alpha$, ceci implique que $Y_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \Phi$. Donc $Y \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}'$ par la proposition 4.15 (i), et $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X) \cap \mathfrak{p}$ est abélien. $\square$

Une *chambre de Weyl* (ouverte) de $\mathfrak{a}$ est une composante connexe de $\mathfrak{a} - \bigcup_{\alpha\in\Phi} \ker\alpha$, c'est-à-dire une composante connexe du sous-espace de $\mathfrak{a}$ constitué des éléments réguliers de $\mathfrak{a}$, ou encore une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence sur $\mathfrak{a}$ définie par $X \sim X'$ si et seulement si $\alpha(X)\alpha(X') > 0$ pour toute racine restreinte α relativement à $\mathfrak{a}$. C'est un cône convexe ouvert dans $\mathfrak{a}$.

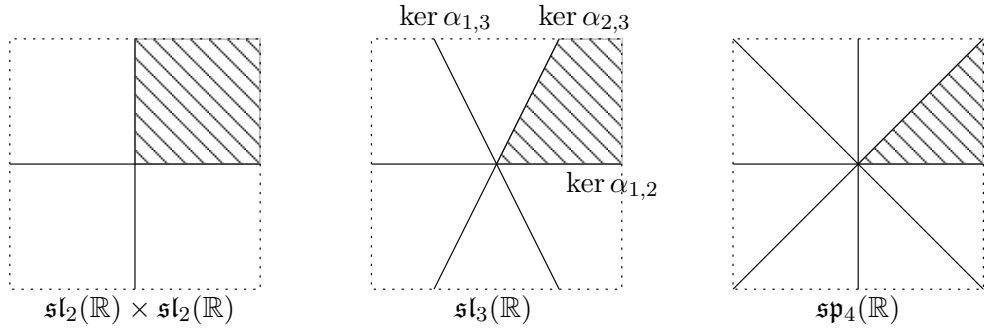
Le *groupe de Weyl* $W = W_{\mathfrak{a}}$ de $\mathfrak{a}$ est le groupe de Weyl du système de racines restreintes de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire le sous-groupe du groupe orthogonal de $\mathfrak{a}$ (pour la restriction de la forme de Killing) engendré par les symétries orthogonales par rapport aux hyperplans fixes des racines restreintes de $\mathfrak{a}$. Il agit simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl de $\mathfrak{a}$, par la proposition 1.11 (i).

Exemples. (1) Pour tout entier $n \geq 2$, puisque l'algèbre de Lie réelle simple $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,n)$ est de rang réel 1, les éléments réguliers de $\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u \\ {}^t u & 0 \end{pmatrix} \ : \ u \in \mathbb{R}^n \right\}$ sont ses vecteurs non nuls. Les chambres de Weyl de la droite vectorielle $\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}$ sont ses deux demi-droites vectorielles. Le groupe de Weyl de $\mathfrak{so}(1,n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(2) Pour tout entier $n \geq 2$, considérons l'algèbre de Lie réelle simple $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$, munie de l'involution de Cartan $\theta : X \mapsto -{}^t X$. Notons toujours $\mathfrak{p}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ des matrices symétriques de trace nulle, et $\mathfrak{a}$ le sous-espace de Cartan des matrices diagonales de trace nulle, de système de racines restreintes $\Phi = (\alpha_{i,j} : (\lambda_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto \lambda_{i,i} - \lambda_{j,j})_{1\leq i\neq j\leq n}$.

Alors un élément de $\mathfrak{a}$ est régulier si et seulement si ses coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Donc un élément de $\mathfrak{p}$ est régulier si et seulement ses valeurs propres sont simples. Le groupe de Weyl de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ est isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations des coordonnées. Pour $1 \leq i < j \leq n$, notons G_{ij} le sous-groupe de Lie plongé de $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$ image de $\mathrm{PSO}(2)$ par l'application qui à $\pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $\pm(a_{k,l})_{1\leq k\leq \ell\leq n}$ où $a_{k,k} = 1$ et $a_{k,\ell} = 0$ si $k \neq \ell$ sauf $a_{i,i} = a, a_{i,j} = b, a_{j,i} = c, a_{j,j} = d$. Alors la famille $\{\mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{a})\}_{g\in G_{i,j}}$ est une famille non dénombrable de sous-espaces de Cartan deux à deux distincts de $\mathfrak{p}$ contenant l'hyperplan noyau de la racine $\alpha_{i,j}$.

(3) Les chambres de Weyl des algèbres de Lie réelles semi-simples $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\times\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{R})$ sont dessinées ci-dessous, et leurs groupes de Weyl sont isomorphes aux groupes diédraux d'ordre 4, 6, 8 respectivement.



Dans la partie suivante, nous montrons en particulier que le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agit transitivement sur les sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{p}$ et sur les chambres de Weyl des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{p}$.

4.2.3 Conjugaison des chambres de Weyl

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple réelle et θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$, de décomposition de Cartan associée $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$.

Rappelons (voir les exercices E.7 (4) de la partie 1.2.2 et E.18 (2) et (3) de la partie 1.6) que

- le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ des automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous-groupe de Lie plongé du groupe de Lie réel $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ des automorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$,
- son algèbre de Lie est la sous-algèbre de Lie $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ des dérivations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$,
- l'application exponentielle $\exp : \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est l'exponentielle des endomorphismes, et
- l'application $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Notons $K^\theta = \{g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \ : \ \theta \circ g = g \circ \theta\}$ et K_0^θ sa composante neutre.

Lemme 4.17 *L'ensemble K^θ est un sous-groupe de Lie plongé de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, compact. La restriction à $\mathfrak{K}$ de la représentation adjointe ad est un isomorphisme de $\mathfrak{K}$ sur l'algèbre de Lie de K^θ.*

Démonstration. Il est immédiat que K^θ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, donc un sous-groupe de Lie plongé, par le théorème de Cartan 1.43. Le groupe K^θ est compact, car il est fermé et contenu dans le groupe orthogonal du produit scalaire B_θ : pour tout $k \in K^\theta$ et tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$, par invariance de la forme de Killing par les automorphismes d'algèbres de Lie, nous avons

$$B_\theta(kX, kY) = -B(\theta kX, kY) = -B(k\theta X, kY) = -B(\theta X, Y) = B_\theta(X, Y) \ .$$

Pour tout $X \in \mathfrak{K}$, nous avons $\theta \circ \mathrm{ad}\, X = \mathrm{ad}\, X \circ \theta$ (car $\theta([X, Y]) = [\theta X, \theta Y] = [X, \theta Y]$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$). Donc $\theta \circ e^{t\,\mathrm{ad}\, X} = e^{t\,\mathrm{ad}\, X} \circ \theta$ et $e^{t\,\mathrm{ad}\, X}$ appartient à K^θ, pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc $\mathrm{ad}\, X$ appartient à l'algèbre de Lie de K^θ.

Réciproquement, soit $X \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{ad}\, X$ appartienne à l'algèbre de Lie de K^θ. Alors $e^{t\,\mathrm{ad}\, X}$ appartient à K^θ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc $\theta \circ e^{t\,\mathrm{ad}\, X} = e^{t\,\mathrm{ad}\, X} \circ \theta$. En dérivant en $t = 0$, nous avons $\theta \circ \mathrm{ad}\, X = \mathrm{ad}\, X \circ \theta$. Donc

$$[\theta(X) - X, \theta Y] = \theta([X, Y]) - [X, \theta Y] = 0$$

pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. Puisque le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est trivial par semi-simplicité, nous avons donc $\theta X = X$, d'où $X \in \mathfrak{K}$. $\square$

Proposition 4.18 *Soient $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ deux sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{C}_i$ une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}_i$ pour $i = 1, 2$. Alors il existe un élément k de K_0^θ tel que*

$$k(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_2 \quad \text{et} \quad k(\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{C}_2 \ .$$

Puisque l'action de K_0^θ préserve la forme de Killing, les groupes de Weyl de $\mathfrak{a}_1$ et de $\mathfrak{a}_2$ sont en particulier isomorphes.

Démonstration. Pour $i = 1, 2$, soit X_i un élément de $\mathfrak{C}_i$. En particulier, tout élément de $\mathfrak{p}$ commutant avec X_i appartient à $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(X_i) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{a}_i$ est l'unique sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{p}$, maximale, contenant X_i, par la proposition 4.16.

Considérons l'application f de K_0^θ dans $\mathbb{R}$ définie par $k \mapsto B(k(X_1), X_2)$. Pour tout $Z \in \mathfrak{K}$, puisque $\operatorname{ad} Z$ appartient à l'algèbre de Lie de K_0^θ par le lemme 4.17, et puisque $e^{t \operatorname{ad} Z} = \operatorname{id} + t \operatorname{ad} Z + \frac{t^2}{2}(\operatorname{ad} Z)^2 + o(t^2)$, nous avons

$$f(e^{t \operatorname{ad} Z}) = f(e) + tB([Z, X_1], X_2) + \frac{t^2}{2} B([Z, [Z, X_1]], X_2) + o(t^2) \ .$$

Par compacité de K_0^θ, nous pouvons supposer, quitte à remplacer $\mathfrak{a}_1$ par son image par un élément de K_0^θ, que f atteint son maximum en $g = e$.

Pour tout $Z \in \mathfrak{K}$, nous avons donc $B([Z, X_1], X_2) = 0$, d'où puisque B est ad-alternée, $B(Z, [X_1, X_2]) = 0$. Puisque $[X_1, X_2] \in \mathfrak{K}$ et B est définie négative sur $\mathfrak{K}$, nous en déduisons que $[X_1, X_2] = 0$, donc que $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1$ par la propriété d'unicité rappelée ci-dessus.

De plus, pour tout $Z \in \mathfrak{K}$, nous avons $B([Z, [Z, X_1]], X_2) \leq 0$, donc

$$B(\operatorname{ad} X_1 \circ \operatorname{ad} X_2(Z), Z) \leq 0 \tag{$\cdot 79 \cdot$}$$

toujours puisque B est ad-alternée (et symétrique). Or pour toute racine restreinte α (relativement à $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$), le réel $\alpha(X_1)\alpha(X_2)$ est une valeur propre de $\operatorname{ad} X_1 \circ \operatorname{ad} X_2$ sur $\mathfrak{K}$. En effet, fixons Y un vecteur non nul de l'espace de racine $\mathfrak{g}_\alpha$. Écrivons $Y = Y_\mathfrak{K} + Y_\mathfrak{p}$ où $Y_\mathfrak{K} \in \mathfrak{K}$ et $Y_\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}$. Nous avons vu dans la démonstration de la proposition 4.16 que $Y_\mathfrak{K} \neq 0$ et que $\alpha(X')Y_\mathfrak{K} = [X', Y_\mathfrak{p}]$ et $\alpha(X')Y_\mathfrak{p} = [X', Y_\mathfrak{K}]$ pour tout X' dans $\mathfrak{a}_1$. Donc

$$\operatorname{ad} X_1 \circ \operatorname{ad} X_2(Y_\mathfrak{K}) = \alpha(X_1)\alpha(X_2)Y_\mathfrak{K} \ .$$

Puisque la restriction de B à $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$ est définie négative et par l'inégalité ($\cdot 79 \cdot$), nous avons donc $\alpha(X_1)\alpha(X_2) \geq 0$. Puisque X_1 et X_2 sont réguliers, nous avons $\alpha(X_1)\alpha(X_2) > 0$ pour toute racine restreinte α. Donc X_1 et X_2 appartiennent à la même chambre de Weyl et $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$. □

Remarque. Lorsque $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie du groupe des isométries d'un espace symétrique de type non compact M, si θ est l'automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$ associé à un choix de point base $x_0 \in M$ (voir la partie 4.1.1), et si $K = \operatorname{Stab}_G(x_0)$, nous avons

$$K_0^\theta \subset \operatorname{Ad} K \subset K^\theta \ .$$

En effet, pour tout $k \in K$, puisque $s_{x_0} \circ k = k \circ s_{x_0}$ et $\sigma = i_{s_{x_0}}$ est la conjugaison par s_{x_0}, nous avons $\sigma \circ i_k = i_k \circ \sigma$, d'où en prenant l'application tangente en l'élément neutre, $\theta \circ (\operatorname{Ad} k) = (\operatorname{Ad} k) \circ \theta$. Donc $\operatorname{Ad} K \subset K^\theta$. Réciproquement, comme $e^{\operatorname{ad} X} = \operatorname{Ad}(\exp X)$, et puisque $\operatorname{ad} \mathfrak{K}$ est l'algèbre de Lie de K_0^θ par le lemme 4.17, nous avons $K_0^\theta \subset \operatorname{Ad} K$.

La proposition 4.18 implique donc que $\operatorname{Ad} K$ agit transitivement sur les chambres de Weyl des sous-espaces de Cartan de l'espace $\mathfrak{p}$ de la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ associée à x_0.

4.2.4 Passage des algèbres de Lie complexes aux algèbres de Lie réelles

Rappelons (voir l'exemple (3) de la partie 1.2) que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe, nous notons $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ l'algèbre de Lie obtenue de $\mathfrak{g}$ par restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$, et que si $\mathfrak{g}_0$ est une algèbre de Lie réelle, nous notons $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ l'algèbre de Lie obtenue de $\mathfrak{g}_0$ par extension des scalaires de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe. Une *forme réelle* de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_0$ de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ telle que le morphisme canonique de $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}$ soit un isomorphisme d'algèbres de Lie complexes (ou, de manière équivalente, telle que nous ayons une décomposition en somme directe d'espaces vectoriels réels $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0$).

Une forme réelle $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ est dite *compacte* si la forme de Killing de $\mathfrak{g}_0$ est définie négative.

Exemple. Les algèbres de Lie réelles $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ sont deux formes réelles de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, et $\mathfrak{su}(2)$ est une forme compacte.

En effet, nous avons vu dans l'exercice E.9 que l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ admettent pour base vectorielle (respectivement sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$) le triplet (E, H, F) où

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est une forme réelle de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Posons $E' = E - F$, $F' = i(E + F)$ et $H' = iH$. Il est immédiat que (E', H', F') est une base sur $\mathbb{R}$ de l'espace vectoriel réel $\mathfrak{su}(2) = \{x \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{x} = -x\}$, que ce triplet est une base sur $\mathbb{C}$ de l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, et que le crochet de Lie de $\mathfrak{su}(2)$ est la restriction à $\mathfrak{su}(2)$ du crochet de Lie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Donc $\mathfrak{su}(2)$ est une forme réelle de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. De plus,

$$[E', F'] = 2H', \ \ [H', E'] = 2F', \ \ [H', F'] = -2E' .$$

Donc en calculant dans la base (E', H', F'), les endomorphismes $\operatorname{ad} E' \circ \operatorname{ad} H'$, $\operatorname{ad} F' \circ \operatorname{ad} H'$ et $\operatorname{ad} E' \circ \operatorname{ad} F'$ sont de trace nulle, et les matrices de $\operatorname{ad} E' \circ \operatorname{ad} E'$, $\operatorname{ad} F' \circ \operatorname{ad} F'$ et $\operatorname{ad} H' \circ \operatorname{ad} H'$ sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

La matrice de la forme de Killing de $\mathfrak{su}(2)$ dans cette base est donc

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

qui est définie négative. Donc $\mathfrak{su}(2)$ est une forme compacte de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Nous allons généraliser l'exemple ci-dessus en utilisant la décomposition en espaces de racines d'une algèbre de Lie complexe semi-simple $\mathfrak{g}$ quelconque, pour construire une base vectorielle de $\mathfrak{g}$ (appelée une *base de Chevalley* de $\mathfrak{g}$), à partir de laquelle nous construirons une forme compacte de $\mathfrak{g}$, pour montrer le résultat suivant. Ces bases de Chevalley sont

aussi cruciales pour construire les groupes finis simples de type de Lie (voir par exemple [Car, CaSM]), qui, complétés par les groupes alternés et les groupes finis simples sporadiques, donnent une classification à isomorphisme près des groupes finis simples.

Proposition 4.19 *Toute algèbre de Lie complexe semi-simple $\mathfrak{g}$ admet une forme compacte.*

Nous montrerons dans la partie 4.2.5 que le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ agit transitivement sur l'ensemble des formes réelles compactes de $\mathfrak{g}$.

Par exemple, la démonstration ci-dessous montre que les algèbres de Lie réelles $\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{sp}(n)$ sont des formes réelles compactes des algèbres de Lie complexes $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ respectivement.

Démonstration. Reprenons les notations de la partie 1.3.7 : B est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$; Φ est le système de racines de $\mathfrak{g}$ (relativement à $\mathfrak{h}$) ; $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ est la décomposition en espace de racines relativement à $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$; enfin, pour tout $\alpha \in \Phi$, le vecteur h'_α est l'unique élément de $\mathfrak{h}$ tel que $B(h'_\alpha, H) = \alpha(H)$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$.

Notons $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ l'espace vectoriel réel $\sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{R}\, h'_\alpha$, qui, par la dualité entre $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}^*$ définie par B et par la définition des vecteurs h'_α, correspond à l'espace vectoriel réel $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R} = \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{R}\,\alpha$ engendré par les racines. Par le lemme 1.32 (2) et (3), choisissons un vecteur X_α dans $\mathfrak{g}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Phi$ de sorte que $B(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$. Par le lemme 1.33 (i), nous avons $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = h'_\alpha$. Pour tous les $\alpha, \beta \in \Phi$, notons $N_{\alpha,\beta}$ le nombre complexe tel que $N_{\alpha,\beta} = 0$ si $\alpha + \beta \notin \Phi$, et sinon

$$[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta} \ ,$$

qui existe puisque les espaces de racine de $\mathfrak{g}$ sont de dimension 1 (voir le lemme 1.33 (iii)).

Lemme 4.20 *Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Phi$.*

(i) Nous avons $N_{\beta,\alpha} = -N_{\alpha,\beta}$.

(ii) Si $\alpha + \beta \in \Phi$, alors $N_{\alpha,\beta} N_{-\alpha,-\beta} < 0$.

(iii) Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, alors $N_{\alpha,\beta} = N_{\beta,\gamma} = N_{\gamma,\alpha}$.

(iv) Si $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \gamma, \alpha + \beta + \gamma \in \Phi$, alors

$$N_{\alpha,\beta} N_{\alpha+\beta,\gamma} + N_{\beta,\gamma} N_{\beta+\gamma,\alpha} + N_{\gamma,\alpha} N_{\alpha+\gamma,\beta} = 0 \ .$$

Démonstration. (i) C'est immédiat (par antisymétrie du crochet de Lie si $\alpha + \beta \in \Phi$).

(ii) Voir par exemple [Kna, Lem. 6.4].

(iii) Comme $\alpha + \beta + \gamma = 0$, nous avons $\alpha + \beta = -\gamma \in \Phi$, $\beta + \gamma = -\alpha \in \Phi$, et $\alpha + \gamma = -\beta \in \Phi$. Nous avons $[[X_\alpha, X_\beta], X_\gamma] + [[X_\beta, X_\gamma], X_\alpha] + [[X_\gamma, X_\alpha], X_\beta] = 0$ par l'identité de Jacobi, donc $N_{\alpha,\beta}[X_{-\gamma}, X_\gamma] + N_{\beta,\gamma}[X_{-\alpha}, X_\alpha] + N_{\gamma,\alpha}[X_{-\beta}, X_\beta] = 0$, d'où

$$N_{\alpha,\beta} h'_\gamma + N_{\beta,\gamma} h'_\alpha + N_{\gamma,\alpha} h'_\beta = 0 \ .$$

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et par dualité, nous avons

$$h'_\alpha + h'_\beta + h'_\gamma = 0 \ .$$

Puisque le système de racines Φ est réduit et comme $\alpha + \beta + \gamma = 0$, les formes linéaires α et β sont non colinéaires, donc h'_α et h'_β sont non colinéaires par dualité. Le résultat découle donc des deux égalités centrées ci-dessus, en remplaçant h'_γ par $-h'_\alpha - h'_\beta$ dans la première.

(iv) Il suffit d'appliquer l'identité de Jacobi au triplet $(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$. □

Lemme 4.21 *Il est possible de choisir les X_α pour $\alpha \in \Phi$ de sorte que $N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$ et $N_{\alpha,\beta}$ soit réel, pour tous les $\alpha, \beta \in \Phi$.*

Démonstration. La seconde affirmation découle de la première et de l'assertion (ii) du lemme 4.20 précédent. Nous renvoyons à [Kna, Lem. 6.6] pour une démonstration de la première assertion. □

Maintenant, considérons le sous-espace vectoriel réel $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ défini par

$$\mathfrak{u} = i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} + \big(+_{\alpha\in\Phi^+} \mathbb{R}\,(X_\alpha - X_{-\alpha})\big) + \big(+_{\beta\in\Phi^+} \mathbb{R}\, i(X_\beta + X_{-\beta})\big) \,. \qquad (\cdot 80 \cdot)$$

Nous avons vu dans la proposition 1.35 que la restriction de B à $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ est définie positive, donc sa restriction à $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ est définie négative. Pour tous les $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi \cup \{0\}$ et tous les $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_\beta$, nous avons $\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y(\mathfrak{g}_\gamma) \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma}$ par la formule $(\cdot 12 \cdot)$ de la partie 1.3.7. Donc par une décomposition en blocs dans les espaces de racine, si $\alpha, \beta \in \Phi$ et $\alpha + \beta \neq 0$ alors

$$B(X_\alpha, X_\beta) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X_\alpha \circ \operatorname{ad} X_\beta) = 0 \,. \qquad (\cdot 81 \cdot)$$

En particulier $B(X_\alpha, X_\alpha) = B(X_{-\alpha}, X_{-\alpha}) = 0$ pour tout $\alpha \in \Phi$.

Rappelons que $B(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$ pour tout $\alpha \in \Phi$. Donc, pour tous les $\alpha, \beta \in \Phi$, nous avons

$$B(X_\alpha - X_{-\alpha}, X_\alpha - X_{-\alpha}) = B(i(X_\beta + X_{-\beta}), i(X_\beta + X_{-\beta})) = -2 \,.$$

Par le lemme 1.32 (1), nous avons $B_{|\mathfrak{h}\times\mathfrak{g}_\alpha} = 0$ pour tout $\alpha \in \Phi$. Donc, pour tout $X \in i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$,

$$B(X, X_\alpha - X_{-\alpha}) = B(X, i(X_\beta + X_{-\beta})) = 0 \,.$$

Enfin, si $\alpha, \beta \in \Phi$ vérifient $\alpha \neq \pm\beta$, alors il découle de la formule $(\cdot 81 \cdot)$ que

$$\begin{aligned} B(X_\alpha - X_{-\alpha}, i(X_\beta + X_{-\beta})) &= B(X_\alpha - X_{-\alpha}, X_\beta - X_{-\beta}) \\ &= B(i(X_\alpha + X_{-\alpha}), i(X_\beta + X_{-\beta})) = 0 \,. \end{aligned}$$

La décomposition en somme vectorielle de $\mathfrak{u}$ donnée par la formule $(\cdot 80 \cdot)$ est donc orthogonale (et en particulier directe) pour B, et B, étant définie négative sur chaque facteur de $\mathfrak{u}$, est définie négative sur $\mathfrak{u}$. Pour tout $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ et tout $\alpha \in \Phi^+$, nous avons

$$[iH, X_\alpha - X_{-\alpha}] = \alpha(H) i(X_\alpha + X_{-\alpha}) \quad \text{et} \quad [iH, i(X_\alpha + X_{-\alpha})] = -\alpha(H)(X_\alpha - X_{-\alpha}) \,.$$

De plus, $\alpha(H) = B(h'_\alpha, H) \in \mathbb{R}$ car B est réelle (et même définie positive) sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Le lemme 4.21 montre que pour tous les $\alpha, \beta \in \Phi^+$, nous avons (en étudiant séparement les cas où $\alpha + \beta \in \Phi$ ou $\alpha - \beta \in \Phi$)

$$[X_\alpha - X_{-\alpha}, X_\beta - X_{-\beta}] = N_{\alpha,\beta}(X_{\alpha+\beta} - X_{-\alpha-\beta}) - N_{\alpha,-\beta}(X_{\alpha-\beta} - X_{-\alpha+\beta}) \,.$$

Avec les autres formules analogues, ceci montre que le sous-espace vectoriel réel $\mathfrak{u}$ est stable par crochets, donc est une sous-algèbre de Lie réelle de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. Par la décomposition en espaces de racine de $\mathfrak{g}$ et la définition de $\mathfrak{u}$, le sous-espace vectoriel complexe engendré par $\mathfrak{u}$ est égal à tout $\mathfrak{g}$. Donc $\mathfrak{u}$ est une forme compacte de $\mathfrak{g}$. □

Nous allons maintenant étudier la stabilité de certaines propriétés d'algèbres de Lie par réduction ou extension des scalaires.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe, puisque le crochet de Lie de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ est celui de $\mathfrak{g}$ (et puisque si A et B sont des sous-espaces vectoriels complexes de $\mathfrak{g}$, alors les espaces vectoriels réels et complexes engendrés par les $[X, Y]$ où $X \in A$ et $Y \in B$ coïncident, donc par récurrence $C_n(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}) = (C_n\mathfrak{g})^{\mathbb{R}}$ et $D_n(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}) = (D_n\mathfrak{g})^{\mathbb{R}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ est résoluble ou nilpotente si et seulement si l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ l'est.

Si $\mathfrak{g}_0$ est une algèbre de Lie réelle, puisque le crochet de Lie de $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est l'extension $\mathbb{C}$-bilinéaire du crochet de Lie de $\mathfrak{g}_0$ (et donc $C_n(\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = (C_n\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $D_n(\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = (D_n\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est résoluble ou nilpotente si et seulement si l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_0$ l'est.

Le résultat suivant étudie la stabilité de la propriété de semi-simplicité.

Lemme 4.22 *(1) Si $\mathfrak{g}_0$ est une algèbre de Lie réelle, si $B_{\mathbb{C}}$ est la forme de Killing de $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, alors la forme de Killing B de $\mathfrak{g}_0$ est la restriction à $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$ de $B_{\mathbb{C}}$.*

(2) Une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_0$ est semi-simple si et seulement si l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est semi-simple.

(3) Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe de forme de Killing B, alors la forme de Killing $B^{\mathbb{R}}$ de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ est

$$B^{\mathbb{R}} = 2 \operatorname{Re} B \ .$$

(4) Une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ est semi-simple.

Démonstration. Montrons les assertions (1) et (2). Fixons une base de $\mathfrak{g}_0$ sur $\mathbb{R}$. Elle est aussi une base de $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$. Pour tout $X \in \mathfrak{g}_0$, la matrice de $\operatorname{ad} X$ dans cette base réelle de $\mathfrak{g}_0$ coïncide avec la matrice de $\operatorname{ad} X$ dans cette base complexe de $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. La matrice M de la forme bilinéaire réelle B dans cette base est aussi la matrice de la forme bilinéaire complexe $B_{\mathbb{C}}$ dans cette base. L'assertion (1) en découle. De plus, une forme bilinéaire étant non dégénérée si et seulement si sa matrice est inversible, B est non dégénérée si et seulement si $B_{\mathbb{C}}$ l'est. L'assertion (2) découle alors du critère de semi-simplicité de Cartan (voir la partie 1.3.5).

Montrons les assertions (3) et (4). Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{C}$. Alors $\mathscr{B}^{\mathbb{R}} = (e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$ est une base de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tous les $x, y \in \mathfrak{g}$, notons $A = A' + iA''$ la matrice de $\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y$ dans la base $\mathscr{B}$, où A', A'' sont à coefficients réels. Alors la matrice de $\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y$ dans la base $\mathscr{B}^{\mathbb{R}}$ est, par blocs n-n, égale à $\begin{pmatrix} A' & -A'' \\ A'' & A' \end{pmatrix}$. Un calcul de trace montre alors l'assertion (3). Le noyau de la forme bilinéaire complexe B est donc contenu dans le noyau de la forme bilinéaire réelle $B^{\mathbb{R}}$. Réciproquement, si x appartient au noyau de $B^{\mathbb{R}}$, alors pour tout $y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, nous avons $\operatorname{Re} B(x, y) = 0$ et $\operatorname{Im} B(x, y) = -\operatorname{Re} B(x, iy) = 0$, donc $B(x, y) = 0$, et x appartient alors au noyau de B.

En particulier, B est non dégénérée si et seulement si $B^{\mathbb{R}}$ l'est, et comme ci-dessus, l'assertion (4) découle du critère de semi-simplicité de Cartan. $\square$

Notons qu'une forme réelle $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ définit une involution de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0$, appelée la *conjugaison définie par* cette forme réelle, par $x + iy \mapsto x - iy$ pour tous les $x, y \in \mathfrak{g}_0$. Cette involution est un anti-morphisme de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$.

Remarque. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe semi-simple et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Alors l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ sous-jacente à $\mathfrak{h}$ est encore une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ sous-jacente à $\mathfrak{g}$. Notons que $\mathfrak{h}$ est déployée dans $\mathfrak{g}$, mais que $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ ne l'est pas forcément dans $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, comme dans le cas de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

4.2.5 Classification des involutions de Cartan

La première étape de la classification des algèbres de Lie semi-simples réelles $\mathfrak{g}_0$ est le résultat 4.24 d'existence et d'unicité des involutions de Cartan θ de $\mathfrak{g}_0$. Bien sûr, si $\mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Lie du groupe des isométries d'un espace symétrique de type non compact, l'existence est immédiate, voir la partie 4.1.1. Nous commençons par montrer l'existence dans un autre cas particulier.

Lemme 4.23 *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{u}$ une forme compacte de $\mathfrak{g}$. Alors la conjugaison θ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ définie par la forme réelle $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ est une involution de Cartan de l'algèbre de Lie semi-simple réelle $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$.*

En particulier, $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ admet une involution de Cartan d'ensemble des points fixes $\mathfrak{u}$ et de décomposition de Cartan associée $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ où $\mathfrak{K} = \mathfrak{u}$ et $\mathfrak{p} = i\mathfrak{u}$.

Démonstration. Par construction (et le fait que $\mathfrak{u}$ soit stable par le crochet de Lie de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$), θ est un automorphisme involutif de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$.

Soient $B^{\mathbb{R}}$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ et B celle de $\mathfrak{g}$, de sorte que $B^{\mathbb{R}} = 2\operatorname{Re} B$ par le lemme 4.22 (3). Notons que pour tous les $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{u}$, par la définition de $(B^{\mathbb{R}})_\theta$, nous avons

$$(B^{\mathbb{R}})_\theta(X + iY, X' + iY') = -B^{\mathbb{R}}(X - iY, X' + iY') = -2\operatorname{Re} B(X, X') - 2\operatorname{Re} B(Y, Y') \ .$$

Or $B_{|\mathfrak{u}\times\mathfrak{u}}$ est la forme de Killing de $\mathfrak{u}$ par le lemme 4.22 (1), puisque $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Donc $(B^{\mathbb{R}})_\theta$ est définie positive, puisque $\mathfrak{u}$ est compacte. Ceci montre le résultat. □

Proposition 4.24 *(1) Toute algèbre de Lie semi-simple réelle $\mathfrak{g}$ admet une involution de Cartan.*

(2) Deux involutions de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par un élément de $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})_0$.

Ainsi, classer les algèbres de Lie réelles semi-simples, à isomorphisme d'algèbres de Lie près, et les couples $(\mathfrak{g}, \theta)$ où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle semi-simple et θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$, à isomorphisme près, est équivalent.

Démonstration. (1) Soit $\mathfrak{u}$ une forme compacte de l'algèbre de Lie complexe semi-simple $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (voir le lemme 4.22 (2) et la proposition 4.19). Notons respectivement σ et τ les conjugaisons définies par les formes réelles $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, et $N = \sigma \circ \tau$, qui est un automorphisme de l'algèbre de Lie réelle $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}$. Notons B la forme de Killing de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}$ et $B_{\mathbb{C}}$ celle de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Alors pour tous les $X, Y \in (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}$, puisque τ est un automorphisme involutif de l'algèbre de Lie réelle $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}$, nous avons

$$B_\sigma(NX, Y) = -B(\tau X, Y) = -B(X, \tau Y) = -B(\sigma X, NY) = B_\sigma(X, NY) \ .$$

Or B_σ est définie positive, par le lemme 4.23 précédent. Donc l'automorphisme auto-adjoint N est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un sous-groupe à un paramètre $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'automorphismes linéaires de $(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^\mathbb{R}$, auto-adjoints pour B_σ, diagonalisables à valeurs propres positives tel que $\gamma_1 = N^2$.

Montrons que $\gamma_t \in \mathrm{Aut}((\mathfrak{g}_\mathbb{C})^\mathbb{R})$, que γ_t commute avec N et que $\sigma\gamma_t\sigma^{-1} = \gamma_{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le groupe $\underline{G}(\mathbb{R})$ des éléments x de $\mathrm{GL}((\mathfrak{g}_\mathbb{C})^\mathbb{R})$ tels que $x \in \mathrm{Aut}((\mathfrak{g}_\mathbb{C})^\mathbb{R})$, $xN = Nx$ commute avec N et $\sigma x\sigma^{-1}x = \mathrm{id}$ est l'ensemble des points réels d'un groupe algébrique linéaire défini sur $\mathbb{R}$, car ces conditions s'expriment en des annulations de polynômes réels en les coefficients de x. Comme γ_1 appartient à $\underline{G}(\mathbb{R})$, il découle de la proposition 1.56 (5) que γ_t appartient à $\underline{G}(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Notons $\sigma' = \gamma_{-\frac{1}{4}}\sigma\gamma_{\frac{1}{4}}$ qui est un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Alors

$$\sigma'\tau = \gamma_{-\frac{1}{4}}\sigma\gamma_{\frac{1}{4}}\tau = \gamma_{-\frac{1}{2}}\sigma\tau = \gamma_{-\frac{1}{2}}N^{-1}N^2 = N^{-1}\gamma_{\frac{1}{2}} = \tau\sigma\gamma_{\frac{1}{2}} = \tau\gamma_{-\frac{1}{4}}\sigma\gamma_{\frac{1}{4}} = \tau\sigma' \ .$$

Puisque $\mathfrak{g}$ est le sous-espace propre de valeur propre 1 de τ, nous en déduisons que σ' préserve $\mathfrak{g}$. Donc $\theta = \sigma'_{|\mathfrak{g}}$ est un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$. Notons B' la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, qui vérifie par le lemme 4.22, pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$B'(X,Y) = B_\mathbb{C}(X,Y) = \mathrm{Re}\, B_\mathbb{C}(X,Y) = \frac{1}{2}B(X,Y) \ .$$

Puisque B_σ est définie positive, puisque $\sigma\gamma_{-\frac{1}{4}}\sigma = \gamma_{\frac{1}{4}}$ est auto-adjoint pour B_σ, nous en déduisons donc que $(B')_\theta$ est définie positive : pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$, nous avons

$$\begin{aligned} B'_\theta(X,Y) &= -\frac{1}{2}\, B(\sigma' X, Y) = -\frac{1}{2}\, B(\gamma_{-\frac{1}{4}}\sigma\gamma_{\frac{1}{4}}X, Y) = \frac{1}{2}\, B_\sigma(\sigma\gamma_{-\frac{1}{4}}\sigma\gamma_{\frac{1}{4}}X, Y) \\ &= \frac{1}{2}\, B_\sigma(\gamma_{\frac{1}{4}}X, \gamma_{\frac{1}{4}}Y) \ . \end{aligned}$$

Donc θ est une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$.

(2) Soient θ et θ' deux involutions de Cartan de $\mathfrak{g}$, et B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Comme ci-dessus, on montre que l'automorphisme linéaire $\theta\theta'$ est auto-adjoint pour le produit scalaire B_θ, donc que son carré appartient à un sous-groupe à un paramètre $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'automorphismes de $\mathfrak{g}$ auto-adjoints pour B_σ tel que si $\theta'' = \gamma_{-\frac{1}{4}}\theta\gamma_{\frac{1}{4}}$, alors les involutions de Cartan θ' et θ'' commutent. En notant $\mathfrak{g} = \mathfrak{K}' \oplus \mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{K}'' \oplus \mathfrak{p}''$ les décompositions de Cartan associées à θ' et θ'' respectivement, nous avons, par diagonalisation simultanée,

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{K}' \cap \mathfrak{K}'') \oplus (\mathfrak{K}' \cap \mathfrak{p}'') \oplus (\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{K}'') \oplus (\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{p}'') \ .$$

Puisque la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est définie négative sur $\mathfrak{K}'$ et $\mathfrak{K}''$, et définie positive sur $\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{p}''$, nous avons donc $\mathfrak{K}' \cap \mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{K}'' = \{0\}$ et $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}''$, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}''$, d'où $\theta'' = \theta'$. Donc θ' et θ sont conjuguées par l'élément $\gamma_{-\frac{1}{4}}$ de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})_0$. □

Remarque. Lorsque $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie du groupe des isométries d'un espace symétrique de type non compact M, la proposition 4.24 (2) implique que toute involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ est conjuguée à celle associée à un choix de point base x_0 dans M, l'homogénéité de M entraînant bien sûr que les involutions de Cartan associées à deux points bases de M sont conjuguées.

Corollaire 4.25 *Deux formes compactes d'une algèbre de Lie semi-simple complexe* $\mathfrak{g}$ *sont conjuguées par un élément de* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})_0$.

Démonstration. Par le lemme 4.23, une forme compacte de $\mathfrak{g}$ est le sous-espace propre pour la valeur propre $+1$ d'une involution de Cartan. Le résultat découle donc de la proposition 4.24 (2). □

4.2.6 Classification des groupes de Lie compacts

Le but de cette partie est de classer à isomorphisme près les groupes de Lie compacts.

Si $\mathfrak{u}$ est une algèbre de Lie réelle, nous noterons $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{u} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ l'algèbre de Lie complexe obtenue par extension des scalaires.

Théorème 4.26 *L'application de l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes de Lie réels compacts connexes de centre trivial, dans l'ensemble des classes d'isomorphisme des algèbres de Lie complexes semi-simples, induite par l'application qui à un groupe de Lie* U *associe l'algèbre de Lie complexe* $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$*, où* $\mathfrak{u}$ *est l'algèbre de Lie de* U*, est une bijection.*

Démonstration. Nous avons vu dans l'exercice E.19 que la forme de Killing B de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ d'un groupe de Lie compact sans centre U est définie négative. [Puisque $\mathrm{Ad}(U)$ est compact, considérons un produit scalaire sur $\mathfrak{u}$ qui est $\mathrm{Ad}(U)$-invariant (en moyennant un produit scalaire sur $\mathfrak{u}$ par une mesure de Haar de $\mathrm{Ad}(U)$). Alors pour tout $X \in \mathfrak{u}$, en dérivant, $\mathrm{ad}\, X$ est antisymétrique pour ce produit scalaire, donc admet une matrice antisymétrique $(a_{ij})_{1 \leq i,\, j \leq n}$ dans une base orthonormée de $\mathfrak{u}$. Donc

$$B(X, X) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, X) = \sum_{i,\, j} a_{ij} a_{ji} = -\sum_{i,\, j} a_{ij}^2 \leq 0 \ ,$$

avec égalité si et seulement si $\mathrm{ad}\, X = 0$, donc si $X = 0$ car le centre de $\mathfrak{u}$ est nul, puisque celui de U l'est.] En particulier, l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{u}$ est semi-simple, par le critère de Cartan. Par le lemme 4.22 (2), l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$ est aussi semi-simple.

Puisqu'une algèbre de Lie complexe semi-simple admet à conjugaison près une unique forme compacte (voir le corollaire 4.25), puisqu'un groupe de Lie réel simplement connexe est déterminé, à isomorphisme près, par son algèbre de Lie, et puisque qu'il existe à isomorphisme près un unique groupe de Lie connexe sans centre de revêtement universel donné (voir la partie 1.4.4), l'injectivité en découle.

La surjectivité découle du fait que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe semi-simple, alors elle admet une forme compacte $\mathfrak{u}$ par la proposition 4.19, dont la forme de Killing, étant par le lemme 4.22 (1) la restriction de celle de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$, est définie négative. Par l'exercice corrigé E.18, le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathfrak{u})$ de $\mathfrak{u}$ est un groupe de Lie compact d'algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{u}$. Le centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ est trivial, car $\mathfrak{u}$ est semi-simple. Donc le centre du groupe de Lie $\mathrm{Aut}(u)_0$ est discret, par l'exercice E.19 par exemple. Par conséquent, $U = \mathrm{Aut}(u)_0 / Z(\mathrm{Aut}(u)_0)$ est un groupe de Lie compact connexe de centre trivial, d'algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{u}$, tel que $u_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$. □

Remarque. La classification dans la partie 1.3.7 à isomorphisme près des algèbres de Lie complexes semi-simples founit donc une classification à isomorphisme près des groupes de Lie réels compacts connexes de centre trivial : les groupes de Lie compacts connexes sans centre sont, à isomorphisme près, les produits en nombre fini des groupes de la liste suivante, où nous notons PG le quotient d'un groupe G par son centre.

Table des groupes de Lie réels compacts simples

U	type de $\mathfrak{u} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$	valeurs des paramètres	dimension de U
PSU_{n+1}	A_n	$n \geq 1$	$n(n+2)$
PSO_{2n+1}	B_n	$n \geq 2$	$n(2n+1)$
PSp_n	C_n	$n \geq 3$	$n(2n+1)$
PSO_{2n}	D_n	$n \geq 4$	$n(2n-1)$
E_6	E_6		78
E_7	E_7		133
E_8	E_8		248
F_4	F_4		52
G_2	G_2		14

Il est traditionnel de donner le même nom à l'unique (modulo isomorphisme de groupes de Lie) groupe de Lie compact connexe sans centre d'algèbre de Lie complexifiée de type E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.

Exercice E.67 *Montrer que le revêtement universel d'un groupe de Lie réel compact connexe de centre discret est compact.*

4.2.7 Classification des algèbres de Lie réelles semi-simples

Théorème 4.27 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle simple. Alors*

- *ou bien $\mathfrak{g}$ est une forme réelle d'une algèbre de Lie complexe simple ;*
- *ou bien $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{R}}$ où $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est une algèbre de Lie complexe simple, unique à isomorphisme près.*

Nous dirons que $\mathfrak{g}$ est *absolument simple* dans le premier cas (c'est-à-dire si l' algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est simple), et *admet une structure complexe* dans le second cas.

Démonstration. Le fait que ces deux cas soient exclusifs découle du lemme suivant.

Lemme 4.28 *Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie complexe simple. Alors $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{R}}$ est simple, et $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est isomorphe à $\widetilde{\mathfrak{g}} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}$, donc n'est pas simple.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de l'algèbre de Lie réelle $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{R}}$, qui est semi-simple (par le lemme 4.22 (4)). Rappelons que $\mathfrak{a}$ est égal à son algèbre dérivée par le corollaire 1.21. Alors

$$i\mathfrak{a} = i[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [i\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset [\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{R}}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a} \ .$$

Donc $\mathfrak{a}$ est un sous-espace vectoriel complexe, donc un idéal de l'algèbre de Lie complexe simple $\widetilde{\mathfrak{g}}$, donc égal à $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

Soit $\mathfrak{g}$ une forme réelle de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ (par exemple une forme compacte, voir la proposition 4.19). Alors

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\simeq (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \\ &\simeq (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \oplus (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \simeq \widetilde{\mathfrak{g}} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}} \ . \quad \square \end{aligned}$$

Reprenons la démonstration du théorème 4.27. Supposons que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ne soit pas simple, sinon le premier terme de l'alternative est vérifié. Soit σ la conjugaison de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ définie par sa forme réelle $\mathfrak{g}$, et soit $\mathfrak{a}$ un idéal simple de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, qui est semi-simple (par le lemme 4.22 (2)). Puisque $[\sigma(x), y] = \sigma([x, \sigma(y)])$ et $\sigma(\lambda x) = \overline{\lambda}\,\sigma(x)$ pour tous les $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathfrak{a}$ et $y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, nous en déduisons que $\sigma(\mathfrak{a})$ est un idéal simple de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. En particulier $\sigma(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{a}$ est nul ou égal à $\mathfrak{a}$. Le second cas implique que $\mathfrak{a}$ est contenu dans $\mathfrak{g}$, ce qui n'est pas possible car $\mathfrak{g}$ n'est pas stable par multiplication par i dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Donc $\sigma(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{a} = \{0\}$. Si $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \sigma(\mathfrak{a})$, alors $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}$ est un idéal non nul de $\mathfrak{g}$, donc égal à $\mathfrak{g}$ par simplicité. Donc l'application de $\mathfrak{a}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ définie par $X \mapsto X + \sigma(X)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie réelles. L'algèbre de Lie complexe semi-simple $\mathfrak{a}$ est simple, sinon l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ ne serait pas simple. Notons $\widetilde{\mathfrak{g}}$ la structure d'espace vectoriel complexe sur $\mathfrak{g}$ induite de celle de $\mathfrak{a}$ par cet isomorphisme. Alors $\widetilde{\mathfrak{g}}$ vérifie la seconde assertion du théorème 4.27.

L'unicité découle de l'unicité de la décomposition en somme d'idéaux simples de $\widetilde{\mathfrak{g}}$. $\square$

La classification (à isomorphisme d'algèbres de Lie près) des algèbres de Lie réelles simples non absolument simples découle de celle (donnée en partie 1.3.7) des algèbres de Lie complexes simples.

Table des algèbres de Lie réelles simples non absolument simples

$\mathfrak{g}$	type complexe	valeurs des paramètres
$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$	A_n	$n \geq 1$
$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$	B_n	$n \geq 2$
$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$	C_n	$n \geq 3$
$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$	D_n	$n \geq 4$
$\mathfrak{e}_n^{\mathbb{R}}$	E_n	$6 \leq n \leq 8$
$\mathfrak{f}_4^{\mathbb{R}}$	F_4	
$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{R}}$	G_2	

La classification (à isomorphisme d'algèbres de Lie près) des algèbres de Lie réelles absolument simples est plus délicate, et nous renvoyons pour cela à [Hel, Chap. X]. Le *caractère* d'une algèbre de Lie réelle semi-simple $\mathfrak{g}$ est $\delta = \delta(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{K}$, où $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ (le caractère ne dépend pas de celle-ci, par la proposition 4.24).

Pour les algèbres de Lie exceptionnelles, le caractère de $\mathfrak{g}$ et le type de l'algèbre de Lie complexe simple $\widetilde{\mathfrak{g}}$ de forme réelle $\mathfrak{g}$ déterminent la classe d'isomorphisme de $\mathfrak{g}$, et nous indiquons le caractère en exposant : par exemple $\mathfrak{f}_4^{-20}$ est l'unique (à isomorphisme près) algèbre de Lie réelle absolument simple $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ soit isomorphe à l'algèbre de Lie complexe simple de type F_4 et dont le caractère est -20.

Les (uniques à automorphisme près) formes compactes des algèbres de Lie complexes simples de type E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 sont respectivement

$$\mathfrak{e}_6^{-78}, \mathfrak{e}_7^{-133}, \mathfrak{e}_8^{-248}, f_4^{-52}, \mathfrak{g}_2^{-14}\ .$$

Table des algèbres de Lie réelles absolument simples

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$	valeurs des paramètres	rang réel	dimension de $\mathfrak{g}$
$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$	A_{n-1}	$n \geq 2$	$n-1$	n^2-1
$\mathfrak{su}(p,q)$	A_{p+q-1}	$\begin{cases} q \geq p \geq 0, \\ p+q \geq 2 \\ (p,q) \neq (1,1) \end{cases}$	p	
$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}) = \mathfrak{su}^*(2n)$	A_{2n-1}	$n \geq 2$	$n-1$	
$\mathfrak{so}(p,q)$	$\begin{cases} D_{\frac{p+q}{2}} & \text{si } p+q \text{ pair} \\ B_{\frac{p+q-1}{2}} & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} q \geq p \geq 0, \\ p+q = 5 \\ \text{ou} \geq 7 \end{cases}$	p	
$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R})$	C_n	$n \geq 3$	n	
$\mathfrak{sp}(p,q)$	C_{p+q}	$\begin{cases} q \geq p \geq 0, \\ p+q \geq 3 \end{cases}$	p	
$\mathfrak{so}_n(\mathbb{H}) = \mathfrak{so}^*(2n)$	D_n	$n \geq 5$	$[\frac{n}{2}]$	
$\mathfrak{e}_6^{-78}$	E_6		0	78
$\mathfrak{e}_6^{-26}$	E_6		2	78
$\mathfrak{e}_6^{-14}$	E_6		2	78
$\mathfrak{e}_6^{2}$	E_6		4	78
$\mathfrak{e}_6^{6}$	E_6		6	78
$\mathfrak{e}_7^{-133}$	E_6		0	133
$\mathfrak{e}_7^{-25}$	E_7		3	133
$\mathfrak{e}_7^{-5}$	E_7		4	133
$\mathfrak{e}_7^{7}$	E_7		7	133
$\mathfrak{e}_8^{-248}$	E_8		0	248
$\mathfrak{e}_8^{-24}$	E_8		4	248
$\mathfrak{e}_8^{8}$	E_8		8	248
$\mathfrak{f}_4^{-52}$	F_4		0	52
$\mathfrak{f}_4^{-20}$	F_4		1	52
$\mathfrak{f}_4^{4}$	F_4		4	52
$\mathfrak{g}_2^{-14}$	G_2		0	14
$\mathfrak{g}_2^{2}$	G_2		2	14

Rappelons que $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{so}(0,n)$, $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{su}(0,n)$ et $\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{sp}(0,n)$. Les restrictions sur les paramètres ci-dessus sont destinées ou bien à éviter des cas non simples (comme $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{so}(2,2) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{so}^*(4) = \mathfrak{so}_2(\mathbb{H}) \simeq \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, voir l'exercice ci-dessous), ou bien à éviter les répétitions.

Exercice E.68 *Montrer les isomorphismes d'algèbres de Lie réelles suivants.*

$$\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{sp}(1) \simeq \mathfrak{su}(2)$$

$$\mathfrak{so}(1,2) \simeq \mathfrak{sp}_1(\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{su}(1,1) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$$

$$\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$$
$$\mathfrak{so}(1,3) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$$
$$\mathfrak{so}(2,2) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$$
$$\mathfrak{so}(6) \simeq \mathfrak{su}(4)$$
$$\mathfrak{so}(1,5) \simeq \mathfrak{su}^*(4) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{H})$$
$$\mathfrak{so}(2,3) \simeq \mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$$
$$\mathfrak{so}(2,4) \simeq \mathfrak{su}(2,2)$$
$$\mathfrak{so}(3,3) \simeq \mathfrak{sl}_4(\mathbb{R})$$
$$\mathfrak{sp}(2) \simeq \mathfrak{so}(5)$$
$$\mathfrak{sp}(1,1) \simeq \mathfrak{so}(1,4)$$
$$\mathfrak{so}^*(4) = \mathfrak{so}_2(\mathbb{H}) \simeq \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$$
$$\mathfrak{so}^*(6) = \mathfrak{so}_3(\mathbb{H}) \simeq \mathfrak{su}(1,3)$$
$$\mathfrak{so}^*(8) = \mathfrak{so}_4(\mathbb{H}) \simeq \mathfrak{so}(2,6)$$

4.2.8 Classification des espaces symétriques de type non compact

Soient X et Y deux variétés riemanniennes simplement connexes. Une *multi-homothétie* de X dans Y est une application $f : X \to Y$ telle qu'il existe des décompositions de de Rham $X = X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_\ell$ et $Y = Y_0 \times Y_1 \times \cdots \times Y_\ell$, de facteurs euclidiens X_0 et Y_0, et des homothéties $f_i : X_i \to Y_i$ (c'est-à-dire des isométries de X_i sur $\lambda_i Y_i$ où $\lambda_i > 0$) telles que $f = f_0 \times \cdots \times f_\ell$. Notons que $\mathbb{E}^n$ et $\lambda\mathbb{E}^n$ sont isométriques pour tout $\lambda > 0$ (l'application $x \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{E}^n$ dans $\lambda\mathbb{E}^n$ étant une isométrie).

Une algèbre de Lie réelle simple est *compacte* si sa forme de Killing est définie négative.

Théorème 4.29 *L'application qui à un espace symétrique X associe l'algèbre de Lie de la composante neutre G de son groupe des isométries induit une bijection de l'ensemble des classes de multi-homothétie d'espaces symétriques de type non compact, dans l'ensemble des classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie réelles semi-simples sans facteur compact.*

Démonstration. Voir [Hel, Chap. X]. □

Un espace symétrique de type non compact irréductible est *de type III* si son algèbre de Lie est absolument simple, et *de type IV* sinon. Tout espace symétrique X de type non compact est donc, à multi-homothétie près, un produit riemannien d'un nombre fini d'espaces G/K où G est le groupe de Lie réel connexe de l'une des deux tables ci-dessous, K un sous-groupe compact maximal de G dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{K}$ est isomorphe à celle donnée par la seconde colonne, muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche par G. Attention, la composante neutre du groupe des isométries de X est égale à $G/Z(G)$.

Table des espaces symétriques de type non compact irréductibles de type III

G	$\mathfrak{K}$	type du système de racines restreintes	valeurs des paramètres	rang	dimension de G/K
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(n)$	A_{n-1}	$n \geq 2$	$n-1$	$\frac{(n-1)(n+2)}{2}$
$\mathrm{SU}(p,q)$	$\mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{su}(q) \oplus \mathbb{R}$	$\begin{cases} BC_p \text{ si } p<q, \\ C_p \text{ sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} q \geq p \geq 1, \\ (p,q) \neq (1,1) \end{cases}$	p	$2pq$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$	$\mathfrak{sp}(n)$	A_{n-1}	$n \geq 2$	$n-1$	$(n-1)(2n+1)$
$\mathrm{SO}_0(p,q)$	$\mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q)$	$\begin{cases} B_p \text{ si } p<q, \\ D_p \text{ sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} q \geq p \geq 1, \\ p+q=5 \\ \text{ou} \geq 7 \end{cases}$	p	$2pq$
$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$	$\mathfrak{su}(n) \oplus \mathbb{R}$	C_n	$n \geq 3$	n	$n(n-1)$
$\mathrm{Sp}(p,q)$	$\mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(q)$	$\begin{cases} BC_p \text{ si } p<q, \\ C_p \text{ sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} q \geq p \geq 1, \\ p+q \geq 3 \end{cases}$	p	$4pq$
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{H})$	$\mathfrak{su}(n) \oplus \mathbb{R}$	$\begin{cases} C_{\frac{n}{2}} \text{ si } n \text{ pair}, \\ BC_{\frac{n-1}{2}} \text{ sinon} \end{cases}$	$n \geq 5$	$[\frac{n}{2}]$	$n(n-1)$
E_6^{-26}	$\mathfrak{f}_4^{-52}$	A_2		2	26
E_6^{-14}	$\mathfrak{so}(10) \oplus \mathbb{R}$	BC_2		2	32
E_6^{2}	$\mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2)$	F_4		4	40
E_6^{6}	$\mathfrak{sp}(4)$	E_6		6	42
E_7^{-25}	$\mathfrak{e}_6^{-78} \oplus \mathbb{R}$	C_3		3	54
E_7^{-5}	$\mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2)$	F_4		4	64
E_7^{7}	$\mathfrak{su}(8)$	E_7		7	70
E_8^{-24}	$\mathfrak{e}_7^{-133} \oplus \mathfrak{su}(2)$	F_4		4	112
E_8^{8}	$\mathfrak{so}(16)$	E_8		8	128
F_4^{-20}	$\mathfrak{so}(9)$	BC_1		1	16
F_4^{4}	$\mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{su}(2)$	F_4		4	28
G_2^{2}	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	G_2		2	8

Table des espaces symétriques de type non compact irréductibles de type IV

G	K	type du système de racines (restreintes)	valeurs des paramètres	rang	dimension de G/K
$\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$	$\mathrm{SU}(n+1)$	A_n	$n \geq 1$	n	$n(n+2)$
$\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$	$\mathrm{SO}(2n+1)$	B_n	$n \geq 2$	n	$n(2n+1)$
$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}(n)$	C_n	$n \geq 3$	n	$n(2n+1)$
$\mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C})$	$\mathrm{SO}(2n)$	D_n	$n \geq 4$	n	$n(2n-1)$
E_6	E_6	E_6		6	78
E_7	E_7	E_7		7	133
E_8	E_8	E_8		8	248
F_4	F_4	F_4		4	52
G_2	G_2	G_2		2	14

Remarque. Les espaces symétriques de type non compact de rang un sont, à isométrie près, les espaces hyperboliques réels $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, complexes $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, quaternioniens $\mathbb{H}^n_{\mathbb{H}}$, et le plan

hyperbolique sur les octaves de Cayley $\mathbb{H}^2_{\mathrm{Ca}}$, dont la composante neutre du groupe des isométries est respectivement $\mathrm{SO}_0(1,n)$, $\mathrm{SU}(1,n)$, $\mathrm{Sp}(1,n)$, et le groupe de Lie réel connexe simple de type F_4^{-20}. Nous renvoyons par exemple à [Gol] pour une étude approfondie des espaces hyperboliques complexes $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, et à [Par] pour une introduction aux espaces hyperboliques quaternioniens $\mathbb{H}^n_{\mathbb{H}}$ et au plan hyperbolique sur les octaves de Cayley $\mathbb{H}^2_{\mathrm{Ca}}$.

Théorème 4.30 *Si X est un espace symétrique de type non compact, G la composante neutre de son groupe des isométries, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, alors l'application* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ *induit par passage au quotient un plongement isométrique totalement géodésique de X dans l'espace symétrique de* $\mathrm{SL}(\mathfrak{g})$ *(modulo homothétie de X).*

Démonstration. Voir par exemple [Ebe2] et l'exercice corrigé E.71. □

4.3 Géométrie asymptotique des espaces symétriques de type non compact

Soient M un espace symétrique de type non compact, G la composante neutre de son groupe des isométries, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $B = B_{\mathfrak{g}}$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, $x_0 \in M$, $K = \mathrm{Stab}_G(x_0)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ relativement à x_0, $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$, $A = \exp(\mathfrak{a})$, Φ le système de racines restreintes de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ la décomposition en espaces de racine restreinte relativement à $\mathfrak{a}$. Identifions toujours $\mathfrak{p}$ avec $T_{x_0}M$ par $T_e\varphi_{x_0}$ où $\varphi_{x_0} : g \mapsto gx_0$ est l'application orbitale en x_0.

4.3.1 Plats maximaux et chambres de Weyl des espaces symétriques de type non compact

Un *plat* de M est une sous-variété totalement géodésique de M, isométrique à un espace euclidien $\mathbb{R}^k$ où $k \in \mathbb{N}$. Un plat de M est *maximal* s'il est maximal pour l'inclusion. Par exemple, une droite géodésique est un plat de dimension 1, et donc tout vecteur tangent à M est tangent à au moins un plat maximal de M.

Un vecteur tangent à M est dit *régulier* s'il est tangent à un unique plat maximal, et *singulier* sinon.

Une *chambre de Weyl (ouverte)* de M est une composante connexe de l'ensemble des points y d'un plat maximal de M pointé en $x \in M$ tels que $y \neq x$ et le vecteur tangent à la géodésique de x à y soit régulier. Le *groupe de Weyl* de M est le groupe de Weyl de $\mathfrak{a}$, qui ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix du point base x_0 par homogénéité de M ni du choix du sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ par la proposition 4.18.

Proposition 4.31 *(i) Les plats maximaux de M sont les sous-espaces $g\exp(\mathfrak{a}) \cdot x_0 = g\exp_{x_0}(\mathfrak{a})$ où $g \in G$. Les vecteurs tangents réguliers de M sont les images par G des éléments réguliers de $\mathfrak{a}$. Les chambres de Weyl de M sont les sous-espaces $g\exp(\mathfrak{C}) \cdot x_0 = g\exp_{x_0}(\mathfrak{C})$ où $g \in G$ et $\mathfrak{C}$ est une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$.*

(ii) Le groupe G agit transitivement sur les plats maximaux pointés de M, et sur les chambres de Weyl de M.

(iii) Le rang de M est égal à la dimension d'un plat maximal de M, donc à la dimension maximale d'un plat de M.

Nous appellerons *sommet* d'une chambre de Weyl C de M le point gx_0 où $g \in G$, $\mathfrak{C}$ est une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ et $C = g \exp_{x_0}(\mathfrak{C})$. Nous appellerons *chambre de Weyl fermée* de M l'adhérence d'une chambre de Weyl de M.

Démonstration. (i) Ceci découle du corollaire 4.8 et des propositions 4.9, 4.16 et 4.18.

(ii) Ceci découle de (i), de la proposition 4.18 et de la remarque qui la suit.

(iii) Ceci découle de (i) et de la définition du rang (voir le début de la partie 4.2.1). □

Proposition 4.32 *Soient* $F = \exp_{x_0}(\mathfrak{a})$,

$$N_K(\mathfrak{a}) = \{g \in G \ : \ gF = F, \ gx_0 = x_0\} = \{x \in K \ : \ \operatorname{Ad} x(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\}$$

et

$$Z_K(\mathfrak{a}) = \{g \in G \ : \ g_{|F} = \mathrm{id}_F\} = \{x \in K \ : \ \operatorname{Ad} x_{|\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}\} \ .$$

L'application $x \mapsto (\operatorname{Ad} x)_{|\mathfrak{a}}$ *de* $N_K(\mathfrak{a})$ *dans* $\operatorname{Isom}(\mathfrak{a})$ *induit un isomorphisme de groupes de* $N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$ *dans* W.

Donc le groupe de Weyl W de M est le quotient du stabilisateur d'un plat maximal pointé de M par son fixateur. Avec $A = \exp \mathfrak{a}$, nous avons aussi

$$W \simeq N_K(A)/Z_K(A) \simeq N_G(A)/Z_G(A) \ .$$

Démonstration. Il est immédiat que $N_K(\mathfrak{a}) = \{x \in K \ : \ \operatorname{Ad} x(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\}$ et $Z_K(\mathfrak{a}) = \{x \in K \ : \ \operatorname{Ad} x_{|\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}\}$ sont des sous-groupes fermés de K, donc des groupes de Lie compacts, et que $Z_K(\mathfrak{a})$ est distingué dans $N_K(\mathfrak{a})$. L'algèbre de Lie de $N_K(\mathfrak{a})$ est $\{X \in \mathfrak{K} \ : \ \operatorname{ad} X(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}\}$, celle de $Z_K(\mathfrak{a})$ est

$$\{X \in \mathfrak{K} \ : \ \operatorname{ad} X(\mathfrak{a}) = 0\} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{K} \ .$$

Pour tous les $X \in \mathfrak{K}$ et $Y \in \mathfrak{a}$ tels que $\operatorname{ad} X(Y) \in \mathfrak{a}$, nous avons $[Y, \operatorname{ad} X(Y)] = 0$ par commutativité de $\mathfrak{a}$, donc, puisque B est ad-alternée,

$$B(\operatorname{ad} X(Y), \operatorname{ad} X(Y)) = B(\operatorname{ad} Y(X), \operatorname{ad} Y(X)) = -B(\operatorname{ad} Y \circ \operatorname{ad} Y(X), X) = 0 \ .$$

Puisque la restriction de B à $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ est définie positive, nous avons $\operatorname{ad} X(Y) = 0$. Donc l'algèbre de Lie de $N_K(\mathfrak{a})$ est égale à celle de $Z_K(\mathfrak{a})$, et le groupe de Lie quotient $N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$, étant discret et compact, est fini.

Rappelons que la restriction de B à $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ est un produit scalaire euclidien pour lequel Φ est un système de racines de $\mathfrak{a}$, et que B est Ad-invariante. Le morphisme de groupes de $N_K(\mathfrak{a})$ dans $\operatorname{Isom}(\mathfrak{a})$, défini par $g \mapsto (\operatorname{Ad} g)_{|\mathfrak{a}}$ induit par passage au quotient une application injective Θ de $N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$ dans $\operatorname{Isom}(\mathfrak{a})$. Montrons que cette application Θ est un isomorphisme de groupes sur W.

Pour tout $\alpha \in \Phi$, puisque $B_{|\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$ est non dégénérée et $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, soit $X_\alpha \in \mathfrak{a}$ l'unique vecteur de $\mathfrak{a}$ tel que $B(X, X_\alpha) = \alpha(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{a}$. Il est en particulier non nul, car $\alpha \neq 0$ et orthogonal (pour le produit scalaire $B_{|\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$) à l'hyperplan $H_\alpha = \ker \alpha$ noyau de α dans $\mathfrak{a}$. Soit $Y^\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ un vecteur non nul, et $Y^\alpha = Y_{\mathfrak{K}} + Y_{\mathfrak{p}}$ son écriture dans la décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$. Comme dans la démonstration de la proposition 4.16, nous avons $Y_{\mathfrak{K}} \in \mathfrak{K} - \{0\}$, $Y_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p} - \{0\}$, $[X, Y_{\mathfrak{K}}] = \alpha(X) Y_{\mathfrak{p}}$ et $[X, Y_{\mathfrak{p}}] = \alpha(X) Y_{\mathfrak{K}}$ pour tout

$X \in \mathfrak{a}$. En particulier, $Y_{\mathfrak{k}}$ est non nul, et par l'identité de Jacobi, pour tout $X \in \mathfrak{a}$, nous avons

$$[X, [Y_{\mathfrak{k}}, Y_{\mathfrak{p}}]] = -[Y_{\mathfrak{k}}, [Y_{\mathfrak{p}}, X]] - [Y_{\mathfrak{p}}, [X, Y_{\mathfrak{k}}]] = -[Y_{\mathfrak{k}}, -\alpha(X)Y_{\mathfrak{k}}] - [Y_{\mathfrak{p}}, \alpha(X)Y_{\mathfrak{p}}] = 0 \ .$$

Donc $[Y_{\mathfrak{k}}, Y_{\mathfrak{p}}] \in \mathfrak{a}$ par maximalité de $\mathfrak{a}$. Puisque B est définie négative sur $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$, nous pouvons supposer que $B(Y_{\mathfrak{k}}, Y_{\mathfrak{k}}) = -1$, quitte à remplacer Y^{α} par un multiple non nul.

Alors $B(X, [Y_{\mathfrak{k}}, Y_{\mathfrak{p}}]) = \alpha(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{a}$, puisque B est ad-alternée. Donc $[Y_{\mathfrak{k}}, Y_{\mathfrak{p}}] = X_{\alpha}$ par l'unicité de X_{α} et $(\operatorname{ad} Y_{\mathfrak{k}})^2(X_{\alpha}) = \operatorname{ad} Y_{\mathfrak{k}}(-\alpha(X_{\alpha})Y_{\mathfrak{p}}) = -\alpha(X_{\alpha})X_{\alpha}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\operatorname{Ad}(\exp tY_{\mathfrak{k}})X_{\alpha} &= e^{t \operatorname{ad} Y_{\mathfrak{k}}} X_{\alpha} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} \big(-\alpha(X_{\alpha}) \big)^n X_{\alpha} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} \big(-\alpha(X_{\alpha}) \big)^{n+1} Y_{\mathfrak{p}} \ .\end{aligned}$$

Posons $t_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha(X_{\alpha})}}$ (qui existe car $\alpha(X_{\alpha}) = B(X_{\alpha}, X_{\alpha}) > 0$). Alors $\operatorname{Ad}(\exp t_0 Y_{\mathfrak{k}})X_{\alpha} = -X_{\alpha}$ et la restriction de $\operatorname{Ad}(\exp t_0 Y_{\mathfrak{k}})$ à H_{α} est l'identité, car $[Y_{\mathfrak{k}}, X] = 0$ si $X \in H_{\alpha}$. Puisque $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de K, l'élément $g = \exp(t_0 Y_{\mathfrak{k}})$ appartient à K et $\operatorname{Ad} g$ vaut l'identité sur H_{α} et moins l'identité sur l'orthogonal de H_{α} dans $\mathfrak{a}$. En particulier, $g \in N_K(\mathfrak{a})$.

Ainsi, la symétrie orthogonale s_{α} par rapport à l'hyperplan noyau de $\alpha \in \Phi$ est dans l'image de Θ, et celle-ci contient le groupe W. Pour montrer que l'image est exactement W, puisque W agit transitivement sur les chambres de Weyl de $\mathfrak{a}$, il suffit de montrer que $N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$ agit librement sur l'ensemble des chambres de Weyl de $\mathfrak{a}$: si γ appartient à l'image de Θ, si $\mathfrak{C}$ est une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$, quitte à composer par un élément de W, qui est dans l'image de Θ par ce qui précède, l'isométrie γ préserve $\mathfrak{C}$, donc vaut l'identité.

En effet, soit $\mathfrak{C}$ une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ et $g \in K$ tel que $\operatorname{Ad} g(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C}$. Soient $X \in \mathfrak{C}$, n l'ordre de l'image de g dans le groupe fini $N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$ et

$$X' = \frac{1}{n} \big(X + \operatorname{Ad} g(X) + \cdots + (\operatorname{Ad} g)^{n-1}(X) \big) \ .$$

Alors $\operatorname{Ad} g(X') = X'$ et $X' \in \mathfrak{C}$ par convexité et invariance par $\operatorname{Ad} g$ de $\mathfrak{C}$. Puisque $\operatorname{Ad} g$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$ fixant X', nous avons $\operatorname{Ad} g \circ \operatorname{ad} X' = \operatorname{ad} X' \circ \operatorname{Ad} g$. Or X' est régulier, donc $\operatorname{Ad} g$ préserve la décomposition en espaces de racine restreinte de $\mathfrak{g}$ (relativement à $\mathfrak{a}$). En particulier, pour tout $Y \in \mathfrak{a}$, puisque la restriction de $\operatorname{ad} Y$ à $\mathfrak{g}_{\alpha}$ est $\alpha(Y) \operatorname{id}_{\mathfrak{g}_{\alpha}}$, nous avons $\operatorname{Ad} g \circ \operatorname{ad} Y = \operatorname{ad} Y \circ \operatorname{Ad} g$ (en utilisant l'écriture d'un élément de $\mathfrak{g}$ dans la décomposition en espaces de racine restreinte). D'où, pour tout $Z \in \mathfrak{g}$,

$$0 = \operatorname{Ad} g[Y, Z] - [Y, \operatorname{Ad} g(Z)] = [\operatorname{Ad} g(Y) - Y, \operatorname{Ad} g(Z)] \ .$$

donc $\operatorname{Ad} g(Y) - Y$ appartient au centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, qui est trivial car $\mathfrak{g}$ est semi-simple. $\square$

Exemple. Si $M = \mathrm{Ell_n}$ et $\mathfrak{a}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales de trace nulle, alors $Z_K(\mathfrak{a}) = Z_K(A)$ est le sous-groupe de $K = \mathrm{PSO}(n)$ des matrices diagonales de coefficients diagonaux ± 1 et de déterminant 1 (modulo homothéties), et $N_K(\mathfrak{a}) = N_K(A)$ est le sous-groupes des matrices monomiales de coefficients non nuls ± 1 (modulo homothéties).

4.3.2 Flot géodésique des espaces symétriques de type non compact

Pour simplifier les notations, pour tous les $g \in G$ et $v \in T_x M$, notons $g \cdot v = T_x m_g(v)$ où $m_g : y \mapsto g \cdot y$ est l'action de g sur M. Par la proposition 4.31 (ii), pour tout $v \in TM$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot v \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \simeq T_{x_0} M$. La classe de $g \cdot v$ dans $W \backslash \mathfrak{a}$ est indépendante du choix de g, par la proposition 4.32. Ainsi, pour toute chambre de Weyl fixée $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{a}$, en identifiant son adhérence $\overline{\mathfrak{C}}$ dans $\mathfrak{a}$ avec son image dans $W \backslash \mathfrak{a}$ par la projection canonique, nous avons une application

$$\Theta_{\mathfrak{C}} : TM \to \overline{\mathfrak{C}}$$

appelée *l'application direction*, qui à un vecteur tangent v associe la classe de $g \cdot v$ modulo W. Elle est surjective, invariante par l'action du groupe d'isométrie et par le flot géodésique de M. Un vecteur $v \in TM$ est régulier si et seulement si $\Theta_{\mathfrak{C}}(v) \in \mathfrak{C}$.

En particulier, le groupe G agit transitivement sur le fibré tangent unitaire $T^1 M$ de M si et seulement si M est de rang un.

Pour tout $X \in \mathfrak{C} \subset T_{x_0} M$ de norme riemannienne 1, notons $T^{1,X} M = \Theta_{\mathfrak{C}}^{-1}(X)$ le sous-espace de $T^1 M$ des vecteurs de direction X. L'action $(g, v) \mapsto g \cdot v$ de G sur $T^1 M$ est transitive sur $T^{1,X} M$.

Si X est un vecteur régulier d'origine x_0, le stabilisateur du vecteur X est exactement le sous-groupe compact $Z_K(\mathfrak{a}) = Z_K(A)$. Par le théorème 1.62, le sous-espace $T^{1,X} M$ est donc une sous-variété lisse de $T^1 M$, et l'action lisse de G sur $T^1 M$ induit un C^∞-difféomorphisme

$$\psi_X : G/Z_K(\mathfrak{a}) \simeq T^{1,X} M \ .$$

de la variété homogène quotient $G/Z_K(A)$ dans $T^{1,X} M$. Ce difféomorphisme ψ_X est équivariant pour les actions à droite de G : pour tous les $g \in G$ et $y \in G/Z_K(\mathfrak{a})$, nous avons

$$\psi_X(gy) = g \cdot \psi_X(y) \ .$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $g_t = \exp(tX)$. Alors $g_t \in A$, donc g_t commute avec $Z_K(A)$. Donc la multiplication à droite par g_t dans G induit une application de $G/Z_K(A)$ dans lui-même, notée $x \mapsto x g_t$. Il est immédiat de vérifier que si $(\phi_t : T^1 M \to T^1 M)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot géodésique de M, alors, pour tous les $t \in \mathbb{R}$ et $y \in G/Z_K(A)$, nous avons

$$\psi_X(y g_t) = \phi_t(\psi_X(y)) \ .$$

Comme vu dans le théorème 1.60, l'espace tangent en la classe $\overline{e} = e Z_K(A)$ de l'élément neutre dans $G/Z_K(A)$ s'identifie au quotient de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \oplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ par l'algèbre de Lie de $Z_K(A)$, qui est $\mathfrak{z}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{K}$. Donc par la proposition 4.15 (i), nous avons

$$T_{\overline{e}}\big(G/Z_K(A)\big) = \mathfrak{a} \oplus \oplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{X,-} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{X,+} \ ,$$

où $\mathfrak{g}_{X,\pm} = \oplus_{\alpha \in \Phi \,,\, \pm\alpha(X) > 0} \mathfrak{g}_\alpha$. Cette décomposition est invariante par $\mathrm{Ad}(Z_K(A))$. En effet, si $g \in Z_K(A) = Z_K(\mathfrak{a})$, $Y \in \mathfrak{a}$, $\alpha \in \Phi$ et $Z \in \mathfrak{g}_\alpha$, alors, puisque la restriction de $\mathrm{Ad}\, g$ à $\mathfrak{a}$ vaut l'identité de $\mathfrak{a}$ et par la définition du système de racines restreintes, nous avons

$$[Y, \mathrm{Ad}\, g(Z)] = \mathrm{Ad}\, g([\mathrm{Ad}\, g^{-1}(Y), Z] = \mathrm{Ad}\, g([Y, Z]) = \mathrm{Ad}\, g(\alpha(Y) Z) = \alpha(Y)\, \mathrm{Ad}\, g(Z) \ ,$$

donc $\mathrm{Ad}\, g$ préserve $\mathfrak{g}_\alpha$.

Notons que, pour tout $X \in \mathfrak{a}$, nous avons

$$\mathrm{Ad}(\exp(tX))_{|\mathfrak{g}_\alpha} = e^{t\alpha(X)}\, \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_\alpha} \ . \qquad (\cdot 82 \cdot)$$

Ainsi, si $X \in \mathfrak{C}$ est un vecteur régulier, le fibré vectoriel $T(T^{1,X}M) \to T^{1,X}M$ se décompose de manière unique en somme directe de sous-fibrés vectoriels lisses

$$T(T^{1,X}M) = E_{\mathrm{su}} \oplus E_0 \oplus E_{\mathrm{ss}} \ ,$$

invariants par le flot géodésique et par l'action de G, tels que

$$E_{\mathrm{su}} \cap T_X(T^{1,X}M) = \mathfrak{g}_{X,+}, \quad E_0 \cap T_X(T^{1,X}M) = \mathfrak{a}, \quad E_{\mathrm{ss}} \cap T_X(T^{1,X}M) = \mathfrak{g}_{X,-} \ .$$

Lorsque M est de rang un, nous retrouvons la décomposition de la partie 3.7.3. Notons que si $\lambda_\pm = \max_{\alpha\in\Phi\,,\,\pm\alpha(X)>0} |\alpha(X)| > 0$, alors par la formule ($\cdot$ 82 $\cdot$), il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $t > 0$ et tout $v \in T^{1,X}M$, nous ayons

$$\|T_v\phi_{t\,|E_{ss}}\| \leq c\, e^{-\lambda_- t} \ \text{ et } \ \|T_v\phi_{-t\,|E_{su}}\| \leq c\, e^{-\lambda_+ t} \ .$$

Ces propriétés de contraction et dilatation sont cruciales pour l'étude de nombreux problèmes de dynamique dans les espaces localement symétriques (voir par exemple [MaT, EiLMV]).

4.3.3 Chambres de Weyl à l'infini

Deux parties A et B de M seront dites *asymptotes* si elles sont à distance de Hausdorff finie, c'est-à-dire s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A est contenue dans le k-voisinage de B et réciproquement.

Soient $X \in \mathfrak{a}$ et $\xi \in \partial_\infty M$ le point à l'infini de la géodésique $t \mapsto \exp(tX) \cdot x_0$. Notons $\mathfrak{a}_X = \mathfrak{z}(X) \cap \mathfrak{p}$ (qui n'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ que lorsqu'elle est abélienne, c'est-à-dire lorsque X est régulier), $\mathfrak{u}_X = \bigoplus_{\alpha\in\Phi,\,\alpha(X)>0} \mathfrak{g}_\mathfrak{a}$, $A_\xi = \exp(\mathfrak{a}_X)$, $U_\xi = \exp(\mathfrak{u}_X)$ et $Z_\xi = Z_G(X) = \{g \in G \ : \ \mathrm{Ad}\, g(X) = X\}$. Lorsque X est un élément régulier, nous avons $\mathfrak{a}_X = \mathfrak{a}$ et $Z_\xi = Z_G(\mathfrak{a})$.

Théorème 4.33 (Décomposition d'Iwasawa) *(i) Les parties A_ξ, U_ξ et Z_ξ de G sont fermées, A_ξ est stable par passage à l'inverse et normalise U_ξ, et U_ξ et Z_ξ sont des sous-groupes. Le stabilisateur de ξ dans G est $G_\xi = K_\xi A_\xi U_\xi$, où $K_\xi = K \cap Z_\xi$. Le groupe K_ξ, et donc G_ξ, a un nombre fini de composantes connexes.*

(ii) La multiplication de $K \times A_\xi \times U_\xi$ dans G (qui à (k, a, u) associe kau) est un homéomorphisme.

(iii) La partie $A_\xi U_\xi$ agit simplement transitivement sur M.

(iv) Si $X \in \mathfrak{a}$ et si $\mathfrak{F}$ est la face de chambre de Weyl contenant X, alors pour tous les $a \in A_\xi$ et $u \in U_\xi$, les parties $au\exp(\mathfrak{F}) \cdot x_0$ et $\exp(\mathfrak{F}) \cdot x_0$ sont asymptotes, et la distance $d(u\exp(tY) \cdot x_0, \exp(tY) \cdot x_0)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Nous résumons l'assertion (ii) en disant que

$$G = KA_\xi U_\xi \ .$$

Par exemple, soient $G = \mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{a}$ le sous-espace de Cartan des matrices diagonales de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$. Alors $K = \mathrm{PSO}(n)$. Si A est le sous-groupe de G des matrices diagonales à coefficients diagonaux positifs, si U est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes, alors la décomposition d'Iwasawa $G = KAU$ découle immédiatement du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Démonstration. (i) Il est immédiat que Z_ξ est un sous-groupe fermé. L'application $Y \mapsto \exp Y \cdot x_0$ étant un C^∞-difféomorphisme de $\mathfrak{p}$ sur M, il est immédiat que A_ξ est fermé. Puisque $\mathfrak{a}_X$ est stable par passage à l'opposé, A_ξ l'est par passage à l'inverse. Notons que si $Y \in \mathfrak{z}(X) \cap \mathfrak{p}$, alors $\operatorname{ad} Y$ commute avec $\operatorname{ad} X$ (par l'identité de Jacobi) et donc $\operatorname{ad} Y$ préserve la somme $\mathfrak{u}_X$ des espaces propres de valeurs propres strictement positives de $\operatorname{ad} X$. D'où $\exp Y \exp \mathfrak{u}_X \exp(-Y) = \exp\big(\operatorname{Ad}(\exp Y)\,\mathfrak{u}_X\big) = \exp\big(e^{\operatorname{ad} Y}\,\mathfrak{u}_X\big) \subset \exp \mathfrak{u}_X$, et il en découle que la partie $A_X = \exp \mathfrak{a}_X$ normalise le sous-groupe $U_\xi = \exp \mathfrak{u}_X$. Nous renvoyons à [Ebe2] pour les autres affirmations.

(ii) Montrons que l'on a une décomposition en somme directe d'espaces vectoriels

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{a}_X \oplus \mathfrak{u}_X \ .$$

Posons $\mathfrak{u}_X^- = \bigoplus_{\alpha\in\Phi,\ \alpha(X)<0} \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{u}_X^0 = \bigoplus_{\alpha\in\Phi,\ \alpha(X)=0} \mathfrak{g}_\alpha$. La décomposition en espaces de racine restreinte s'écrit donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{u}_X^- \oplus \mathfrak{u}_X^0 \oplus \mathfrak{u}_X \ . \tag{$\cdot 83 \cdot$}$$

Rappelons que $\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{K}) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p})$. Par définition, $\mathfrak{a}_X = (\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{u}_X^0) \cap \mathfrak{p}$. Puisque $\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$, l'involution de Cartan θ préserve $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{u}_X^0$, donc

$$\mathfrak{u}_X^0 = (\mathfrak{u}_X^0 \cap \mathfrak{K}) \oplus (\mathfrak{u}_X^0 \cap \mathfrak{p}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}_X = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{u}_X^0 \cap \mathfrak{p}) \ .$$

Si $Y \in \mathfrak{u}_X^-$, alors $Y = Y + \theta(Y) - \theta(Y)$, avec $Y + \theta(Y) \in \mathfrak{K} = \operatorname{Fix}(\theta)$ et $-\theta(Y) \in \mathfrak{u}_X$ (puisque $\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ pour tout $\alpha \in \Phi$. Donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} + \mathfrak{a}_X + \mathfrak{u}_X$.

Pour montrer que cette somme est directe, si $Y'' \in \mathfrak{K}, Y' \in \mathfrak{a}_X, Y \in \mathfrak{u}_X$ vérifient $Y'' + Y' + Y = 0$, alors en appliquant θ, nous avons $Y'' + \theta(Y') + \theta(Y) = 0$, donc $(Y' - \theta(Y')) + Y - \theta(Y) = 0$ où $Y \in \mathfrak{u}_X$, $-\theta(Y) \in \mathfrak{u}_X^-$ et $Y' - \theta(Y') \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{u}_X^0$ puisque $\mathfrak{a}_X$ est contenu dans le sous-espace θ-invariant $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{u}_X^0$. Puisque la somme dans l'équation ($\cdot 83 \cdot$) est directe, nous avons donc $Y = 0$ et $Y' = \theta(Y')$, d'où $Y' \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{a}_X \subset \mathfrak{K} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ et $Y' = 0$, et finalement $Y'' = -Y - Y' = 0$. Nous renvoyons à [Ebe2] pour la fin de la démonstration de (ii).

(iii) Puisque $G = U_\xi A_\xi K$ par passage aux inverses, puisque $U_\xi A_\xi = A_\xi U_\xi$ par (i), et puisque l'application orbitale en x_0 permet d'identifier G/K et M de manière G équivariante, le résultat est immédiat.

(iv) Notons

$$\Phi_X^- = \{\alpha \in \Phi \ : \ \alpha(X) < 0\}, \ \ \Phi_X^0 = \{\alpha \in \Phi \ : \ \alpha(X) = 0\}, \ \ \Phi_X^+ = \{\alpha \in \Phi \ : \ \alpha(X) > 0\} \ .$$

Alors

$$\mathfrak{F} = \{Y \in \mathfrak{a} \ : \ \forall \alpha \in \Phi_X^-, \alpha(Y) < 0 \ \text{ et } \ \forall \alpha \in \Phi_X^0, \alpha(Y) = 0 \ \text{ et } \ \forall \alpha \in \Phi_X^+, \alpha(Y) > 0\} \ .$$

Soient $Y \in \mathfrak{F}$, $X_\mathfrak{a} \in \mathfrak{a}_X$ et $X_\mathfrak{u} = \sum_{\alpha\in\Phi_X^+} X_{\mathfrak{u},\alpha} \in \mathfrak{u}_X = \oplus_{\alpha\in\Phi_X^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Puisque $X_\mathfrak{a} \in \mathfrak{a}_X = \mathfrak{a}_Y$, nous avons $[Y, X_\mathfrak{a}] = 0$ et donc $\exp(tY)$ et $\exp X_\mathfrak{a}$ commutent. Donc

$$\begin{aligned}
& d(\exp X_\mathfrak{a} \exp X_\mathfrak{u} \exp tY \cdot x_0, \exp tY \cdot x_0) \\
= \ & d(\exp(-tY) \exp X_\mathfrak{u} \exp(tY) \cdot x_0, \exp(-X_\mathfrak{a}) \cdot x_0) \\
= \ & d(\exp\big(\operatorname{Ad}(\exp(-tY))X_\mathfrak{u}\big) \cdot x_0, \exp(-X_\mathfrak{a}) \cdot x_0) \\
= \ & d(\exp\big(e^{-t\operatorname{ad} Y} X_\mathfrak{u}\big) \cdot x_0, \exp(-X_\mathfrak{a}) \cdot x_0) \\
= \ & d(\exp\big(\sum_{\alpha\in\Phi_X^+} e^{-t\alpha(Y)} X_{\mathfrak{u},\alpha}\big) \cdot x_0, \exp(-X_\mathfrak{a}) \cdot x_0) \ .
\end{aligned}$$

Puisque $\alpha(Y) > 0$ si $\alpha \in \Phi_X^+$, le résultat en découle. $\square$

Proposition 4.34 *(i) Pour toute chambre de Weyl C de M, pour tout $x \in M$, il existe une unique chambre de Weyl de M de sommet x asymptote à C.*

(ii) Deux chambres de Weyl contenant des rayons géodésiques asymptotes sont asymptotes.

(iii) Pour toutes les chambres de Weyl C et C' de M, il existe un plat maximal F de M tel que C et C' soient asymptotes à des chambres de Weyl de M contenues dans F.

(iv) Le groupe G agit fidèlement et transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl de M.

Démonstration. (i) Par transitivité, nous pouvons supposer que $C = \exp \mathfrak{a}^+ \cdot x_0$ où $\mathfrak{a}^+$ est une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$. Par le théorème 4.33 (iii), nous pouvons écrire $x = a\, u\, x_0$ où $a \in A = \exp \mathfrak{a}$ et $u \in U = \exp \mathfrak{u}_+$ où $\mathfrak{u}^+ = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ et Φ^+ est l'ensemble des racines restreintes positives relativement au choix de $\mathfrak{a}^+$ (et donc pour tout $X \in \mathfrak{a}_+$, nous avons $\Phi^+ = \Phi_X^+$ et $\mathfrak{u}^+ = \mathfrak{u}_X^+$ avec les notations du théorème 4.33). Alors par le théorème 4.33 (iv), la chambre de Weyl $a\, u\, C$ est asymptote à C, de sommet x. Ce résultat montre aussi qu'il existe une unique chambre de Weyl de sommet x_0 asymptote à C.

(ii) Ceci découle du théorème 4.33.

(iii) Nous renvoyons à [Ebe2] pour une démonstration de cette assertion.

L'assertion (iv) découle du fait que le stabilisateur d'une chambre de Weyl de M fixe son sommet, du fait que G agit fidèlement sur M et de la proposition 4.31 (ii). $\square$

Une *chambre de Weyl à l'infini* de M est l'ensemble des points à l'infini des rayons géodésiques contenus dans une chambre de Weyl de M. Si C est une chambre de Weyl de sommet x et $\mathscr{C}$ est la partie de $T_x M$ telle que $\overline{C} = \exp_x \mathscr{C}$, alors l'application du simplexe sphérique fermé $T_x^1 M \cap \mathscr{C}$ dans $\partial_\infty M$, qui à un vecteur tangent unitaire d'origine x associe le point à l'infini du rayon géodésique qu'il définit, est un homéomorphisme sur son image, notée $\partial_\infty C$, qui est l'intersection avec $\partial_\infty M$ de la frontière de C dans la compactification géométrique de M. Notons que si C' est une chambre de Weyl de sommet x' asymptote à C, alors les distances sur $\partial_\infty C = \partial_\infty C'$ induites par les distances sphériques sur $T_x^1 M$ et $T_{x'}^1 M$ coïncident, car il existe une isométrie de M envoyant x sur x' et fixant $\partial_\infty C = \partial_\infty C'$, par le théorème 4.33.

Munissons l'ensemble des chambres de Weyl fermées de M de la topologie de Chabauty (induite par la distance de Hausdorff sur les compacts). Nous appellerons *bord de Furstenberg* de M, et nous noterons $\partial_{\mathrm{Fur}} M$, l'espace des chambres de Weyl à l'infini, muni de la topologie quotient. Soit P le stabilisateur dans G d'une chambre de Weyl à l'infini C_∞ fixée, par exemple $P = A_\xi U_\xi$ où ξ est un point intérieur du simplexe sphérique C_∞, avec les notations de la décomposition d'Iwasawa (Théorème 4.33). L'action transitive de G sur l'ensemble des chambres de Weyl à l'infini induit alors un homéomorphisme

$$G/P \xrightarrow{\sim} \partial_{\mathrm{Fur}} M \ .$$

4.3.4 Immeuble de Tits à l'infini

Nous renvoyons à la partie 3.6.7 et à [BrH] pour plus de détails sur les complexes polyédraux sphériques (par morceaux), en nous restreignant ci-dessous aux définitions minimales pour notre besoin.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une partie C de la sphère $\mathbb{S}_n$ est *convexe* si pour tous les $x, y \in C$, tout segment géodésique de $\mathbb{S}_n$ entre x et y est contenu dans C. *L'enveloppe convexe* d'une partie de $\mathbb{S}_n$ est l'intersection de tous les convexes la contenant ; c'est le plus petit convexe le contenant.

Un *simplexe sphérique* C de dimension n est l'enveloppe convexe de $n+1$ points (appelés *sommets* de C) de la sphère $\mathbb{S}_n$ qui ne sont pas contenus dans un équateur et qui sont contenus dans une hémisphère ouverte. C'est en particulier un convexe fermé. Une *face* de C est l'enveloppe convexe d'une partie non vide T de l'ensemble S de ses sommets. Elle est *propre* si $T \neq S$. C'est encore un simplexe sphérique, de dimension le cardinal de la partie T moins un. Par exemple, les sommets de C sont ses faces de dimension 0 et C est une face de C. Si C est un simplexe sphérique de dimension n dans $\mathbb{S}_n$ d'ensemble de sommets S et C' un simplexe sphérique de dimension n' dans $\mathbb{S}_{n'}$ d'ensemble de sommets S', alors le *joint sphérique* $C * C'$ de C et de C' est l'enveloppe convexe dans la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n'+1}$ des points $(x, 0)$ et $(0, x')$ avec $x \in S$ et $x' \in S'$. C'est donc un simplexe sphérique de dimension $n + n' + 1$.

Par exemple, si $\mathfrak{C}$ est une chambre de Weyl d'un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ d'un espace symétrique de type non compact M, alors l'intersection de $\mathfrak{C}$ avec la sphère unité de $\mathfrak{a}$ est un simplexe sphérique, de dimension $r - 1$ si $r = \dim \mathfrak{a}$ est le rang de M. Il ne dépend pas, à isométrie près, des choix. Si M est le produit riemannien de deux espaces symétriques de type non compact M_1 et M_2, alors le simplexe sphérique de M est isométrique au joint des simplexes sphériques de M_1 et M_2.

Un *complexe simplicial sphérique* est un recollement de simplexes sphériques par isométries le long de faces, plus précisément une famille $(C_i)_{i \in I}$ de simplexes sphériques, munie d'une relation d'équivalence $\sim$ sur sa réunion disjointe $\coprod_{i \in I} C_i$ telle que si $\pi : \coprod_{i \in I} C_i \to \coprod_{i \in I} C_i/\sim$ est la projection canonique, alors

- la restriction de π à chaque C_i est injective,
- pour tout $i \in I$, si F est une face de C_i, alors il existe $j \in I$ tel que $C_j = F$,
- si $\pi(C_i) \cap \pi(C_j) \neq \emptyset$ où $i, j \in I$, alors il existe une face F_i de C_i, une face F_j de C_j et une isométrie $h : F_i \to F_j$ telle que pour tous les $x \in C_i$ et $y \in C_j$, nous avons $x \sim y$ si et seulement si $x \in F_i, y \in F_j$ et $h(x) = y$.

Par abus, nous appellerons parfois *complexe simplicial sphérique* le quotient $X = \coprod_{i \in I} C_i/\sim$, et nous appellerons *simplexes* de X les images $\pi(C_i)$ pour $i \in I$, que nous identifions avec C_i par $\pi_{|C_i} : C_i \to \pi(C_i)$.

Soit

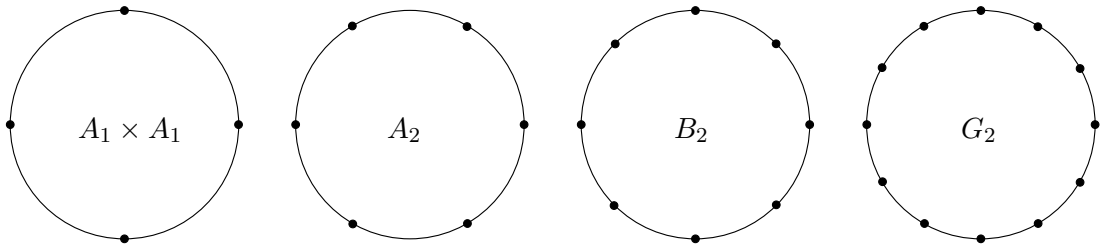
$$d(x, y) = \inf_{(x_0, x_1 \ldots, x_k)} \sum_{j=1}^{k} d_{C_{i_j}}(x_{j-1}, x_j),$$

où la borne inférieure est prise sur les suites finies $x_0, x_1, \ldots, x_k$ d'éléments de X telles que $x_0 = x$, $x_k = y$ et, pour tout $1 \leq j \leq k$, il existe un simplexe C_{i_j} tel que $x_{j-1}, x_j \in \pi(C_{i_j})$ et $d_{C_{i_j}}(x_{j-1}, x_j)$ est la distance dans C_{i_j} entre les (uniques) préimages de x_{j-1} et x_j par $\pi_{|C_{i_j}}$. Si $(C_i)_{i \in I}$ ne contient qu'un nombre fini de classes d'isométrie d'éléments, on montre (voir par exemple [BrH]) que d est une distance sur X, induisant la topologie de X (la topologie quotient de la topologie somme disjointe).

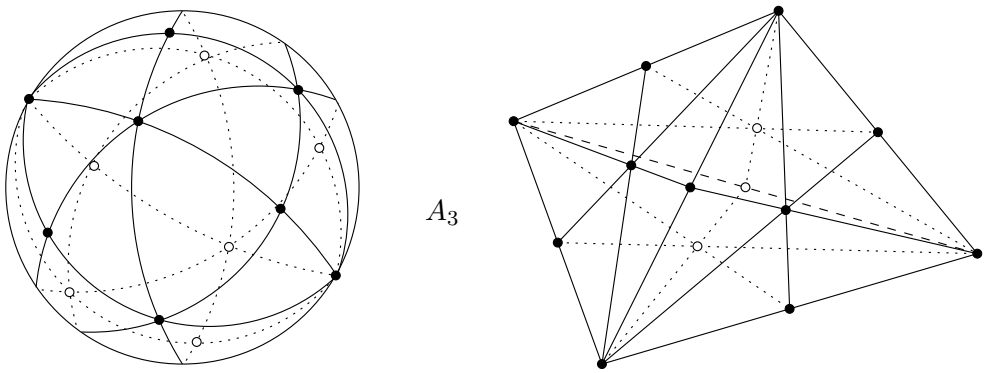
Une *isométrie simpliciale* entre deux complexes simpliciaux sphériques X et X' est une isométrie de X dans X' qui envoie simplexe de X sur simplexe de X'.

Par exemple, la sphère unité d'un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ d'un espace symétrique de type non compact M admet une (unique) structure de complexe simplicial sphérique Σ_M

dont les simplexes maximaux sont les intersections des adhérences des chambres de Weyl de $\mathfrak{a}$ avec cette sphère unité, au nombre égal au cardinal du groupe de Weyl de M. Notons que si le rang de M est 1, alors Σ_M est la réunion disjointe de deux points. Si le système de racines restreintes de M est de type $A_1 \times A_1, A_2, B_2, G_2$, alors Σ_M est un cercle subdivisé en respectivement $4, 6, 8, 12$ segments d'égales longueurs.



Si le système de racines restreintes de M est de type A_3, alors Σ_M est la sphère $\mathbb{S}_2$ pavée par le triangle sphérique d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$, qui est la projection radiale sur la sphère $\mathbb{S}_2$ de la subdivision barycentrique d'un tétraèdre régulier inscrit dans la sphère $\mathbb{S}_2$.



Si P est un simplexe sphérique de dimension n, d'angles dièdres sous-multiples de π (c'est-à-dire si pour toute face F de codimension 2 de P, il existe $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ tel que l'angle dièdre en F soit $\frac{\pi}{k}$), alors un théorème de Poincaré (voir par exemple [Har]) dit qu'il existe une et une seul structure de complexe simplicial sphérique sur $\mathbb{S}_n$, telle que P soit l'un des simplexes, et qui soit invariante par l'action du groupe $W(P)$ engendré par les réflexions orthogonales sur les hyperplans de $\mathbb{S}_n$ contenant les faces de codimension 1 de P. Un tel pavage est appelé un *pavage de Coxeter*, voir par exemple [Hum, Bou3] pour plus de renseignements sur les groupes de réflexions. Par exemple, si r est le rang d'un espace symétrique de type non compact M, alors Σ_M est un pavage de Coxeter de la sphère unité $\mathbb{S}_{r-1}$ d'un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de M.

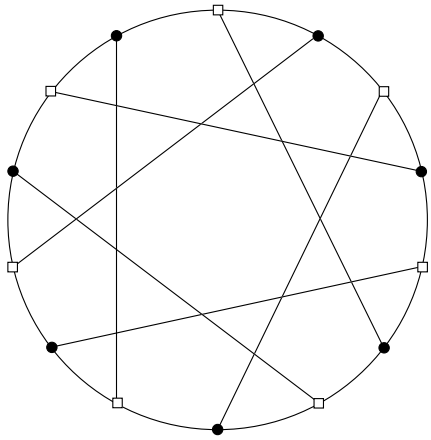
Un *immeuble (de Tits) sphérique* de dimension n est un complexe simplicial sphérique X muni d'une collection $\mathscr{A}$ de sous-complexes sphériques, appelés *appartements*, simplicialement isométriques à un pavage de Coxeter fixé de la sphère $\mathbb{S}_n$, tels que

(I_1) deux simplexes de X appartiennent à un appartement,

(I_2) si A et A' sont deux appartements, il existe une isométrie simpliciale de A dans A' qui fixe $A \cap A'$ point par point.

Les simplexes sphériques de dimension n de X sont appelés les *chambres* de X. Nous ne nous intéresserons qu'au cas où la collection $\mathscr{A}$ est maximale et nous supposerons donc ceci dans la suite. Voir par exemple [Ron, Bro] pour plus d'information sur les immeubles.

Par exemple, le *graphe d'incidence* d'un plan projectif sur un corps commutatif k, c'est-à-dire le graphe bipartie X de sommets les points projectifs P et les droites projectives D du plan projectif $\mathbb{P}_2(k)$ et d'arêtes les couples (P, D) où D est une droite projective dans $\mathbb{P}_2(k)$ et P un point projectif dans $\mathbb{P}_2(k)$, tels que $P \in D$, chaque arête étant identifiée à un intervalle de longueur $\frac{\pi}{3}$ du cercle $\mathbb{S}_1$, est un immeuble sphérique. Le dessin ci-dessous est le graphe d'incidence d'un plan projectif sur un corps à deux éléments.



Proposition 4.35 *Soit M un espace symétrique de type non compact, de rang r. L'ensemble $\partial_\infty M$, dont les simplexes sont les faces de chambres de Weyl à l'infini de M et dont les appartements sont les bords à l'infini des plats maximaux de M, est un immeuble sphérique de dimension $r-1$, de système d'appartements maximal.*

Nous noterons $\partial_{\mathrm{Tits}} M$ cet immeuble, et nous l'appellerons le *bord de Tits* de M (ou l'*immeuble de Tits à l'infini* de M). Toute isométrie g de M envoie face de chambre de Weyl de M sur face de chambre de Weyl de M, et induit donc une isométrie simpliciale de $\partial_{\mathrm{Tits}} M$, que nous noterons encore g.

Par exemple, si M est un espace symétrique de type non compact de rang 1, alors $\partial_{\mathrm{Tits}} M$ est l'ensemble $\partial_\infty M$ muni de la topologie discrète, de système d'appartements l'ensemble des paires de points distincts.

Démonstration. Voir par exemple [Ebe2]. □

Remarque. La distance du complexe simplicial sphérique $\partial_{\mathrm{Tits}} M$ peut se comprendre de manière géométrique à l'intérieur de M de la manière suivante (voir par exemple [BaGS] et la partie 3.7.5 pour plus de détails).

Pour tous les $\xi, \eta \in \partial_\infty M$, notons

$$\angle(\xi, \eta) = \sup_{x \in M} \angle_x(v_\xi, v_\eta)$$

où v_ξ, v_η sont les vecteurs tangents unitaires en x, dont les rayons géodésiques associés convergent vers ξ et η respectivement. Alors $\angle$ est une distance sur $\partial_\infty M$ et la *distance de Tits* d_{Tits} sur $\partial_\infty M$ est la distance de longueur associée à $\angle$ (avec la convention que la distance entre deux points qui ne sont pas dans la même composante connexe est π), voir la partie 3.7.5 pour plus d'explications. La distance de Tits est de diamètre π, mais sa topologie induite est beaucoup plus fine que la topologie de $\partial_\infty M$. En fait, d_{Tits} coïncide avec la distance du complexe simplicial sphérique $\partial_{\mathrm{Tits}} M$.

4.4 Théorème de rigidité de Mostow

Le résultat suivant dit en particulier que deux quotients compacts d'espaces symétriques de type non compact irréductibles de dimension au moins 3, dont les groupes fondamentaux sont isomorphes, sont homothétiques.

Soient M une variété riemannienne connexe complète à courbure sectionnelle négative ou nulle et Γ un sous-groupe discret sans torsion d'isométries de M. Nous avons vu (dans le corollaire 3.62) que Γ agit librement et proprement sur M, et que la projection canonique de M sur la variété quotient $\Gamma\backslash M$ est un revêtement riemannien, pour une unique métrique riemannienne sur $\Gamma\backslash M$. Nous dirons que Γ est un *réseau d'isométries* si le volume riemannien de $\Gamma\backslash M$ est fini, et qu'il est *cocompact* (ou un *réseau uniforme*) si $\Gamma\backslash M$ est compact. Si M est simplement connexe, Γ est dit *irréductible* si lorsque M est isométrique à un produit riemannien non trivial $M_1 \times M_2$, en notant G, G_1, G_2 les composantes neutres des groupes d'isométries de M, M_1, M_2 et $\mathrm{pr}_i : G = G_1 \times G_2 \to G_i$ la i-ème projection pour $i = 1, 2$, la projection $\pi_i(\Gamma)$ est un sous-groupe dense de G_i pour $i = 1, 2$. Par exemple, lorsque M est un espace symétrique de type non compact irréductible, alors cette condition est vide, donc tout réseau est irréductible.

Théorème 4.36 (Théorème de rigidité de Mostow) *Soient M et M' deux espaces symétriques de type non compact non homothétiques au plan hyperbolique réel, et Γ et Γ' deux réseaux irréductibles d'isométries de M et M' respectivement. Si $\theta : \Gamma \to \Gamma'$ est un isomorphisme de groupes, alors il existe une multi-homothétie h de M dans M' telle que $\theta(\gamma) = h\gamma h^{-1}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.*

Le résultat est dû à Mostow [Mos1, Mos2] dans le cas cocompact et son extension au cas non uniforme est dû à Margulis, Raghunathan et G. Prasad [Pra].

Nous n'en donnerons une démonstration que lorsque M et M' sont irréductibles de rang au moins 2 et lorsque Γ et Γ' sont cocompacts.

La démonstration dans le cas où M et M' sont irréductibles de rang 1 (c'est-à-dire sont des espaces hyperboliques réels, complexes, quaternioniens ou le plan hyperbolique sur les octaves de Cayley) est très différente du cas où M ou M' ne l'est pas. Outre à l'article original [Mos1] utilisant les propriétés de régularité des applications quasiconformes sur $\partial_\infty M$ et la dynamique de Γ sur $\partial_\infty M$, et à la démonstration de Gromov (voir par exemple [BeP]), nous renvoyons dans ce cas hyperbolique réel à l'article [BessCG], qui donne sans doute actuellement la démonstration la plus élégante et rapide.

L'exclusion du cas du plan hyperbolique réel est alors nécessaire, car l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes discrets cocompacts d'isométries du plan hyperbolique réel isomorphes en tant que groupes au groupe fondamental d'une surface compacte connexe orientable de genre $g \geq 2$ est non dénombrable (voir par exemple [FLP]). Plus précisément, si Γ est le groupe fondamental d'une surface S compacte connexe orientable de genre $g \geq 2$ (muni de la topologie discrète), si G est le groupe de Lie réel $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (isomorphe au groupe des isométries préservant l'orientation du plan hyperbolique réel), notons $\mathrm{Hom}_{fd}(\Gamma, G)$ l'espace des morphismes de groupes de Γ dans G injectifs d'image discrète, muni de la topologie compacte-ouverte (deux morphismes sont proches si les images des éléments d'une partie génératrice finie fixée de Γ sont proches). Cet espace est muni d'une action de G à droite par conjugaisons (l'application de $G \times \mathrm{Hom}_{fd}(\Gamma, G)$ dans $\mathrm{Hom}_{fd}(\Gamma, G)$ définie par $(g, \rho) \mapsto \{\gamma \mapsto g^{-1}\rho(\gamma)g\}$) et d'une action à gauche de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$

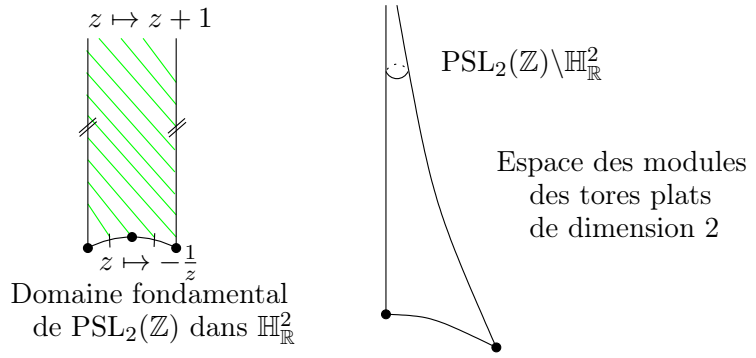
par précomposition (l'application de $\mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{Hom}_{fd}(\Gamma, G)$ dans $\mathrm{Hom}_{fd}(\Gamma, G)$ définie par $(\phi, \rho) \mapsto \rho \circ \phi^{-1}$). Nous avons le résultat suivant (voir par exemple [FLP, FM]).

Proposition 4.37 *L'espace topologique quotient $\mathscr{T}(S) = \mathrm{Hom}_{fd}(\Gamma, G)/G$ est homéomorphe à la réunion disjointe de deux copies de $\mathbb{R}^{6g-6}$.* $\square$

En particulier l'espace topologique quotient $\mathscr{M}(S) = \mathrm{Aut}(\Gamma)\backslash\mathscr{T}(S)$ (appelé *l'espace modulaire*) de l'espace $\mathscr{T}(S)$ (appelé *l'espace de Teichmüller* de S) par le groupe dénombrable $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ est encore non dénombrable. Notons $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ le modèle du demi-plan supérieur du plan hyperbolique réel. Notons $\mathscr{M}'(S)$ l'espace topologique des classes d'isométries de métriques hyperboliques (c'est-à-dire des métriques riemanniennes de courbure sectionnelle constante -1) sur S, muni de la topologie quotient par l'action du groupe des isométries de la topologie induite sur le sous-espace des métriques riemanniennes par la topologie C^2 sur l'espace $\Gamma(\otimes^2 T^*S)$ des sections lisses du fibré des formes bilinéaires sur S. Considérons l'application de $\mathscr{M}(S)$ dans $\mathscr{M}'(S)$, qui à la double classe $[\rho]$ associe la classe d'isométrie de la variété riemannienne quotient $\rho(\Gamma)\backslash\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ (qui est homéomorphe à S, par la classification des surfaces compactes connexes orientables, celles-ci étant déterminées par leurs groupes fondamentaux). Il n'est pas très difficile de montrer que cette application est un homéomorphisme.

Lorsque S est le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$, un résultat analogue qui reste vrai est le suivant. Notons $\mathscr{M}(S)$ l'espace des classes d'homothétie des métriques plates (c'est-à-dire des métriques riemanniennes de courbure sectionnelle constante 0) sur S, toujours muni de la topologie quotient de la topologie induite par la topologie C^2 sur l'espace $\Gamma(\otimes^2 T^*S)$. Notons qu'il est ici plus commode de travailler modulo homothétie que modulo isométrie (ce que l'on peut faire par exemple en normalisant l'aire pour qu'elle vaille 1), le groupe $\mathbb{R}^*_+$ agissant par multiplication de la métrique riemannienne sur l'ensemble des classes d'isométrie des métriques plates sur S. Nous considérons ci-dessous le modèle du demi-plan supérieur du plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$.

Proposition 4.38 *L'application de $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ dans $\mathscr{M}(S)$ qui à τ associe la classe d'isométrie de $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ induit un homéomorphisme de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ dans $\mathscr{M}(S)$.*



Notons que $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ est bien homéomorphe à S, et l'on peut transporter la structure plate quotient de $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ sur S par n'importe quel homéomorphisme : à isométrie près, le choix d'un tel homéomorphisme n'a pas d'importance. Attention, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ contient des éléments de torsion (d'ordre 2 ou 3, conjugués respectivement à $z \mapsto -\frac{1}{z}$ et $z \mapsto \frac{1}{1-z}$), et n'agit pas librement sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Néanmoins, il n'est pas difficile de montrer (voir par exemple

[Ser2, CDP]), en utilisant le domaine fondamental usuel, que l'espace topologique quotient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe au disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$. Il est en particulier non dénombrable.

Le théorème de rigidité de Mostow a eu de nombreuses variantes, dont celle de Gromov exposée dans [BaGS]. Pour motiver son énoncé, donnons tout d'abord un théorème de caractérisation des espaces symétriques de type non compact, irréductibles et de rang au moins 2.

Soit M une variété riemannienne complète simplement connexe irréductible à courbure sectionnelle négative ou nulle, de dimension $n \geq 2$. Appelons *rang* de M le minimum sur tous les vecteurs tangents non nuls v de M de la dimension de l'espace vectoriel E_v des champs de Jacobi parallèles le long de la géodésique $c_v : \mathbb{R} \to M$ telle que $\dot{c}_v(0) = v$. Cette dimension est au moins 1, car $t \mapsto \dot{c}_v(t)$ est un champ de Jacobi parallèle, et au plus n, car l'application qui à un champ de vecteurs Y parallèle le long de c_v associe $Y(0)$ est un isomorphisme linéaire sur l'espace tangent T_xM en l'origine x de v.

Si $u \in T_xM$ est orthogonal à v, et si l'unique champ de vecteurs parallèle le long de c_v valant u en $t = 0$ est un champ de Jacobi, alors il découle de l'expression de la courbure sectionnelle en fonction des champs de Jacobi que si P est le 2-plan tangent engendré par u et v, alors

$$K(P) = 0 \ .$$

Ainsi le rang de v peut-être pensé comme la dimension maximale d'un germe de plat infinitésimal le long de chaque géodésique de M.

Par exemple, supposons que M soit un espace symétrique de type non compact, et notons x_0 un point de M et $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée à x_0 de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe des isométries de M. Par la formule de la courbure sectionnelle, si $v \in T_{x_0}M$ et si X est le vecteur de $\mathfrak{p}$ correspondant, alors l'espace vectoriel E_v des champs de Jacobi parallèles le long de la géodésique c_v est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathfrak{z}(X) \cap \mathfrak{p}$. La dimension de $\mathfrak{z}(X) \cap \mathfrak{p}$ est minimale lorsque X est régulier, et égale au rang de M. Donc le rang de la variété riemannienne M est égal à son rang en tant qu'espace symétrique.

La caractérisation évoquée ci-dessus est la suivante.

Théorème 4.39 *[Bal, BuS] Soit M une variété riemannienne complète simplement connexe irréductible à courbure sectionnelle négative ou nulle, de dimension $n \geq 2$. Supposons que le rang de M soit au moins 2 et que M admette un réseau d'isométries. Alors M est un espace symétrique de type non compact.* □

L'extension par Gromov du théorème de rigidité de Mostow est la suivante.

Théorème 4.40 *[BaGS] Soit M un espace symétrique de type non compact, sans facteur de de Rham homothétique au plan hyperbolique réel. Soit M' une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle. Soient Γ et Γ' des réseaux d'isométries de M et M' respectivement. Si $\theta : \Gamma \to \Gamma'$ est un isomorphisme de groupes, alors M' est un espace symétrique de type non compact et il existe une multi-homothétie g de M dans M' telle que $\theta(\gamma) = g\gamma g^{-1}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.* □

Le passage du cas non irréductible au cas irréductible dans cet énoncé est dû à Eberlein [Ebe1].

Nous renvoyons par exemple à [Pan, GroP, BuI] pour des développements sur le théorème de rigidité de Mostow.

Démonstration du théorème 4.36. Soient M et M' deux espaces symétriques de type non compact irréductibles de rang au moins 2, et Γ et Γ' deux sous-groupes discrets cocompacts d'isométries de M et M' respectivement. Soit $\theta : \Gamma \to \Gamma'$ un isomorphisme de groupes. Montrons que quitte à multiplier la métrique riemannienne de M' par une constante strictement positive, il existe une isométrie g de M dans M' telle que $\theta(\gamma) = g\gamma g^{-1}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

$\boxed{\text{Étape 1}}$ Une *quasi-isométrie* entre deux espaces métriques X et X' est une application $f : X \to X'$ telle qu'il existe $\lambda \geq 1$ et $c, c' \geq 0$ tels que, pour tous les $x, y \in X$, nous ayons

$$-c + \frac{1}{\lambda}\, d(x,y) \leq d(f(x), f(y)) \leq \lambda\, d(x,y) + c\,,$$

et tels que pour tout $x' \in X'$, il existe $x \in X$ tel que $d(x', f(x)) \leq c'$.

Il est immédiat que si $f : X \to X'$ et $g : X' \to X''$ sont des quasi-isométries, alors $g \circ f$ est une quasi-isométrie et que si $f : X \to X'$ est une quasi-isométrie, alors il existe une quasi-isométrie $g : X' \to X$ (appelée un *quasi-inverse* de f) telle que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient à distance bornée de l'identité. Pour montrer cette dernière affirmation, il suffit de prendre, pour tout x' dans X', comme point $g(x')$ un choix quelconque de point x tel que $d(f(x), x') \leq c'$.

Proposition 4.41 *Il existe une quasi-isométrie $f : M \to M'$ qui est θ-équivariante.*

Cette dernière affirmation signifie que $f(\gamma x) = \theta(\gamma) f(x)$ pour tous les $\gamma \in \Gamma$ et $x \in M$.

Démonstration. Soient G un groupe et S une partie génératrice finie de G. Pour tout $g \in G$, notons $|g| = |g|_S$ le minimum des longueurs des mots formés d'éléments de S et de l'ensemble S^{-1} de leurs inverses représentant g (en particulier $|e| = 0$). Alors l'application $d = d_S : G \times G \to [0, +\infty[$ définie par $d(g,h) = |g^{-1}h|$ est une distance sur G invariante à gauche, appelée la *distance des mots* définie par la partie génératrice S. Si S' est une autre partie génératrice finie, il est immédiat de vérifier que l'identité de G est une quasi-isométrie (de constantes $c = c' = 0$ et $\lambda = \max\{\max_{s \in S \cup S^{-1}} |s|_{S'}, \max_{s' \in S' \cup S'^{-1}} |s'|_S\}$), entre les distances des mots associées à S et S'. Bien sûr, si $\theta : G \to G'$ est un isomorphisme de groupes, alors $\theta(S)$ est une partie génératrice finie de G' et θ est une isométrie θ-équivariante pour les distances des mots associées à S et $\theta(S)$ sur G et G' respectivement.

Lemme 4.42 *Soient X un espace métrique géodésique propre, $x \in X$ et G un groupe agissant proprement par isométries, avec quotient compact, sur X. Alors G est de type fini et l'application $g \mapsto gx$ de G dans X, qui est équivariante pour les actions à gauche du groupe G sur G et sur X, est une quasi-isométrie de G muni d'une distance des mots dans X.*

Remarque. Lorsque de plus X est une variété simplement connexe et G agit librement, le fait que G est de type fini découle d'arguments généraux de topologie algébrique. Plus précisément (voir par exemple un cours de base [Godb, Spa, Pau3] de topologie algébrique), le groupe fondamental (pour un choix de point base indifférent) d'une variété compacte

connexe est de type fini, et le groupe fondamental (pour un choix de point base indifférent) du quotient d'un espace topologique localement compact simplement connexe par un groupe agissant librement et proprement est isomorphe à ce groupe.

Démonstration. Soient $R > 0$ et B la boule fermée de rayon R et de centre x. Supposons R suffisamment grand pour que les images de B par les éléments de G recouvrent X. Soit S l'ensemble (stable par passage à l'inverse et contenant l'identité) des éléments s de G tels que $B \cap sB$ soit non vide. Puisque la distance de X est propre, B est compacte, et S est fini, car l'action de G est propre. Soient $\lambda = \max_{s\in S} d(x, sx)$ et $r = \inf_{g\in G-S} d(B, gB)$, qui est strictement positif par la compacité de B et la propreté de l'action.

Montrons que S est une partie génératrice de G. Pour tout $g \in G$, soit $k \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $d(x, gx) < kr$. Puisque X est géodésique, choisissons des points $x_0 = x, x_1, \dots, x_k = gx$ sur un segment géodésique entre x et gx tels que $d(x_i, x_{i+1}) \leq r$ pour $0 \leq i \leq k-1$. Pour $0 \leq i \leq k$, soit $g_i \in G$ tel que $x_i \in g_iB$, avec $g_0 = \mathrm{id}$, $g_k = g$. Pour $0 \leq i \leq k-1$, posons $s_i = g_i^{-1}g_{i+1}$, de sorte que $g = s_0s_1 \dots s_{k-1}$. Pour $0 \leq i \leq k-1$, nous avons $g_i^{-1}x_i \in B$ et $g_i^{-1}x_{i+1} = s_ig_{i+1}^{-1}x_{i+1} \in s_iB$, et $d(g_i^{-1}x_i, g_i^{-1}x_{i+1}) = d(x_i, x_{i+1}) < r$. Donc par définition de r, nous avons $s_i \in S$. Ceci montre que S engendre G.

De plus, $d(x, gx) \geq (k-1)r \geq r|g| - r$ par minimalité de k.

Réciproquement, si $g \in G$ et $g = s_1 \dots s_k$ où $s_i \in S$ et $|g| = k$, alors par l'inégalité triangulaire et l'invariance, $d(x, gx) \leq \sum_{i=1}^{k-1} d(s_ix, s_{i+1}x) \leq \lambda\ |g|$. Donc $r\ d(g, h) - r \leq d(gx, hx) \leq \lambda\, d(g, h)$ pour tous les $g, h \in G$. Enfin, tout point de X est à distance au plus R d'un point de l'orbite $G\,x$. □

En prenant un quasi-inverse équivariant et en composant, la proposition 4.41 découle du lemme 4.42. □

$\boxed{\text{Étape 2}}$ Fixons une quasi-isométrie θ-équivariante $f : M \to M'$, comme construite dans la proposition 4.41.

Proposition 4.43 *Pour tout plat maximal F de M, il existe un et un seul plat maximal F' de M' tel que les parties $f(F)$ et F' soient asymptotes.*

Pour toute chambre de Weyl C de M, il existe une chambre de Weyl C' de M' telle que les parties $f(C)$ et C' soient asymptotes.

Il existe une isométrie simpliciale θ-équivariante $\widetilde{f} : \partial_{\mathrm{Tit}}M \to \partial_{\mathrm{Tit}}M'$ qui à la chambre de Weyl à l'infini d'une chambre de Weyl C de M associe la chambre de Weyl à l'infini d'une chambre de Weyl asymptote à $f(C)$.

De plus, l'application $\widetilde{f} : \partial_{\mathrm{Fur}}M \to \partial_{\mathrm{Fur}}M'$ qui à la chambre de Weyl à l'infini d'une chambre de Weyl C de M associe la chambre de Weyl à l'infini d'une chambre de Weyl asymptote à $f(C)$ est un homéomorphisme θ-équivariant.

L'idée est que la courbure sectionnelle transversalement au plat maximal contenant une géodésique régulière est strictement négative.

Démonstration. Voir [BaGS]. □

$\boxed{\text{Étape 3}}$ Nous allons appliquer à l'isométrie simpliciale θ-équivariante $\widetilde{f}$ de $\partial_{\mathrm{Tit}}M$ dans $\partial_{\mathrm{Tit}}M'$ le résultat suivant de Tits, que nous admettrons (voir par exemple [Mos2]).

Théorème 4.44 *[Théorème de Tits] Soient M et M' deux espaces symétriques irréductibles de type non compact de rang au moins 2, de composante neutre du groupe des isométries G et G' respectivement. Si $\widetilde{f}$ est une isométrie simpliciale de $\partial_{\mathrm{Tit}}M$ dans $\partial_{\mathrm{Tit}}M'$, alors il existe un isomorphisme de groupes ψ de G dans G' tel que*

$$\forall\, g \in G, \quad \widetilde{f} \circ g = \psi(g) \circ \widetilde{f}\,.$$

Si l'application de $\partial_{\mathrm{Fur}}M$ dans $\partial_{\mathrm{Fur}}M'$ définie par $\widetilde{f}$ est continue, alors ψ est continu. Si de plus $\widetilde{f}$ est θ-équivariant pour $\theta : \Gamma \to \Gamma'$ un isomorphisme de groupes d'un groupe discret cocompact d'isométries de M dans un groupe discret cocompact d'isométries de M', alors ψ est θ-équivariante. □

Remarques. (1) Ce résultat est incorrect en rang 1, car alors toute bijection de $\partial_{\mathrm{Tit}}M$ préserve sa structure simpliciale d'immeuble de Tits.

(2) Si $M = M'$ est l'espace symétrique des ellipsoïdes de volume 1 en dimension $n \geq 3$, alors ce résultat est juste une conséquence du théorème fondamental de la géométrie projective (voir par exemple [Ber]).

(3) Un automorphisme de groupes de G n'est pas forcément continu. Par exemple, si $n \geq 2$ et si $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un automorphisme de corps non continu (qui existe, alors que le seul automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité), alors l'application de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même, qui à une matrice $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ associe $(\sigma(a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$, induit un automorphisme de groupes non continu de $G = \mathrm{PSL}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même.

En fait, les automorphismes de groupes de G sont connus, et à part les automorphismes intérieurs et un petit groupe provenant de symétries de son diagramme de Dynkin, il n'y a pas autre chose que les automorphismes provenant des automorphismes de corps du corps qui sert à le construire. Ce corps peut se récupérer sur la combinatoire des chambres de Weyl à l'infini contenant une cloison (c'est-à-dire une face de codimension 1) fixée, ce qui explique la dernière assertion du théorème précédent.

Proposition 4.45 *Soient M et M' deux espaces symétriques de type non compact de rang au moins 2, de composante neutre du groupe des isométries G et G' respectivement, et $\psi : G \to G'$ un isomorphisme de groupes qui est un homéomorphisme. Alors il existe une unique multi-homothétie $h : M \to M'$ telle que $h \circ g = \psi(g) \circ h$ pour tout $g \in G$.*

Si ψ est θ-équivariant, alors par unicité, h est θ-équivariante.

Démonstration. Pour tout $x \in M$, notons K_x le stabilisateur de x dans G, qui est un sous-groupe compact maximal de G. Alors $\psi(K_x)$ est un sous-groupe compact maximal de G', donc fixe un unique point $h(x)$ de M'. Puisque $K_{gx} = gK_xg^{-1}$, il est immédiat que $h \circ g = \psi(g) \circ h$ pour tout $g \in G$. L'assertion d'unicité dans la proposition 4.45 en découle aussi facilement.

Notons $x'_0 = h(x_0)$ et remarquons que $\mathfrak{g}' = T_e\psi(\mathfrak{K}) \oplus T_e\psi(\mathfrak{p})$ est la décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ de G associée à x'_0, car $\mathfrak{K}$ est l'algèbre de Lie de $K = K_{x_0}$, donc $T_e\psi(\mathfrak{K})$ est celle de $\psi(K_{x_0})$, et la forme de Killing B' de G', vérifiant $B(X,Y) = B'(T_e\psi(X), T_e\psi(Y))$ pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$, est définie positive sur $T_e\psi(\mathfrak{p})$.

Montrons que l'application $h : M \to M'$ ainsi définie est une isométrie, lorsque M et M' sont munies des métriques riemanniennes invariantes à gauche qui valent sur $T_{x_0}M$ et $T_{x'_0}M'$ la restriction des formes de Killing B et B' à $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$. Celles-ci sont, à multiplication près par un scalaire strictement positif de la métrique de chaque facteur de de Rham de M

et M', les métriques riemanniennes originales, et le résultat s'en déduit. Soient $x, y \in M$ et montrons que $d(h(x), h(y)) = d(x, y)$. Puisque $h \circ g = \psi(g) \circ h$ pour tout $g \in G$, nous pouvons supposer que $x = x_0$. Par les propriétés des géodésiques dans les espaces symétriques, il existe $X \in \mathfrak{p}$ tel que $\exp X \cdot x_0 = y$ et $d(x_0, y) = \sqrt{B(X, X)}$. De plus,

$$h(\exp X \cdot x_0) = \psi(\exp X) \cdot x_0' = \exp(T_e\psi(X)) \cdot x_0' \,.$$

Mézalor $d(h(x_0), h(y)) = \sqrt{B'(T_e\psi(X), T_e\psi(X))} = \sqrt{B(X, X)} = d(x_0, y)$, et le résultat en découle. □

Le théorème 4.44 et la proposition 4.45 terminent la démonstration du théorème de rigidité de Mostow 4.36. □

4.5 Exercices supplémentaires

Exercice E.69 Soit M un espace symétrique à courbure sectionnelle négative ou nulle. Montrer que le centre du groupe des isométries de M est trivial.

Exercice E.70 Dans ce problème, toutes les variétés sont des variétés réelles C^∞, tous les espaces vectoriels, groupes et algèbres de Lie sont réels de dimension finie, tous les fibrés vectoriels sont des fibrés vectoriels réels C^∞. Le but de ce problème est de démontrer, d'après une idée due à Donaldson [Don], l'existence de formes compactes d'algèbres de Lie simples en utilisant la géométrie de l'espace symétrique de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, α_0 le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{R}^n$, $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $K = \mathrm{SO}(n)$, $\mathscr{E}_n$ l'espace homogène $K\backslash G$ muni d'une métrique riemannienne invariante à droite par G. Pour tous les espaces vectoriels E et F, notons $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathscr{L}(E, E; F)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E \times E$ dans F ; pour tous $g \in \mathscr{L}(E)$ et $\alpha \in \mathscr{L}(E, E; F)$, posons $\alpha \cdot g : (u, v) \mapsto \alpha(gu, gv)$, de sorte que $(g, \alpha) \mapsto \alpha \cdot g$ soit l'action à droite usuelle du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathscr{L}(E, E; F)$. Un sous-groupe H du groupe linéaire d'un espace vectoriel E *agit irréductiblement sur* E si les seuls sous-espaces vectoriels de E invariants par H sont $\{0\}$ et E. Rappelons que si E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire euclidien α, si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme linéaire de E, alors l'*adjoint* de f est l'unique élément ${}^t f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\alpha(f(u), v) = \alpha(u, {}^t f(v))$ pour tous les $u, v \in E$. Un sous-espace vectoriel F de $\mathscr{L}(E)$ sera dit *auto-adjoint* s'il est stable par passage à l'adjoint ($f \in F \Rightarrow {}^t f \in F$). Si A est un ensemble muni d'une action d'un groupe Γ, une application $F : A \to \mathbb{R}$ est dite Γ-*invariante* si $F(gx) = F(x)$ pour tous $g \in \Gamma$ et $x \in A$. Une application F d'une variété riemannienne complète M dans $\mathbb{R}$ est dite *convexe* si pour toute géodésique $c : \mathbb{R} \to M$, l'application $F \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe.

$\boxed{\text{I}}$ (1) Montrer que le fibré tangent de $\mathscr{E}_n$ est trivialisable.

(2) Montrer que l'application de $\mathscr{E}_n$ dans l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^n$, qui à la classe x de $g \in G$ dans $\mathscr{E}_n$ associe le produit scalaire $\alpha_0 \cdot g$ sur $\mathbb{R}^n$ (dit *associé* à x dans la suite), est un C^∞-difféomorphisme sur son image dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

$\boxed{\text{II}}$ Soient M une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle, $c : [0, 1] \to M$ une géodésique (paramétrée à vitesse constante) entre deux points distincts, et $x, y :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ deux courbes lisses telles que $x(0) = c(0)$

et $y(0) = c(1)$. Montrer que la dérivée de l'application $s \mapsto d(x(s), y(s))$ en $s = 0$ est égale à $\frac{1}{d(c(0),\, c(1))}\big(\langle \dot{y}(0), \dot{c}(1)\rangle_{c(1)} - \langle \dot{x}(0), \dot{c}(0)\rangle_{c(0)}\big)$. Ce résultat est-il vrai si $M = \mathbb{S}_n$?

$\boxed{\text{III}}$ Soient M une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle, H' un groupe d'isométries de M et $F : M \to \mathbb{R}$ une application C^∞ convexe H'-invariante.

(1) Montrer que s'il existe une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans M telle que $\lim_{i\to+\infty} d(x_0, x_i) = +\infty$ et $\sup_{i\in\mathbb{N}} d(x_i, gx_i) < +\infty$ pour tout $g \in H'$, alors il existe un point de $\partial_\infty M$ fixe par H'.

(2) Notons $X = \operatorname{grad} F$ le champ de vecteurs C^∞ sur M tel que

$$\forall\, x \in M,\ \ \forall\, Y \in T_xM, \quad \langle X(x), Y\rangle_x = d_xF(Y)\ .$$

Notons $(x, t) \mapsto \phi_t(x)$ le flot local de $-X$: l'application $t \mapsto \phi_t(x)$ est la solution maximale de l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} = -X \circ y$ telle que $\phi_0(x) = x$

i) Montrer que pour tout $g \in H'$, nous avons $T_xg \circ X = X \circ g$ et en déduire que $g\phi_t(x) = \phi_t(gx)$.

ii) Montrer que pour tous $x, y \in M$, l'application $t \mapsto d(\phi_t(x), \phi_t(y))$ est décroissante sur son domaine de définition.

iii) En déduire que $t \mapsto \|X(\phi_t(x))\|$ est décroissante sur son domaine de définition, et que $\phi_t(x)$ est défini pour tous $t \geq 0$ et $x \in M$.

iv) Montrer que s'il existe $x \in M$ et une suite $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels positifs convergeant vers $+\infty$ tels que $\phi_{t_i}(x)$ converge vers un point y de M, alors y est un point critique de F.

(3) En déduire que ou bien F admet un point critique, ou bien il existe un point de $\partial_\infty M$ fixe par H'.

(4) Soient H un sous-groupe de G qui agit irréductiblement sur $\mathbb{R}^n$ et $F : \mathscr{E}_n \to \mathbb{R}$ une application lisse convexe H-invariante. Montrer, en utilisant l'interprétation de $\partial_\infty\mathscr{E}_n$ en termes de drapeaux, que F admet un point critique dans $\mathscr{E}_n$.

$\boxed{\text{IV}}$ Notons $W = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ qui s'identifie avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n^3}$ par l'application $\alpha \mapsto (\alpha_{i,\,j,\,k})_{1\leq i,\,j,\,k\leq n}$ où $\alpha(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,\,j,\,k}\ e_k$. Nous munissons W du produit scalaire euclidien correspondant au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{n^3}$, et notons $\|\cdot\|$ sa norme. Notons $\rho : G \to \mathrm{GL}(W)$ l'application $g \mapsto \{\alpha \mapsto \alpha \cdot g^{-1}\}$. Fixons $\beta \in W - \{0\}$, et notons $G_\beta = \{g \in G\ :\ \beta \cdot g = \beta\}$.

(1) i) Montrer que ρ est un morphisme de groupes de Lie, et que $\rho(K)$ préserve la norme de W.

ii) Montrer que G_β est un sous-groupe de Lie plongé de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\beta$ égale à l'ensemble des $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ tels que $T_e\rho(X)(\beta) = 0$.

iii) Montrer que pour tout $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$, nous avons ${}^t\big(T_e\rho(X)\big) = T_e\rho({}^tX)$, où les adjoints sont respectivement pour les produits scalaires usuels de $\mathbb{R}^{n^3}$ et de $\mathbb{R}^n$.

(2) Considérons l'application $\widetilde{F} : G \to \mathbb{R}$ définie par $\widetilde{F}(g) = \|\rho(g)(\beta)\|^2$.

i) Montrer que $\widetilde{F}$ induit par passage au quotient une application $F : \mathscr{E}_n = K\backslash G \to \mathbb{R}$ lisse, invariante par l'action à droite de G_β.

ii) Montrer que F est convexe, en utilisant l'expression des géodésiques de $\mathscr{E}_n$ vue en cours et le fait que si $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ est auto-adjoint, alors $T_e\rho(X) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{n^3})$ l'est aussi.

iii) Montrer, en considérant les $[X, {}^tX]$ pour $X \in \mathfrak{g}_\beta$, que si $x \in \mathscr{E}_n$ est un point critique de F, alors $\mathfrak{g}_\beta$ est auto-adjoint dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ associé à x (au sens de la question I (2)).

$\boxed{\text{V}}$ Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple et $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \{D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \ : \ \forall\, X, Y \in \mathfrak{g}, \ \ D([X,Y]) = [D(X), Y)] + [X, D(Y)]\}$ la sous-algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ des endomorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$.

(1) i) Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ des automorphismes d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ est un sous-groupe de Lie plongé de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, d'algèbre de Lie $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

ii) En identifiant $\mathfrak{g}$ et $\mathbb{R}^n$, où n est la dimension de $\mathfrak{g}$, par un isomorphisme linéaire, montrer que si $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$, alors la composante neutre $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est égale à G_β (avec la notation de IV).

(2) Montrer que $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ agit irréductiblement sur $\mathfrak{g}$.

(3) Montrer qu'il existe un produit scalaire euclidien sur $\mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ soit auto-adjointe dans $\mathscr{L}(\mathfrak{g})$.

(4) i) Montrer que l'application $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ est un morphisme injectif d'algèbres de Lie. Montrer que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ est un idéal de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. En déduire que ad est surjective.

ii) En déduire que toute algèbre de Lie réelle simple admet une involution de Cartan.

Exercice E.71 Dans ce problème, toutes les variétés sont des variétés réelles C^∞, et tous les espaces vectoriels, groupes et algèbres de Lie sont réels de dimension finie.

Le but de ce problème est de démontrer que tout espace symétrique de type non compact (dont la composante neutre du groupe des isométries est sans centre comme vu dans le cours) se plonge dans l'espace symétrique des ellipsoïdes de $\mathbb{R}^N$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, de manière totalement géodésique.

Soient M un espace symétrique, G la composante neutre de son groupe des isométries, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\exp : \mathfrak{g} \to G$ l'application exponentielle de G, B la forme de Killing de G et $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ la représentation adjointe de G. Fixons un point $x_0 \in M$, notons $s_{x_0} : M \to M$ la symétrie géodésique en x_0 et $\sigma_{x_0} : G \to G$ l'automorphisme involutif $g \mapsto s_{x_0}\, g\, s_{x_0}$. Considérons la décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ associée à x_0 et identifions $\mathfrak{p}$ avec $T_{x_0}M$ par l'application $T_e\varphi_{x_0}$ où $\varphi_{x_0} : G \to M$ est l'application $g \mapsto g \cdot x_0$.

$\boxed{\text{I}}$ (1) Soit H un sous-groupe de Lie immergé de G. Montrer que l'orbite $H \cdot x_0$ de x_0 sous l'action de H est une sous-variété immergée de M.

(2) Soit N une sous-variété immergée totalement géodésique de M passant par x_0. Montrer, en utilisant l'expression du tenseur de courbure de M en x_0, que pour tous les $u, v, w \in T_{x_0}N$, nous avons $[[u, v], w] \in T_{x_0}N$.

(3) Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{p}$ tel que pour tous les $u, v, w \in F$, nous avons $[[u, v], w] \in F$.

a) Si E et E' sont deux sous-espaces vectoriels d'une algèbre de Lie, notons $[E, E']$ le sous-espace vectoriel engendré par les $[u, u']$ où $u \in E$ et $u' \in E'$. Montrer que $\mathfrak{h} = [F, F] + F$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Notons H le sous-groupe de Lie immergé connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et $N = H \cdot x_0$.

b) Montrer qu'une géodésique de M passant par x_0 et tangente à N en x_0 est de la forme $t \mapsto \exp(tX) \cdot x_0$, où $X \in F$.

c) En déduire que N est une sous-variété immergée totalement géodésique de M.

(4) Soit H un sous-groupe de Lie immergé connexe de G invariant par σ_{x_0} (c'est-à-dire tel que $\sigma_{x_0}(H) \subset H$). Notons $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H et $F = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$. Montrer que pour tous les $u, v, w \in F$, nous avons $[[u, v], w] \in F$. En déduire que l'orbite $H \cdot x_0$ est une sous-variété immergée totalement géodésique de M.

$\boxed{\text{II}}$ Dans cette partie, supposons que M est un espace symétrique de type non compact et que le centre de G est trivial. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ rendant la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ orthogonale, et qui coïncide avec B sur $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ et avec $-B$ sur $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$. Munissons $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ d'une base orthonormée $\mathscr{A}$ pour ce produit scalaire, formée d'une base de $\mathfrak{K}$ et d'une base de $\mathfrak{p}$. Pour toute application linéaire $u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, notons ${}^t u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $\mathscr{A}$ est la matrice transposée de celle de u.

(1) Notons $\mathrm{SL}(\mathfrak{g})$ le sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ des automorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$ dont la matrice dans la base $\mathscr{A}$ est de déterminant 1. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et en déduire que $\mathrm{Ad}(G)$ est contenu dans $\mathrm{SL}(\mathfrak{g})$.

(2) Montrer que $\mathrm{Ad}(G)$ est un sous-groupe auto-adjoint de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire stable par $u \mapsto {}^t u$.

(3) Notons $\mathscr{Q}$ l'espace des applications linéaires de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ dont la matrice dans la base $\mathscr{A}$ est symétrique définie positive de déterminant 1. Le groupe $\mathrm{SL}(\mathfrak{g})$ agit sur $\mathscr{Q}$ par $u \cdot q = u\, q\, {}^t u$ pour tous les $u \in \mathrm{SL}(\mathfrak{g})$ et $q \in \mathscr{Q}$.

a) Montrer que l'application $\Phi : M \to \mathscr{Q}$ définie par $g \cdot x_0 \mapsto (\mathrm{Ad}\, g)\, {}^t(\mathrm{Ad}\, g)$ pour tout $g \in G$ est bien définie, et que $\Phi(M)$ est l'orbite dans $\mathscr{Q}$ de l'application identité id par $\mathrm{Ad}(G)$.

b) Montrer que $\mathscr{Q}$ est une sous-variété de l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ et que Φ est une immersion.

Munissons $\mathscr{Q}$ de la métrique riemannienne invariante par $\mathrm{SL}(\mathfrak{g})$, qui sur l'espace tangent en id à $\mathscr{Q}$ vaut $(X, Y) \mapsto \mathrm{tr}(XY)$.

c) Montrer que $\mathrm{Ad}\, G$ est un sous-groupe de Lie immergé connexe de $\mathrm{SL}(\mathfrak{g})$ et que $\Phi(M)$ est une sous-variété immergée totalement géodésique de $\mathscr{Q}$.

d) Supposons que M est irréductible. Montrer que Φ est un plongement propre et une isométrie de M sur $\Phi(M)$, quitte à multiplier la métrique riemannienne de M par une constante strictement positive.

Exercice E.72 Dans ce problème, toutes les variétés sont des variétés réelles C^∞, et tous les groupes de Lie sont réels de dimension finie. Soient M un espace symétrique de type non compact, d sa distance riemannienne et $G = \mathrm{Isom}_0(M)$ la composante neutre de son groupe des isométries.

(1) Dans cette question, nous supposons que M est le plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. On rappelle que tout élément γ de $G - \{e\}$ est, en notant $\ell(\gamma) = \inf_{x \in M} d(\gamma x, x)$,

ou bien *elliptique*, c'est-à-dire qu'il admet un point fixe dans M (et alors $\ell(\gamma) = 0$),

ou bien *parabolique*, c'est-à-dire qu'il n'est pas elliptique et admet un unique point fixe dans $\partial_\infty M$ (et alors $\ell(\gamma) = 0$),

ou bien *hyperbolique*, c'est-à-dire qu'il n'est pas elliptique et admet exactement deux points fixes dans $\partial_\infty M$ (et alors $\ell(\gamma) > 0$ et la borne inférieure définissant $\ell(\gamma)$ est atteinte

exactement pour les points x sur la droite géodésique dans M dont les deux points à l'infini sont les deux points fixes de γ).

a) Soient H un groupe de Lie, e son élément neutre et δ une distance sur H (induisant sa topologie). Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que si $a, b \in H - \{e\}$ vérifient $\delta(a, e) < \epsilon$ et $\delta(b, e) < \epsilon$, alors $\delta(aba^{-1}b^{-1}, e) < \min\{\delta(a, e), \delta(b, e)\}$.

b) Dans le modèle du demi-plan supérieur de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, soient $\gamma_0 : z \mapsto z + 1$ et $\mathscr{F}_n = \{z \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}} \ : \ \operatorname{Im} z \geq n, \ -1/2 < \operatorname{Re} z \leq 1/2\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sup_{x \in \mathscr{F}_n} d(\gamma_0 x, x)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

c) Soient Γ un sous-goupe discret et sans torsion de G, et $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$. Montrer que si α et β commutent avec γ et si γ est hyperbolique, alors α et β commutent. On admettra que le résultat est vrai si on suppose seulement $\gamma \neq e$.

d) Soient δ une distance sur G (induisant sa topologie) et $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que pour tous les $x \in M$ et $\alpha \in G$, si $d(\alpha x, x) \leq \mu$, alors il existe $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $\delta(\alpha^n, e) < \epsilon$. En déduire qu'il existe $\mu > 0$ tel que pour tous les $x \in M$ et $\alpha, \beta \in G$, tels que le sous-groupe de G engendré par α, β soit discret et sans torsion, si $d(\alpha x, x) \leq \mu$ et $d(\beta x, x) \leq \mu$, alors α et β commutent.

Une telle constante μ s'appelle une *constante de Margulis* de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, voir [BusK] pour une généralisation.

e) Soient Γ un sous-goupe discret et sans torsion de G, $\gamma_0 \in \Gamma$ un élément parabolique de point fixe $\xi \in \partial_\infty M$ et Γ_0 le stabilisateur de ξ dans Γ. Montrer qu'il existe une horoboule HB de point à l'infini ξ telle que l'intersection $HB \cap \gamma HB$ soit vide pour tout $\gamma \in \Gamma - \Gamma_0$.

f) Soit S une variété riemannienne complète, orientable, de dimension 2, à courbure sectionnelle constante -1 et $c : [0, +\infty[\to S$ un rayon géodésique tel que le rayon d'injectivité de S au point $c(t)$ converge vers 0 quand $t \to +\infty$. Montrer qu'il existe une horoboule ouverte HB dans M, un sous-groupe discret et sans torsion Γ_0 de G préservant HB et une isométrie (sur son image) de la variété riemannienne quotient $\Gamma_0 \backslash HB$ à valeurs dans S dont l'image contient $c(t)$ pour tout t assez grand.

(2) Montrer qu'il existe un espace symétrique de type non compact M de rang au moins 2, et un élément $\gamma \in G = \operatorname{Isom}_0(M)$ tel que $\inf_{x \in M} d(\gamma x, x) > 0$ et tel que cette borne inférieure ne soit pas atteinte.

(3) Notons $x_0 \in M$, $K = \operatorname{Stab}_G x_0$, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ associée à x_0, $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}^+$ une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ et $A^+ = \exp \overline{\mathfrak{a}^+}$. Montrer que tout élément g de G s'écrit $g = kak'$ où $k, k' \in K$ et $a \in A^+$. Cette écriture est-elle unique ? Montrer qu'elle est unique sur un ouvert dense de G.

La décomposition $G = K\, A^+\, K$ s'appelle la *décomposition de Cartan* de G.

Exercice E.73 Soient M un espace symétrique de type non compact, $x_0 \in M$, $G = \operatorname{Isom}_0(M)$ la composante neutre du groupe des isométries de M, $K = \operatorname{Stab}_G(x_0)$ le stabilisateur de x_0 dans G, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\exp : \mathfrak{g} \to G$ l'application exponentielle de G, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée à x_0. Nous identifions $\mathfrak{p}$ et $T_{x_0}M$ par $T_e\varphi_{x_0}$, où $\varphi_{x_0} : g \mapsto g\, x_0$ est l'application orbitale en x_0.

(1) Montrer que si un vecteur $u \in \mathfrak{p}$ commute avec tous les éléments de $\mathfrak{p}$, alors $\operatorname{ad} u \circ \operatorname{ad} u = 0$ et donc $u = 0$.

(2) Soit H un sous-groupe de G. Supposons qu'il existe une partie compacte C dans G telle que $G = HC$ où $HC = \{hc \,:\, h \in H, c \in C\}$. Notons

$$Z_H = \{g \in G \mid \forall h \in H,\ gh = hg\}\,.$$

le centralisateur de H dans G.

a) Montrer que Z_H est un sous-groupe de Lie de G.

b) Notons $\mathfrak{z}_H$ l'algèbre de Lie de Z_H. Fixons $u \in \mathfrak{z}_H$. Soit Y le champ de vecteurs $x \mapsto \frac{d}{dt}_{|t=0}(\exp(tu)x)$. Montrer que l'application $x \mapsto \|Y(x)\|$ est invariante par H et atteint sa borne supérieure. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que si X est le champ de vecteurs $x \mapsto \frac{d}{dt}_{|t=0}(g^{-1}\exp(tu)gx)$, alors l'application $f : x \mapsto \frac{1}{2}\|X(x)\|^2$ admet un maximum en x_0. Montrer que X est un champ de Killing sur M.

c) En utilisant la formule (· 72 ·), montrer que Z_H est un groupe discret.

4.6 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.67 Ceci découle de la seconde conclusion du corollaire 3.46 et du fait qu'un groupe de Lie compact admet une métrique riemannienne bi-invariante (voir l'exemple (v) de la partie 3.1).

Schème E.69 Pour tout $x \in M$, notons s_x la symétrie géodésique en x. Si la courbure sectionnelle de M est négative ou nulle, alors x est l'unique point fixe de s_x (si $y \neq x$ est un autre point fixe de s_x, alors l'unique segment géodésique entre x et y est fixe par s_x, ce qui contredit le fait que x est un point fixe isolé de s_x). Si $g \in Z(G)$, alors pour tout $x \in M$, nous avons $g(x) = g(s_x(x)) = s_x(g(x))$, donc g fixe x, et g vaut l'identité.

Schème E.70 (1) Par la décomposition polaire, l'espace homogène $K\backslash G$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$, qui est contractile. Or tout fibré vectoriel de base contractile est trivialisable.

(2) L'action linéaire $(g, \alpha) \mapsto \alpha \cdot g$ du groupe de Lie G sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ est C^∞ (car polynomiale), et le stabilisateur de $\alpha_0 : (u, v) \mapsto \sum_{i=1}^n u_i v_i$ est exactement le groupe K. L'orbite $\alpha_0 \cdot G$ est le sous-espace des produits scalaires dont la matrice dans la base canonique est de déterminant 1, qui est l'ouvert des matrices définies positives dans le sous-espace fermé des matrices symétriques de déterminant 1. Donc $\alpha_0 \cdot G$ est localement fermée. Par un résultat du cours, $\alpha_0 \cdot G$ est une sous-variété C^∞ et l'application orbitale $g \mapsto \alpha_0 \cdot g$ induit par passage au quotient un C^∞-difféomorphisme de $K\backslash G$ (car l'action est à droite) sur son image $\alpha_0 \cdot G$.

$\boxed{\text{II}}$ C'est une conséquence immédiate de la formule de la variation première. Par les propriétés d'existence, unicité et régularité de la géodésique (paramétrée par $[0, 1]$) entre deux points de M (vu les hypothèses sur M), il existe une famille lisse d'applications de $[0, 1] \times]-\epsilon, +\epsilon[$ dans M, notée $(t, s) \mapsto c_s(t)$ telle que $c_0 = c$ et $t \mapsto c_s(t)$ soit une géodésique (paramétrée à vitesse constante) de $x(s)$ à $y(s)$. En posant $f(s) = d(x(s), y(s)$, nous avons donc

$$f(s) = \int_0^1 \langle \dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t)\rangle^{\frac{1}{2}}\, dt\,.$$

D'où en dérivant et en utilisant les propriétés de la dérivation de Levi-Civita (la métrique est parallèle et la torsion est nulle) et le fait que le vecteur vitesse d'une géodésique est parallèle le long de cette géodésique,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \int_0^1 \frac{d}{ds}\langle \dot c_s(t), \dot c_s(t)\rangle^{\frac12}\, dt\ _{|s=0} = \frac{1}{\|\dot c_0(0)\|}\int_0^1 \Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\Big\rangle\, dt\ _{|s=0} \\ &= \frac{1}{d(c(0),c(1))}\int_0^1 \Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\Big\rangle\, dt\ _{|s=0} = \frac{1}{d(c(0),c(1))}\int_0^1 \frac{d}{dt}\Big\langle \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\Big\rangle\, dt\ _{|s=0} \\ &= \frac{1}{d(c(0),\, c(1))}\big(\langle \dot y(0), \dot c(1)\rangle_{c(1)} - \langle \dot x(0), \dot c(0)\rangle_{c(0)}\big)\ . \end{aligned}$$

Voici une autre méthode. Supposons que $d(c(0),c(1)) < r = \mathrm{inj}_M(c(0))$. Alors $\exp_{c(0)} : B(0,r) \to B(c(0),r)$ est un C^∞-difféomorphisme, $c(t) = \exp_{c(0)}(tu)$, et au premier ordre $x(t) = \exp_{c(0)}(tv)$, $y(t) = \exp_{c(0)}(u+tw)$. Au premier ordre, exp est une isométrie par le lemme de Gauss, donc on se ramène au cas euclidien, où le résultat est immédiat.

$\boxed{\text{III}}$ (1) La compactification géométrique $\overline{M}^{\mathrm{geo}} = M \cup \partial_\infty M$ étant métrisable compacte, quitte à extraire, la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un point ξ, qui appartient à $\partial_\infty M$ car $\lim_{i\to+\infty} d(x_0,x_i) = +\infty$. Montrons que ξ est fixé par H'. En effet, pour tout $g \in H'$, puisque gx_i reste à distance bornée de x_i et puisque la distance de x_i à x_0 tend vers $+\infty$, puisque M est un espace CAT(0), par comparaison avec un triangle du plan euclidien, les géodésiques de x_0 à x_i et de x_0 à gx_i restent très proches pendant très longtemps, donc gx_i converge aussi vers ξ. Or l'action du groupe des isométries de M s'étend continûment à la compactification géométrique : la suite $(gx_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $g\xi$. Ceci montre que $\xi = g\xi$.

(2) i) Pour tous les $x \in M$ et $Y \in T_xM$, puisque g est une isométrie et puisque F est invariante par g, nous avons

$$\begin{aligned} \langle T_xg(X(x)), T_xg(Y)\rangle_{gx} &= \langle X(x), Y\rangle_x = d_xF(Y) = d_x(F\circ g)(Y) = d_{gx}F(T_xg(Y)) \\ &= \langle X(gx), T_xg(Y)\rangle_{gx}\ . \end{aligned}$$

D'où $T_xg(X(x)) = X(gx)$. Donc les applications $t \mapsto g\phi_t(x)$ et $t \mapsto \phi_t(gx)$, qui coïncident en $t=0$ et sont solutions maximales d'une même équation différentielle du premier ordre, sont égales.

ii) Si $\phi_t(x) = \phi_t(y)$ alors par unicité locale des solutions d'une équation différentielle du premier ordre, les applications $s \mapsto \phi_s(x)$ et $s \mapsto \phi_s(y)$ ont les mêmes domaines de définition et sont égales, auquel cas le résultat est immédiat.

Sinon, par la question II, l'application $t \mapsto d(\phi_t(x), \phi_t(y))$ est lisse, et sa dérivée en $t = t_0$ vérifie, si $c : [0,1] \to M$ est la géodésique entre $c(0) = \phi_{t_0}(x)$ et $c(1) = \phi_{t_0}(y)$,

$$\begin{aligned} d(c(1),c(0))\ \frac{d}{dt}_{|t=t_0} d(\phi_t(x),\phi_t(y)) &= \big\langle -X(c(1)), \dot c(1)\big\rangle_{c(1)} - \big\langle -X(c(0)), \dot c(0)\big\rangle_{c(0)} \\ &= d_{c(0)}F(\dot c(0)) - d_{c(1)}F(\dot c(1))\ , \end{aligned}$$

qui est négatif ou nul, car l'application $F\circ c$ étant convexe, sa dérivée est croissante (car sa dérivée seconde est positive ou nulle).

iii) En prenant $y = \phi_\epsilon(x)$ et en faisant tendre ϵ vers 0, l'application $t \mapsto \|X(\phi_t(x))\|$ est donc décroissante. En particulier, la courbe intégrale $t \mapsto \phi_t(x)$ sur $[0,T]$, de norme de vitesse bornée, reste dans un borné de la variété. Puisque M est complète, elle reste

dans un compact, et le théorème de non explosion en temps fini des solutions d'équations différentielles du premier ordre montre que les courbes intégrales sont définies en tout temps positif.

iv) L'application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $t \mapsto F(\phi_t(x))$ est lisse, et sa dérivée est

$$\frac{d}{dt}\Big(F(\phi_t(x))\Big) = d_{\phi_t(x)}F\big(\frac{d}{dt}\phi_t(x)\big) = \big\langle X(\phi_t(x)), -X(\phi_t(x))\big\rangle_{\phi_t(x)} \leq 0 \ .$$

Donc $t \mapsto F(\phi_t(x))$ est décroissante, et même strictement décroissante tant que $X(\phi_t(x))$ ne s'annule pas. Puisque $\phi_{t_i}(x)$ converge vers y, nous avons donc $X(y) = 0$, et donc $d_yF = 0$ (car $d_yF(Y) = \langle X(y), Y\rangle_y$ pour tout $Y \in T_yM$). Donc y est un point critique de F.

(3) Soit $x \in M$. Si F n'a pas de point critique, alors la suite de points $x_i = \phi_i(x)$ part à l'infini. De plus, par la question (2) i), nous avons $d(x_i, gx_i) = d(\phi_i(x), g\phi_i(x)) = d(\phi_i(x), \phi_i(gx))$, qui reste borné par la question (2) ii). Le résultat découle alors de la question (1).

(4) L'application $g \mapsto g^{-1}$ envoie une métrique riemannienne invariante à gauche sur G/K sur une métrique riemannienne invariante à droite sur $K\backslash G$. Par le cours, l'espace homogène $K\backslash G$ muni de n'importe quelle métrique riemannienne invariante à droite (elles sont toutes homothétiques) est un espace symétrique de type non compact, donc une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle. Par la question (3) appliquée avec $M = \mathscr{E}_n$ et H' l'image de H par l'application $G \to \mathrm{Isom}(M)$ (de noyau $\{\pm \mathrm{id}\}$), si F n'admet pas de point critique dans $\mathscr{E}_n$, alors il existe un point à l'infini de $\mathscr{E}_n$ qui est invariant par H. Par la description du bord de $\mathscr{E}_n$ en terme de drapeaux vue en travaux dirigés, le groupe H laisse donc invariant un drapeau non trivial de $\mathbb{R}^n$, ce qui contredit le fait qu'il agisse irréductiblement.

$\boxed{\text{IV}}$ (1) i) Il est immédiat que ρ est un morphisme de groupes (car $(g,\alpha) \mapsto \alpha \cdot g$ est une action à droite), et qu'il est lisse, car les coefficients de $\rho(g)$ sont polynomiaux en les coefficients de g^{-1} : un petit calcul (utilisant que $g(e_i) = \sum_{p=1}^n g_{pi}\, e_p$) montre que

$$(\alpha \cdot g)_{i,\,j,\,k} = \sum_{1\leq p,\,q\leq n} g_{pi}\ \alpha_{p,\,q,\,k}\ g_{qj}\ .$$

Si $k \in K$ et $\alpha \in W$, alors puisque ${}^tk = k^{-1}$ (donc $\sum_{i=1}^n (k^{-1})_{pi}(k^{-1})_{p'i}$ vaut 1 si $p = p'$ et 0 sinon, pour $1 \leq p, p' \leq n$), nous avons

$$\begin{aligned}
\|\rho(k)(\alpha)\|^2 = \|\alpha \cdot k^{-1}\|^2 &= \sum_{1\leq i,j,k\leq n} \Big(\sum_{1\leq p,\,q\leq n} (k^{-1})_{pi}\ \alpha_{p,\,q,\,k}\ (k^{-1})_{qj}\Big)^2 \\
&= \sum_{1\leq i,\,j,\,k,\,p,\,q,\,p',\,q'\leq n} (k^{-1})_{pi}\ \alpha_{p,\,q,\,k}\ (k^{-1})_{qj}(k^{-1})_{p'i}\ \alpha_{p',\,q',\,k}\ (k^{-1})_{q'j} \\
&= \sum_{1\leq p,\,q,\,k\leq n} (\alpha_{p,\,q,\,k})^2 = \|\alpha\|^2\ ,
\end{aligned}$$

et $\rho(K)$ préserve la norme de W.

Voici une autre méthode. Pour toute base orthonormée $(f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$, nous avons $\|\alpha\|^2 = \sum_{1\leq i,\,j\leq n} \|\alpha(f_i, f_j)\|^2$, qui ne dépend pas de cette base orthonormée. Or le n-uplet $(ge_1, \ldots, ge_n)$ est aussi une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ si $g \in K$, donc

$$\|\alpha \cdot g\|^2 = \sum_{1\leq i,\,j\leq n} \|\alpha(ge_i, ge_j)\|^2 = \|\alpha\|^2\ .$$

ii) Comme G_β est le stabilisateur de β par l'action lisse de G sur W, c'est un sous-groupe de Lie plongé. Un élément X de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ appartient à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\beta$ de G_β si et seulement si $\exp(tX) \in G_\beta$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si et seulement si $\rho(\exp(tX))(\beta) = \beta$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $\rho\big(\exp(tX)\big) = \exp\big(tT_e(\rho(X))\big)$ par les propriétés de l'exponentielle, et puisque l'évaluation en β est linéaire, la dernière assertion de ii) en découle.

iii) Soient $\alpha, \gamma \in W$. Pour tout $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$, puisque

$$\rho(\exp tX)(\alpha) : (u, v) \mapsto \alpha(\exp(-tX)u, \exp(-tX)v) \ ,$$

nous avons

$$T_e\rho(X)(\alpha) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \rho(\exp tX)(\alpha) : (u, v) \mapsto -\ \alpha(Xu, v) - \alpha(u, Xv) \ .$$

En notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien de W correspondant à celui de $\mathbb{R}^{n^3}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle T_e\rho(X)(\alpha), \gamma\rangle &= -\sum_{1\le i,\,j,\,k\le n} \Big(\sum_{p=1}^{n} X_{pi}\alpha_{p,\,j,\,k} + \alpha_{i,\,p,\,k}X_{pj}\Big)\gamma_{i,\,j,\,k} \\
&= -\sum_{1\le i,\,j,\,k,\,p\le n} X_{pi}\alpha_{p,\,j,\,k}\gamma_{i,\,j,\,k} + \sum_{1\le i,\,j,\,k,\,p\le n} \alpha_{i,\,p,\,k}X_{pj}\gamma_{i,\,j,\,k} \\
&= -\sum_{1\le i,\,j,\,k\le n} \alpha_{i,\,j,\,k}\Big(\sum_{p=1}^{n} {}^tX_{pi}\gamma_{p,\,j,\,k} + \gamma_{i,\,p,\,k}\,{}^tX_{pj}\Big) \\
&= \langle \alpha, T_e\rho({}^tX)(\gamma)\rangle \ ,
\end{aligned}$$

en faisant dans la deuxième ligne un changement d'indice $(p, i, j, k) \mapsto (i, p, j, k)$ dans la première des deux sommes, et $(p, i, j, k) \mapsto (j, i, p, k)$ dans la seconde.

(2) i) Pour tous $k \in K, g \in G, h \in G_\beta$, puisque $\rho(k)$ préserve la norme de W par (1) i) et puisque $\rho(h)$ fixe β, nous avons

$$\widetilde{F}(kgh) = \|\rho(kgh)(\alpha)\|^2 = \|\rho(k) \circ \rho(g) \circ \rho(h)(\beta)\|^2 = \|\rho(g)(\beta)\|^2 = \widetilde{F}(g) \ .$$

L'application $\widetilde{F}$ est lisse (comme composition d'applications lisses). Par ce qui précède, elle passe donc au quotient en une application $F : \mathscr{E}_n = K\backslash G \to \mathbb{R}$ lisse (par les propriétés des espaces homogènes), invariante par l'action à droite de G_β.

ii) Rappelons (toujours en utilisant $g \mapsto g^{-1}$) que, par le cours, les géodésiques de l'espace symétrique $\mathscr{E}_n$ sont, en notant $x_0 = Ke$ le point base usuel de $\mathscr{E}_n$, les courbes de la forme $t \mapsto x_0 \cdot (\exp(tX)g)$ où $g \in G$ et X est une matrice symétrique de trace nulle. Par (1) iii), la matrice de l'endomorphisme $T_e\rho(X)$ de W est aussi auto-adjointe pour le produit scalaire de W, donc diagonalisable, de valeurs propres λ_i pour $1 \le i \le n^3$, dans une base orthonormée de W. En notant $(w_i)_{1\le i\le n^3}$ les coordonnées de $\rho(g)(\beta)$ dans cette base, nous avons donc

$$\begin{aligned}
F(x_0 \cdot (\exp(tX)g)) &= \widetilde{F}(\exp(tX)g) = \|\rho(\exp tX)\big(\rho(g)(\beta)\big)\|^2 \\
&= \|\exp(tT_e\rho(X))\big(\rho(g)(\beta)\big)\|^2 = \sum_{1\le i\le n^3} \exp(2t\lambda_i)\ {w_i}^2 \ .
\end{aligned}$$

Ceci est clairement une fonction convexe.

iii) Quitte à remplacer β par $\rho(g_0)(\beta)$ où $x = x_0 \cdot g_0$, nous pouvons supposer que F admet un point critique au point $x_0 = Ke$, donc que $\widetilde{F}$ admet un point critique en e. En notant toujours $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien de W correspondant à celui de $\mathbb{R}^{n^3}$, par définition de $\widetilde{F}$, nous avons donc, pour tout $Y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle T_e\rho(Y)(\beta), \beta \rangle = 0 \ .$$

Puisque $T_e\rho$ est un morphisme d'algèbres de Lie, et par la question (1) iii),

$$\begin{gathered} T_e\rho([X, {}^tX]) = [T_e\rho(X), T_e\rho({}^tX)] = [T_e\rho(X), {}^tT_e\rho(X)] = \\ T_e\rho(X) \circ {}^tT_e\rho(X) - {}^tT_e\rho(X) \circ T_e\rho(X) \ . \end{gathered}$$

D'où

$$0 = \langle T_e\rho([X, {}^tX])(\beta), \beta \rangle = \| {}^tT_e\rho(X)(\beta)\|^2 - \|T_e\rho(X)(\beta)\|^2 \ .$$

En particulier, si X appartient à $\mathfrak{g}_\beta$, alors $T_e\rho(X)(\beta) = 0$ par la question (1) ii), donc $T_e\rho({}^tX)(\beta) = {}^tT_e\rho(X)(\beta) = 0$, et ${}^tX$ appartient à $\mathfrak{g}_\beta$.

$\boxed{\text{V}}$ (1) i) Ceci a déjà été vu dans l'exercice E.18.

ii) Par définition, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est le stabilisateur de β dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ est une forme bilinéaire non dégénérée, car son noyau, égal au centre de $\mathfrak{g}$, est trivial. En notant A la matrice de ce crochet de Lie dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, nous avons donc $\det(A) \neq 0$. Si $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, nous avons ${}^tgAg = A$, donc $\det(g)^2 \det(A) = \det(A)$ et $\det(g) = \pm 1$. Par continuité du déterminant, il en découle que $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ est contenu dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, d'où le résultat car G_β est le stabilisateur de β dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

(2) Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ non nul invariant par $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$. Rappelons que pour tous les $X \in \mathfrak{g}$ et $t \in \mathbb{R}$, nous avons $\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ et $\exp(t\,\mathrm{ad}(X)) \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$. Puisque $\exp(t\,\mathrm{ad}(X))(U) \subset U$, en dérivant en $t = 0$ (en prenant des bases), nous avons $\mathrm{ad}(X)(U) \subset U$, donc U est un idéal non nul de $\mathfrak{g}$. Puisque $\mathfrak{g}$ est simple, nous avons $U = \mathfrak{g}$, ce qui montre le résultat.

(3) Ceci découle de IV 2) iii) appliqué en prenant pour β le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ (qui est non nul car $\mathfrak{g}$ est non abélienne) et de III (4) appliqué à $H = G_\beta$, par (2) ci-dessus.

(4) Quitte à changer l'identification de $\mathfrak{g}$ et de $\mathbb{R}^n$, nous pouvons supposer que le produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ construit dans la question précédente est le produit scalaire usuel.

i) L'application $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'algères de Lie, d'image contenue dans $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ par le cours (c'est une conséquence de l'identité de Jacobi). Son noyau, qui est un idéal de $\mathfrak{g}$, est trivial, car $\mathfrak{g}$ est simple (donc non abélien).

Si $X \in \mathfrak{g}$ et $\xi \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, alors par définition d'une dérivation, nous avons

$$[\mathrm{ad}(X), \xi] = \mathrm{ad}_{\xi(X)} \ .$$

Donc l'image de ad est un idéal de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

La forme bilinéaire $B'(X, Y) = \mathrm{tr}(X \circ Y)$ sur $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est symétrique (par les propriétés de la trace) et non dégénérée (car $B'(X, {}^tX) = \sum_{1 \leq i,\, j \leq n} {X_{ij}}^2$ si $(X_{ij})_{1 \leq i,\, j \leq n}$

est la matrice de X dans une base orthonormée de $\mathfrak{g}$, et puisque $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ contient l'adjoint ${}^tX$ de X). Puisque

$$B'([X,Y],Z) = -B'(Y,[X,Z])$$

par les propriétés de la trace (c'est la démonstration qui montre que la forme de Killing est ad-alternée), l'orthogonal $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ de $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ dans $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ est un idéal de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Comme $X \mapsto -{}^tX$ est un automorphisme d'algèbres de Lie de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, le sous-espace ${}^t\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \{{}^t\mathrm{ad}\, X \ : \ X \in \mathfrak{g}\}$ est aussi un idéal de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Supposons que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \cap {}^t\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ soit non nul, et soient $X, Y \in \mathfrak{g}$ tels que $\mathrm{ad}\, X = {}^t\mathrm{ad}(Y) \neq 0$. Alors l'élément $\xi = \mathrm{ad}(X+Y)$ ou l'élément $\xi = \mathrm{ad}(X-Y)$ vérifie $\xi \in \mathrm{ad}\,\mathfrak{g} - \{0\}$ et ${}^t\xi = \pm\xi$. Donc $B'(\xi,\xi) = \pm B'(\xi, {}^t\xi) \neq 0$ et B' n'est pas nulle sur $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$. Donc l'idéal $I = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ n'est pas égal à tout $\mathfrak{g}$, donc est nul.

Il en découle que si $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ était un idéal propre de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, alors l'idéal $\mathfrak{b} = {}^t\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ ou l'idéal $\mathfrak{b} = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ rencontrerait $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ en $\{0\}$. Mézalor pour tout ξ non nul dans cet idéal, nous aurions $[\xi, \mathrm{ad}\, X] = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, ce qui signifie que $\mathrm{ad}\,\xi(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, donc puisque le noyau de ad est nul, que ξ est la dérivation nulle, contradiction.

ii) L'application $\theta' : X \to -{}^tX$ de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dans lui-même est un automorphisme d'algèbres de Lie involutif, donc diagonalisable. Puisqu'il préserve $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, nous avons donc $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{K}' \oplus \mathfrak{p}'$, où $\mathfrak{K}', \mathfrak{p}'$ sont les intersections avec $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ des sous-espaces vectoriels des matrices antisymétriques et symétriques, respectivement. Notons que B' est définie négative sur $\mathfrak{K}'$ et définie positive sur $\mathfrak{p}'$.

Alors $(X,Y) \mapsto B'(\mathrm{ad}\, X, \mathrm{ad}\, Y)$ est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et $\theta = \mathrm{ad}^{-1} \circ \theta'_{|\mathrm{Der}(\mathfrak{g})} \circ \mathrm{ad}$ est un automorphisme d'algèbres de Lie involutif de $\mathfrak{g}$, tel que la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ soit définie négative et définie positive sur les sous-espaces propres pour les valeurs propres $+1$ et -1 respectivement, c'est-à-dire que θ est une involution de Cartan.

Schème E.71 $\boxed{\text{I}}$ (1) Le groupe H agit de manière lisse sur M, donc le stabilisateur H_{x_0} de x_0 dans H est un sous-groupe de Lie plongé de H. L'application orbitale φ_{x_0} restreinte à H induit donc par passage au quotient une application injective lisse de la variété homogène quotient H/H_{x_0} dans M, d'image $H \cdot x_0$. Cette application est clairement une immersion en eH, donc une immersion en tout point par homogénéité.

(2) Puisque N est totalement géodésique dans M, si X, Y et Z sont des champs de vecteurs dans M tangents à N en tout point de N, alors $[X,Y]$ et $\nabla_X Y$ le sont aussi. Donc le tenseur de courbure de N est la restriction à N du tenseur de courbure R de M : le champ de vecteurs $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ est tangent à N en tout point de N. Donc pour tous les $u, v, w \in T_{x_0}N$, par la formule vue en cours du tenseur de courbure d'un espace symétrique, nous avons $[[u,v],w] = -R(u,v)w \in T_{x_0}N$.

(3) a) Pour tous les $u, v, u', v' \in F$, nous avons $[u,v] \in [F,F] \subset \mathfrak{h}$, $[[u,v],u'] \in F \subset \mathfrak{h}$ par l'hypothèse, et par l'identité de Jacobi $[[u,v],[u',v']] = [u',[[u,v],v']] - [v',[[u,v],u']] \in [F,F] \subset \mathfrak{h}$. Donc $\mathfrak{h}$, qui est l'espace vectoriel engendré par les $[u,v] + w$ lorsque u, v, w parcourent F, est bien une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

b) Nous savons par le cours que les géodésiques de M passant par x_0 sont de la forme $t \mapsto \exp(tX) \cdot x_0$ où $X \in \mathfrak{p}$. Comme l'espace tangent à N en x_0 est $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = F$ car $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{K}$, nous avons le résultat.

c) Toute géodésique de M passant par x_0 et tangente à N en x_0 est donc contenue dans N. Comme le groupe d'isométries H de M agit transitivement sur N, nous en déduisons que le résultat est vrai en tout point, donc que N est totalement géodésique.

(4) Notons $\theta = T_e\sigma_{x_0} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ l'involution de Cartan associée à x_0, dont les espaces propres pour les valeurs propres $+1$ et -1 sont $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{p}$ par définition de la décomposition de Cartan. Puisque H est invariant par σ_{x_0}, son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est invariante par θ, donc $\mathfrak{h} = (\mathfrak{K} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})$. Par les relations de crochet vérifiées par la décomposition de Cartan, pour tous les $u, v, w \in F$, nous avons $[[u, v], w] \in \mathfrak{h}$ puisque $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie, et $[[u, v], w] \in [[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{p}] \subset [\mathfrak{K}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, donc $[[u, v], w] \in F = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$.

Notons $\mathfrak{h}' = [F, F] + F$, qui est contenu dans $\mathfrak{h}$. L'orbite de x_0 par le sous-groupe de Lie immergé connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}'$ est la même que celle de H, par connexité de H et puisque $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie du stabilisateur de x_0 dans G. Le résultat découle donc de la question (2).

$\boxed{\text{II}}$ (1) Notons $\mathscr{A} = (e_1, \ldots, e_n)$ et soit $\epsilon_i = B(e_i, e_i) \in \{\pm 1\}$. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, nous avons

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i B(\operatorname{ad} X(e_i), e_i) = 0$$

car B est ad-alternée. Donc la matrice de $\operatorname{Ad}(\exp(X)) = e^{\operatorname{ad} X}$ dans la base $\mathscr{A}$ est de déterminant 1, car $\det(e^Y) = e^{\operatorname{tr} Y}$ pour toute matrice carrée Y. Donc $\operatorname{Ad}(G)$, qui est engendré par $\exp(\operatorname{ad}(\mathfrak{g})) = e^{\operatorname{ad}(\mathfrak{g})}$ car $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre de Lie de $\operatorname{Ad}(G)$, est contenu dans $\operatorname{SL}(\mathfrak{g})$.

(2) Puisque B est ad-alterné, $\operatorname{ad}(\mathfrak{K})$ est composé d'endomorphismes anti-symétriques de $\mathfrak{g}$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et $\operatorname{ad}(\mathfrak{p})$ est composé d'endomorphismes symétriques. Donc $\operatorname{ad}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ad}(\mathfrak{K}) + \operatorname{ad}(\mathfrak{p})$ est invariant par l'application $u \mapsto {}^t u$. Donc $\operatorname{Ad}(G)$, qui est engendré par $e^{\operatorname{ad}(\mathfrak{g})}$, est auto-adjoint, car $e^{{}^t Y} = {}^t(e^Y)$ pour toute matrice carrée Y.

(3) a) Notons K le stabilisateur de x_0 dans G. Le groupe $\operatorname{Ad} K$ d'automorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$ préserve le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, car la forme de Killing B est Ad-invariante, et puisque $\operatorname{Ad} K$ préserve $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{p}$ par les propriétés de la décomposition de Cartan. Donc $\operatorname{Ad} K$ est formé d'éléments u tels que $u^{-1} = {}^t u$, et la valeur de $\Phi(x)$ ne dépend pas du choix de $g \in G$ tel que $x = g \cdot x_0$ (qui existe car nous avons vu que G agit transitivement sur M). Il est immédiat que $\Phi(M)$ est contenue dans $\mathscr{Q}$, car si $X \in \operatorname{SL}_N(\mathbb{R})$, alors $X\, {}^t X$ est symétrique, définie positive, de déterminant 1. Donc Φ est bien définie. Par construction, $\Phi(M)$ est l'orbite dans $\mathscr{Q}$ de l'application identité id par $\operatorname{Ad}(G)$.

b) L'inverse de l'isomorphisme linéaire qui à un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ associe sa matrice dans la base $\mathscr{A}$ envoie l'espace $\mathscr{E}_n$ des ellipsoïdes de volume 1 de $\mathfrak{g}$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathscr{Q}$, donc $\mathscr{Q}$ est une sous-variété de l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathfrak{g}$.

Puisque l'application Φ est G équivariante pour les actions lisses de G sur M et sur $\mathscr{Q}$, et que l'action de G sur M est transitive, il suffit de montrer que Φ est une immersion en x_0. Puisque les géodésiques de M d'origine x_0 sont les courbes $s \mapsto \exp(sX) \cdot x_0$ où $X \in \mathfrak{p}$, pour tous les $v, w \in T_{x_0} M$, il existe $X, Y \in \mathfrak{p}$ tels que

$$v = \frac{d}{ds}_{|s=0} \exp(sX) \cdot x_0 \quad \text{et} \quad w = \frac{d}{dt}_{|s=0} \exp(sY) \cdot x_0 \ .$$

Donc $T_{x_0}\Phi(v) = \frac{d}{ds}_{|s=0} \big(\operatorname{Ad}(\exp(sX)) \big)\ {}^t\big(\operatorname{Ad}(\exp(sX)) \big)$. Or

$$\operatorname{Ad}(\exp(sX))\ {}^t\operatorname{Ad}(\exp(sX)) = e^{\operatorname{ad} sX}\ e^{{}^t\operatorname{ad}(sX)} = e^{\operatorname{ad}(2sX))} \ ,$$

car $\operatorname{ad}\mathfrak{p}$ est formé d'endomorphismes symétriques. D'où $T_{x_0}\Phi(v) = 2\operatorname{ad}X$. Par conséquent, si $T_{x_0}\Phi(v) = T_{x_0}\Phi(w)$, alors $\operatorname{ad}X = \operatorname{ad}Y$, donc $\operatorname{Ad}(\exp tX) = e^{\operatorname{ad}tX} = e^{\operatorname{ad}tY} = \operatorname{Ad}(\exp tY)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque G est sans centre, le morphisme Ad est injectif, donc $\exp tX = \exp tY$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'où en dérivant $X = Y$. Puisque la différentielle de Φ en tout point est injective, ceci montre que Φ est une immersion.

c) Puisque G est sans centre, le morphisme de groupes de Lie $\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{GL}(\mathfrak{g})$ est une immersion injective, donc $\operatorname{Ad}G$ est un sous-groupe de Lie immergé connexe, car G est connexe.

Posons $\sigma_{\mathrm{id}} = u \mapsto {}^t u^{-1}$. D'après le cours, la variété riemannienne $\mathscr{Q}$ (identifiée à $\mathscr{E}_n$ comme ci-dessus) est un espace symétrique. De plus σ_{id} est l'automorphisme involutif de $\operatorname{SL}(\mathfrak{g})$ dont l'application tangente à l'identité est l'involution de Cartan de son algèbre de Lie associée au choix de point base l'endomorphisme identité id. Le sous-groupe de Lie immergé connexe $H = \operatorname{Ad}(G)$ est invariant par σ_{id} par la question (2). Par construction, $\Phi(M)$ est l'orbite de id par l'action de $\operatorname{Ad}G$ sur $\mathscr{Q}$ définie par $u \cdot q = u\, q\, {}^t u$ pour tous les $u \in \operatorname{SL}(\mathfrak{g})$ et $q \in Q$. Par la question I (4), $\Phi(M)$ est donc totalement géodésique.

d) Par homogénéité, puisque l'application Φ est équivariante pour l'action de G sur M et l'action de G sur $\mathscr{Q}$ définie par $g \cdot q = \operatorname{Ad}g\ \ q\ {}^t\operatorname{Ad}g$, il suffit de montrer que $T_{x_0}\Phi$ est une homothétie entre les espaces vectoriels euclidiens $T_{x_0}M = \mathfrak{p}$ et $T_{\mathrm{id}}\mathscr{Q}$. Puisque M est irréductible, il découle du cours qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tous les X, Y dans $\mathfrak{p}$, nous avons $\langle X, Y\rangle = \alpha B(X, Y) = \alpha \operatorname{tr}(\operatorname{ad}X \circ \operatorname{ad}Y)$. Comme $T_{x_0}\Phi$ est l'application $X \mapsto 2\operatorname{ad}X$ comme vu ci-dessus et puisque le produit scalaire sur $T_{\mathrm{id}}\mathscr{Q}$ est $(U, V) \mapsto \operatorname{tr}UV$, le résultat en découle.

Schème E.72 (1) a) Dans une carte locale en e, ceci découle immédiatement du fait que $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ est du second ordre en a et b proches de l'élément neutre.

b) Pour tout $z \in \mathscr{F}_n$, puisque $c : [0, 1] \to \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ défini par $t \mapsto z + t$ est un chemin C^1 de z à $\gamma_0 z$, nous avons

$$d(\gamma_0 z, z) \leq \int_0^1 \frac{|\dot{c}(t)|}{\operatorname{Im} c(t)}\, dt \leq \frac{1}{n}\ .$$

c) Puisque Γ est discret et sans torsion, tout élément de $\Gamma - \{e\}$ est parabolique ou hyperbolique, et nous savons que Γ agit librement et proprement sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$.

Si γ est hyperbolique, notons $\{\xi, \eta\}$ sa paire de points fixes. Si les éléments α et β commutent avec γ, ils préservent cette paire de point fixe, donc la géodésique entre ces points fixes. Puisqu'un groupe discret d'isométries de $\mathbb{R}$ est cyclique infini ou diédral infini, et par absence d'éléments de torsion, le stabilisateur de $\{\xi, \eta\}$ est donc cyclique infini, et en particulier abélien, ce qui montre le résultat.

Si γ est parabolique, notons ξ son unique point fixe. Si les éléments α et β commutent avec γ, ils fixent aussi ξ. Si par l'absurde α est hyperbolique, quitte à le remplacer par son inverse, nous pouvons supposer que ξ est le point fixe attractif de α sur $\partial_\infty \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Soit x_0 un point de l'axe de translation de α. La distance $d(\alpha^{-n}\gamma\alpha^n x_0, x_0)$ est strictement décroissante vers 0, par les propriétés des isométries hyperboliques (qui translatent le long de leur axe de translation en préservant la distance à celui-ci) et paraboliques (qui par la question b) bougent d'une quantité décroissant strictement vers 0 un point qui converge vers son point fixe le long d'une géodésique fixée arrivant à ce point fixe), ce qui contredit le fait que l'action de Γ est proprement discontinue. Donc α, qui ne peut être elliptique car Γ est discret et sans torsion, vaut l'identité ou est parabolique. De même, β vaut l'identité

ou est parabolique. Le sous-groupe des éléments paraboliques ou l'identité de G fixant ξ est isomorphe à $\mathbb{R}$ (il agit librement et transitivement sur une horosphère centrée en ξ, qui est homéomorphe à $\mathbb{R}$, et même isométrique pour la métrique riemannienne induite, comme il est immédiat de voir en prenant le modèle du demi-plan supérieur et son point à l'infini). Puisqu'un groupe discret de $\mathbb{R}$ est cyclique infini, et en particulier abélien, le résultat en découle.

d) Nous pouvons supposer que $\alpha, \beta \in G - \{e\}$. Rappelons que le groupe d'isotropie d'un point de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ est compact, et que $\mathrm{Isom}_0(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}})$ est un fibré localement trivial de fibre $\mathrm{SO}(2)$ au dessus de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Il existe donc une constante $\mu > 0$ telle que si $\gamma \in \mathrm{Isom}_0(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}})$ bouge un point x de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ de moins de μ, alors une puissance strictement positive de γ est à distance pour δ au plus ϵ de e, pour δ et ϵ comme dans la question a). Cette constante μ ne dépend pas de x par homogénéité de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Puisque Γ est discret, notons γ_0 un élément de $\Gamma - \{0\}$ à distance pour δ minimale de e. Soient α et β comme dans l'énoncé, et $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$ tels que $\delta(\alpha^n, e), \delta(\beta^m, e) < \epsilon$. Par la question a) appliquée à $H = G$, si α^n ne commute pas avec γ_0, alors $\alpha^n \gamma_0 \alpha^{-n} \gamma_0^{-1}$ est un élément de $\Gamma - \{0\}$ à distance de e strictement inférieure à celle de γ_0, ce qui n'est pas possible par la construction de γ_0. Donc α et β commutent avec α^n et β^m respectivement, donc avec γ_0. Par conséquent, ils commutent entre eux par la question c).

e) Prenons pour $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ le modèle du demi-plan supérieur. À conjugaison près, nous pouvons supposer que $\xi = \infty$ et $\gamma_0 : z \mapsto z + 1$. Soit HB_n l'horoboule (fermée) $\{z \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}} : \mathrm{Im}\, z \geq n\}$. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ dans $\Gamma - \Gamma_0$ telle que $HB_n \cap \gamma_n HB_n \neq \emptyset$. Nous pouvons multiplier à droite et à gauche γ_n par un élément de Γ_0 sans que cela change cette propriété. Le groupe cyclique engendré par γ_0 agit sur HB_n avec domaine fondamental égal à $\mathscr{F}_n = \{z \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}} \ : \ \mathrm{Im}\, z \geq n, \ 1/2 \leq \mathrm{Re}\, z < 1/2\}$. Nous pouvons donc supposer qu'il existe une suite de points $x_n \in \mathscr{F}_n$ telle que $\gamma_n x_n \in \mathscr{F}_n$. Notons que $\sup_{x \in \mathscr{F}_n} d(\gamma_0 x, x)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ par la question b). En particulier, pour n assez grand, avec μ la constante de la question d), nous avons $d(\gamma_0 x_n, x_n) \leq \mu$ et $d(\gamma_n^{-1} \gamma_0 \gamma_n x_n, x_n) = d(\gamma_0 \gamma_n x_n, \gamma_n x_n) \leq \mu$. Donc les éléments non triviaux γ_0 et $\gamma_n^{-1} \gamma_0 \gamma_n$, qui engendrent un sous-groupe discret de G, car contenu dans Γ, commutent. Comme l'unique point fixe des éléments paraboliques γ_0 et $\gamma_n^{-1} \gamma_0 \gamma_n$ est respectivement ξ et $\gamma_n^{-1} \xi$, ceci montre que $\xi = \gamma_n^{-1} \xi$, donc $\gamma_n \in \Gamma_0$, contradiction.

f) Nous pouvons supposer S connexe. Par le théorème de Cartan-Hadamard, il existe un revêtement riemannien $\pi : \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}} \to S$. Son groupe de revêtement Γ est un sous-groupe agissant librement et proprement sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, formé d'isométries préservant l'orientation, car S est orientable. Donc Γ est un sous-groupe discret et sans torsion de G. Notons $\widetilde{c} : [0, +\infty[\to \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ un relevé de c, et ξ son point fixe à l'infini. On montre que ξ est le point fixe ξ d'un élément parabolique de Γ, et on conclut par e), car l'inclusion de HB dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ induit par passage au quotient une isométrie de $\Gamma_0 \backslash HB$ dans $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}} = S$.

(2) Soient α une isométrie hyperbolique, de distance de translation

$$\ell(\alpha) = \inf_{x \in M} d(\alpha x, x) \ ,$$

et γ une isométrie parabolique de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Considérons l'isométrie $\gamma = (\alpha, \beta)$ de $M = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ (qui est un espace symétrique de type non compact de rang 2). Nous avons

$$d(\gamma(x, y), (x, y)) = \sqrt{d(\alpha x, x)^2 + d(\beta y, y)^2} \ .$$

Comme la distance de translation de β est nulle, nous avons $\ell(\gamma) = \ell(\alpha) > 0$. Mais comme $d(\alpha x, x) \geq \ell(\alpha)$ et $d(\beta y, y) > 0$ pour tous les $x, y \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, la borne inférieure définissant $\ell(\gamma)$ n'est pas atteinte.

(3) Soient $g \in G$ et $C = A^+ \cdot x_0$. Nous savons que $M = KC$. Il existe donc $k \in K$ et $a \in A^+$ tel que le point gx_0 de M s'écrive $gx_0 = kax_0$. Donc $g^{-1}ka$ appartient à K, et en posant $k' = (g^{-1}ka)^{-1}$, le premier résultat en découle.

L'écriture n'est en général pas unique, car si $k'' \in K$, alors $k'' = kak'$ avec $a = e$ et $(k, k') \in \{(e, k), (k, e)\}$. Comme K agit simplement transitivement sur les chambres de Weyl de M d'origine x_0, cette écriture est unique sur l'ouvert $K \exp_{x_0} \mathfrak{a}^+ K$.

Schème E.73 (1) Soit v un vecteur de $\mathfrak{g}$, il s'écrit dans la décomposition de Cartan $v = v_{\mathfrak{K}} + v_{\mathfrak{p}}$ avec $v_{\mathfrak{K}} \in \mathfrak{K}$ et $v_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}$. Si u commute avec tout élément de $\mathfrak{p}$, alors $[u, v] = [u, v_{\mathfrak{K}}]$ et donc $[u, v] \in \mathfrak{p}$ car $[\mathfrak{p}, \mathfrak{K}] \subset \mathfrak{p}$ par les propriétés de la décomposition de Cartan. Donc $\operatorname{ad} u\,(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{p}$. En itérant, $\operatorname{ad} u \circ \operatorname{ad} u = 0$ et en notant B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, nous avons $B(u, u) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} u \circ \operatorname{ad} u) = 0$. Comme M est de type non compact, la restriction de B à $\mathfrak{p}$ est définie positive, donc $u = 0$.

(2) a) Le sous-groupe Z_H est fermé, comme intersection de fermés, donc est un sous-groupe de Lie du groupe de Lie réel G par le théorème de Cartan.

b) Pour tous les $h \in H$ et $x \in M$, puisque h est une isométrie, et puisque $\exp(tu) \in Z_H$ commute avec h, nous avons

$$\begin{aligned}\|Y(hx)\| &= \|(T_x h)^{-1} Y(hx)\| = \big\|(T_x h)^{-1} \frac{d}{dt}_{|t=0}(\exp(tu)hx)\big\| = \big\|\frac{d}{dt}_{|t=0}(h^{-1}\exp(tu)hx)\big\| \\ &= \big\|\frac{d}{dt}_{|t=0}(\exp(tu)x)\big\| = \|Y(x)\|\,.\end{aligned}$$

Donc l'application $x \mapsto \|Y(x)\|$ est invariante par H. Notons que $\overline{C} = \varphi_{x_0}(C)$ est un compact de M tel que $H\overline{C} = M$. Donc $\sup_{x \in M} \|Y(x)\| = \sup_{x \in \overline{C}} \|Y(x)\|$, et l'application $x \mapsto \|Y(x)\|$, qui est continue sur le compact $\overline{C}$, atteint sa borne supérieure en un point x_1. Par homogénéité de M, soit $g \in G$ tel que $x_1 = gx_0$. Alors par un calcul semblable à celui ci-dessus, l'application $x \mapsto \|X(x)\| = \|Y(gx)\|$ atteint son maximum en x_0.

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\frac{d}{dt}(g^{-1}\exp(tu)gx) = \frac{d}{ds}_{|s=0}(g^{-1}\exp(su)g(g^{-1}\exp(tu)gx)) = X(g^{-1}\exp(tu)gx)\,.$$

Donc le flot du champ de vecteurs lisse X est $(\varphi_t^X = g^{-1}\exp(tu)g)_{t \in \mathbb{R}}$, qui est un groupe à un paramètre d'isométries de (M, g), donc $(\varphi_t^X)^* g = g$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $\mathscr{L}_X g = 0$.

c) Pour montrer que le sous-groupe de Lie Z_H est discret, il suffit de montrer que son algèbre de Lie $\mathfrak{z}_H$ est réduite à $\{0\}$. Soit $u \in \mathfrak{z}_H$, considérons X et f comme dans la question b). Puisque x_0 est un maximum de f, nous avons $\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0} f(\exp_{x_0}(tv)) \leq 0$ pour tout $v \in T_{x_0}M$. Comme M est un espace symétrique de type non compact, nous savons que sa courbure sectionnelle est négative ou nulle. Aussi, la formule ($\cdot$ 72 $\cdot$) (et le fait que la somme de deux termes positifs ou nuls est négative ou nulle si et seulement si ces deux termes sont nuls) assure que, en posant $X(x_0) = T_e\varphi_{x_0}(u')$ avec $u' \in \mathfrak{p}$, nous avons

$$R(T_e\varphi_{x_0}(v'), T_e\varphi_{x_0}(u'), T_e\varphi_{x_0}(u'), T_e\varphi_{x_0}(v')) = 0$$

pour tout $v' \in \mathfrak{p}$. Soit B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Nous pouvons supposer que M est irréductible, car G est le produit direct des composantes neutres des groupes des isométries des facteurs de de Rham de M. La formule de la courbure sectionnelle d'un espace symétrique de type non compact irréductible dit qu'il existe $\alpha < 0$, tel que pour tout $v' \in \mathfrak{p}$,

$$R(T_e\varphi_{x_0}(v'), T_e\varphi_{x_0}(u'), T_e\varphi_{x_0}(u'), T_e\varphi_{x_0}(v')) = \frac{1}{\alpha} B([u', v'], [u', v'])\,.$$

Comme la forme de Killing B est définie négative en restriction à $\mathfrak{K}$, nous en déduisons que $[u', v'] = 0$ pour tout $v' \in \mathfrak{p}$. Donc $u' = 0$ par la question (1). Puisque $u' = \mathrm{Ad}(g^{-1})u$, ceci implique que $u = 0$, et l'algèbre de Lie $\mathfrak{z}_H$ est bien triviale.

Index

accélération, 178
  covariante, 177
action
  algébrique, 78
  au bord, 287
  hamiltonienne, 99
  irréductible, 332
  libre, 68, 83
  lisse, 83
  propre, 68, 83
  transitive, 83
ad-alternée, 20
algèbre
  de Lie, 17
    abélienne, 18
    absolument simple, 354
    classique, 20
    commutative, 18
    compacte, 357
    d'un groupe de Lie, 25
    définie par générateurs et relations, 40
    dérivée, 41
    libre, 22
    nilpotente, 41
    obtenue par extension des scalaires, 18
    obtenue par restriction des scalaires, 18
    produit, 19
    quotient, 40
    réductive, 96
    résoluble, 41
    semi-simple, 42
    simple, 42
  des quaternions de Hamilton, 14
alternée, 122
angle, 209
  d'Alexandrov, 276
  de comparaison, 276
anneau des fonctions, 77
  régulières, 77
anneau noethérien, 78
antidérivation, 147
appartement, 367
application
  canonique, 83
  conforme, 299
    naturelle, 299
  d'évaluation, 130
  de rang constant, 7
  direction, 362
  étale, 180
  exponentielle, 58, 179, 205
  homotope, 141
  isométrique, 195
  orbitale, 83
  ouverte, 83
  propre, 110
  régulière, 77
  transverse, 8
astuce unitaire de Weyl, 30
asymptote, 286, 363
atlas de cartes feuilletées, 62
automorphisme
  d'algèbres de Lie, 18
    intérieur, 49
  d'un système de racines, 32
  de revêtements, 68
  de groupes algébriques linéaires, 78
  de groupes de Lie, 11
axe de translation, 286, 295
axiale, 286

base, 109
  d'un système de racines, 35
  de Chevalley, 347
bivecteur, 236
bord
  à l'infini, 287
  de Fustenberg, 365
  de Tits, 368

carte exponentielle, 221
carte exponentielle, 179
CAT(κ), 276
catégorie
  des algèbres de Lie, 18
  des fibrés vectoriels, 115
  des fibrations, 109
  des $\mathfrak{g}$-modules, 28
  des groupes de Lie, 11
  des groupes algébriques linéaires, 78
  des revêtements, 68
centralisateur, 40
centre, 71
  d'une algèbre de Lie, 19
  d'une horoboule, 296
  d'une horosphère, 296
chambre
  d'un immeuble, 367
  de Weyl, 344
    à l'infini, 365
    d'un espace symétrique, 359

fermée, 360
vectorielle, 35
champ
de p-plans, 64, 119
parallèle, 328
de Jacobi, 180, 247
orthogonal, 247
tangent, 248
de Killing, 213, 308
de vecteurs
fondamental, 99
géodésique, 214
hamiltonien, 99
invariant à droite, 23
invariant à gauche, 23
le long d'une courbe, 138
parallèle, 175, 176
chemin
concaténation, 177
géodésique par morceaux, 293
inverse, 177
cocycle de Busemann, 296
coefficient de Christoffel, 159
commutant, 40
compactification géométrique, 290
complet, 57
complexe
euclidien par morceaux, 293
hyperbolique par morceaux, 293
polyédral, 292
polygonal, 293
simplicial sphérique, 366
sphérique par morceaux, 293
composante neutre, 12
composition, 109
concaténation, 177
conjugaison, 14, 350
conjugué, 14
connexe, 69
connexion, 154
affine, 154
compatible, 205
complète, 179
d'Ehresmann, 165
linéaire, 165
de Levi-Civita, 205
duale, 155
image réciproque, 160
linéaire, 154
normale, 263
plate, 306
produit, 154
produit tensoriel, 155
restreinte, 158
sans torsion, 168
somme, 155
triviale, 154
constante
d'Einstein, 241
de Margulis, 379
contractile, 141
contraction des tenseurs, 133, 154
convention d'Einstein, 244
convexe, 280, 281, 366
coracine, 32
côté, 275
courbe
C^1 par morceaux, 219
de Menger, 294
de von Koch, 222
horizontale, 176
lisse par morceaux, 176
minimisant l'énergie, 221
localement, 221
minimisante, 220
localement, 220
courbure, 205
d'une connexion, 169
de Gauss, 267
de Ricci, 240
moyenne, 271
constante, 272
principale, 267
scalaire, 242
sectionnelle, 238
négative pincée, 239
pincée, 239
critère
de semi-simplicité de Cartan, 42
de résolubilité de Cartan, 43
crochet de Lie, 17
de champs de vecteurs, 22

dérivation covariante, 154
décomposition
d'Iwasawa, 363
de Jordan, 43, 48
de Cartan, 326, 339, 379
en espaces de racine
restreinte, 340
en espaces de racine, 53
polaire, 17
demi-hyperboloïde supérieur, 94
densité, 196
locale, 196
dérivation, 144

d'algèbres de Lie, 19
intérieure, 19
dérivée, 41
de Darboux, 185
de Lie, 150
déterminant de Dieudonné, 15
développable, 268
diagramme de Dynkin, 37
abstrait, 38
différentielle, 134
extérieure, 146, 184
associé à une connexion, 170
distance
angulaire, 302, 303
conformément équivalente, 299
de translation, 295
de Carnot-Carathéodory, 97
de longueur, 222
induite, 222
de Tits, 303, 368
de translation, 285
des mots, 372
polyédrale, 293
propre, 233
riemannienne, 220
visuelle, 299
domaine
de Siegel, 338
fondamental, 36

élément d'aire, 199
elliptique, 97, 285, 295, 378
endomorphisme
nilpotent, 43
semi-simple, 43
énergie, 219
enveloppe convexe, 292, 366
épicentre, 282
équation
de Codazzi-Mainardi, 264
de Gauss, 264
de Ricci, 264
de structure de Maurer-Cartan, 184
fondamentales des sous-variétés, 264
espace
CAT(κ), 276
de longueur, 223
de modules
de tores plats, 203
de poids généralisé, 50
de racine, 53
restreinte, 340
de Teichmüller, 370
euclidien standard, 197
homogène quotient, 85
hyperbolique
complexe, 336
réel, 199, 200
localement
CAT(κ), 278
symétrique, 338
modulaire, 370
pseudo-euclidien standard, 197
symétrique, 322
de type non compact, 335
topologique
contractile, 141
paracompact, 7
total, 109

face, 292, 366
propre, 366
facteur
de conformité, 200
de de Rham, 329
euclidien, 329
fermé de Zariski, 77
feuille, 63
instable forte, 298
locale, 63
stable forte, 298
feuilletage, 63
image réciproque, 69
intégrant, 64
préservé, 63
fibration, 109
grassmannienne, 118, 119
projective, 118
triviale, 110
trivialisable, 110
fibre, 68, 109
fibré
cotangent, 130
des k-plans, 118, 119
des repères, 128
horizontal, 165
localement trivial, 109
normal, 262
principal, 84
tangent, 116
unitaire tangent, 215
vectoriel, 115
complexe, 115
complexifié, 139
de rang n, 115
des applications multilinéaires, 129

des endomorphismes, 129
des formes bilinéaires, 131
des formes différentielles, 134
des formes différentielles à valeurs dans un fibré vectoriel, 136
des m-formes différentielles, 134
des m-formes différentielles à valeurs dans un fibré vectoriel, 136
des tenseurs, 131
dual, 130
image réciproque, 137
plat, 118
produit cartésien, 138
produit tensoriel, 131
projectifié, 118
puissance extérieure, 133
puissance symétrique, 133
puissance tensorielle, 131
quotient, 120
réel, 115
restriction, 137
somme directe, 128
somme de Whitney, 128
stablement trivialisable, 144
tautologique, 117
tensoriel (s, t), 131
trivial, 116
trivialisable, 116
vertical, 164
flot
d'Anosov, 298
géodésique, 214
fonction
angle, 209
de Busemann, 295, 296
forme
compacte, 347
d'aire, 199
de Killing, 20
de Maurer-Cartan, 184
différentielle, 134
à valeurs dans un espace vectoriel, 184
à valeurs dans un fibré vectoriel, 136
fondamentale
première, 197
seconde, 262
multilinéaire
alternée, 122
antisymétrique, 122
symétrique, 122
réelle, 347
symplectique, 99
volume, 183
formule
de Cartan, 147, 151
de Gauss, 264
de la variation première, 305
de la variation seconde, 260, 305
de O'Neill, 307
de Weingarten, 264

galoisien, 69
géodésique, 178, 213, 275
asymptotes, 286
de type
espace, 213
lumière, 213
temps, 213
droite, 275
locale, 275
parallèles, 285
rayon, 275
segment, 275
géodésiquement complète, 232
gradient, 207
graphe d'incidence, 368
groupe
additif, 78
algébrique linéaire, 78
défini sur k, 78
classique, 14
d'holonomie, 177
restreinte, 177
de Heisenberg, 97
de jauge, 163
de Lie, 10
abélien, 95
complexe, 10
discret, 12
local, 74
quotient, 70
réel, 10
semi-simple, 77
de Weyl, 32, 344
d'un espace symétrique, 359
des automorphismes d'un revêtement, 68
des isométries, 196
fondamental, 68
linéaire, 13, 78
spécial, 15, 78
multiplicatif, 78
orthogonal, 15
spécial, 16, 78
structural, 84
symplectique, 16, 78
topologique, 16

sans petit sous-groupe, 16
unitaire, 15
spécial, 16
unitaire quaternionien, 15
groupuscule de Lie, 74

hamiltonien, 99
hamiltonienne, 99
holonomie, 177
homotopes, 177
horizontale, 63
horoboule, 296
ouverte, 296
horosphère, 296
hyperbolique, 97, 285, 295, 378
hyperplan, 270, 271, 292

idéal, 40
engendré par une partie, 40
identité
de Bianchi
différentielle, 171
première, 237
de Jacobi, 17
image
directe des champs de vecteurs, 22
réciproque
d'un fibré vectoriel, 137
d'un tenseur, 131, 171
d'une connexion, 160
d'une forme différentielle, 138
des champs de vecteurs, 22
immersion, 7
de groupes de Lie, 11
isométrique, 195
immeuble
de Tits à l'infini, 368
hyperbolique de Bourdon, 294
sphérique, 367
intégrable, 64
intégrer, 27
intérieur, 292
inversion, 201
involution de Cartan, 324, 339
irréductible, 78, 332
isométrie, 196
axiale, 286
elliptique, 285, 295, 378
hyperbolique, 285, 295, 378
locale, 234
loxodromique, 286
parabolique, 286, 295, 378
isomorphe, 11, 18, 32, 68, 78, 109
isomorphisme
d'algèbres de Lie, 18
accidentel, 56
de $\mathfrak{g}$-modules, 28
de revêtements, 68
de groupes de Lie, 70
de fibrations, 109
de groupes algébriques linéaires, 78
de groupes de Lie, 11
de systèmes de racines, 32
local de groupes de Lie, 73
remarquable, 82

joint sphérique, 366

k-action, 78
k-groupe, 78
k-morphisme, 78
k-variété, 77

$\mathfrak{L}(S)$, 22
lacets homotopes, 177
lemme de Gauss, 224
localement
fermée, 7
fini, 7
isomorphes, 74
longueur, 219, 293
d'un chemin continu, 221
loxodromique, 286

magma libre, 21
matrice
d'une métrique pseudo-riemannienne, 211
de Cartan, 36
abstraite, 38
mesure
de Haar, 202
riemannienne, 197
métrique
de Sasaki, 212
euclidienne, 140
induite sur les fibrés produits tensoriels, 141
hermitienne, 140
hyperbolique
sur $\mathbb{B}_n$, 200
sur $\mathscr{H}_+^n$, 198
sur $\mathbb{R}_+^n$, 200
lorentzienne, 195
pseudo-euclidienne, 140
pseudo-hermitienne, 140
pseudo-riemannienne, 195
bi-invariante, 202

invariante, 196
invariante à gauche, 202
produit, 202
restriction, 198
riemannienne, 195
sphérique standard, 198
m-forme différentielle, 134
à valeurs dans un fibré vectoriel, 136
minimale, 272
modèle
de la boule, 200
du demi-espace supérieur, 200
du demi-hyperboloïde supérieur, 199
du domaine de Siegel, 338
projectif, 336
module, 28
irréductible, 28
simple, 28
morphisme
au-dessus de l'identité, 109
canonique, 22
d'algèbres de Lie, 17
de $\mathfrak{g}$-modules, 28
de fibration, 109
de revêtements, 68
de fibrés vectoriels, 115
au-dessus de l'identité, 115
de groupe algébrique linéaire
défini sur k, 78
de groupes de Lie, 11
identité, 109
local de groupes de Lie, 73
sur la base, 109

nilespace, 52
nilpotent, 43
normale unitaire, 267
normalisateur, 40
norme, 14
noyau, 120

ombilic, 271
opérateur
de courbure, 238
de Weingarten, 263
orbite
coadjointe, 99
ordre
de nilpotence, 41
de résolubilité, 41
ouvert distingué, 109, 115

parabolique, 97, 286, 295, 378
paracompact, 7
parallèle, 328
paramétrage, 219
paramétré
à vitesse constante, 214
par longueur d'arc, 221
proportionnellement
à la longueur d'arc, 221
partie génératrice, 40
partition de l'unité, 7
pavage de Coxeter, 367
périmètre, 275
plat, 359
maximal, 359
plongement, 8
de groupes de Lie, 11
isométrique, 195
poids, 50
point, 275
à l'infini, 287
conjugué, 181
correspondant, 275
k-point, 77
polyèdre convexe, 292
présentation d'algèbre de Lie, 40
produit
extérieur, 123, 134, 136, 153
intérieur, 127, 149
scalaire
dual, 141
produit tensoriel, 141
tensoriel, 121
projection, 281
canonique, 68, 83
d'un fibré vectoriel, 115
stéréographique, 201
hyperbolique, 201
propriété de visibilité, 299
puissance
extérieure, 122
symétrique, 122
tensorielle, 121

quasi-inverse, 372
quasi-isométrie, 372

racine
courte, 33
d'une algèbre de Lie, 53
indécomposable, 35
indivisible, 32
négative, 35
positive, 35
restreinte, 340

simple, 35
radical résoluble, 42
rang, 340, 371
d'un fibré vectoriel, 115
d'un système de racines, 32
réel, 340
rayon d'injectivité
local, 221
rayon d'injectivité, 221
rectifiable, 222
réglée, 268
régulier, 52, 343
relations de Serre, 57
relèvement, 69
reparamétrage, 222
repère mobile, 242
représentation
adjointe, 19, 23
coadjointe, 99
d'algèbre de Lie, 18
d'isotropie, 218
de groupe de Lie, 13
réseau, 69, 203, 369
cocompact, 369
irréductible, 369
uniforme, 369
revêtement, 68
à k feuillets, 68
de groupes de Lie, 70
galoisien, 69
pseudo-riemannien, 203
riemannien, 203
universel, 68
de groupes de Lie, 72

$\mathfrak{S}(n)$, 122
Sasaki, 212
section, 109
locale, 9
parallèle, 158
semi-simple, 43
simplement connexe, 68
simplexe, 366
sphérique, 366
$\mathfrak{sl}_2$-triplet, 29
sommet, 275, 360, 366
sous-algèbre
de Cartan, 46
déployée, 46
de Lie, 18
sous-ensemble algébrique réel, 17
sous-espace de Cartan, 340
sous-fibré vectoriel, 119
sous-groupe
à un paramètre, 59
elliptique, 97
hyperbolique, 97
parabolique, 97
auto-adjoint, 17
central, 71
d'isotropie, 218
de Lie, 12
immergé, 12
plongé, 12
sous-module, 28
sous-variété
minimale, 272
pseudo-riemannienne, 198
riemannienne, 198
totalement géodésique, 270
stabilisateur, 83
structure conforme, 299
subimmersion, 7
submersion, 7
riemannienne, 204, 306
suite
centrale descendante, 41
dérivée, 41
exacte
de fibrés vectoriels, 120
surface
développable, 268
réglée, 268
symbole
de Christoffel, 159
de Kronecker, 211
symétrie géodésique, 324
locale, 323
système
de Coxeter, 36
de racines, 32
irréductible, 32
opposé, 32
réductible, 32
réduit, 32

tenseur, 131
de Christoffel, 159
de courbure de Riemann, 205
pur, 121
théorème
d'Ado, 76
d'Ehresmann, 110
d'Engel, 43
de Berger, 308
de Bishop-Cheeger-Gromov, 261

de Cartan, 65
de Cartan-Hadamard, 255
métrique, 283
de comparaison de Rauch, 255
de décomposition de de Rham, 329
de forme normale
des applications de rang constant, 8
des immersions, 8
des submersions, 8
de Frobenius, 64
de Gleason, 16
de Hopf-Rinow, 233
de la variation seconde, 260
de Montgomery, 16
de Myers, 218, 258
de Noether, 99
de plongement de Nash, 198
de rigidité de Mostow, 369
de Schur, 247
de Tits, 374
de transversalité, 8
du point fixe de Cartan, 283
du relèvement, 69
topologie
analytique, 77
compacte-ouverte, 217
de Zariski, 77
des cônes, 290
des feuilles, 63
induite, 12
intrinsèque, 12
quotient, 83
tore
de révolution, 204
maximal, 100
plat, 203
torseur, 84
torsion, 168
totalement
géodésique, 270
ombilique, 271
trace, 130
transport parallèle, 176
transvection, 327
transversale locale, 63
transverse, 8
triangle
de comparaison, 275
géodésique, 275
trivialisation locale, 68, 109, 115

variation, 249
par des géodésiques, 249
seconde, 260
variété
algébrique affine
définie sur k, 77
irréductible, 78
algébrique affine, 77
d'Einstein, 241
de courbure de Ricci constante, 241
de Hadamard, 286
de Stiefel, 183
feuilletée, 63
homogène, 84
lorentzienne, 195
parallélisable, 117
pseudo-riemannienne, 195
conforme, 200
homogène, 196
produit, 202
quotient, 203
quotient, 89
riemannienne, 195
hyperbolique, 254
irréductible, 329
plate, 253
produit, 203
quotient, 203
symplectique, 99
vecteur
courbure moyenne, 271
régulier, 359
singulier, 359
variation, 249
visibilité, 299
voisinage distingué, 68, 109, 115
volume riemannien, 197

Références

[AGL] A. Alvarez, E. Ghys, et J. Leys. *Dimensions ...une promenade mathématique...* film DVD visionable sur www.dimensions-math.org, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2008.

[Asl] H. Aslaksen. *Quaternionic determinants.* Math. Intelligencer **18** (1996) 57–65.

[Ati] M. Atiyah. *K-theory.* Adv. Book Classic, Westview Press, 1994.

[Bal] W. Ballmann. *Nonpositively curved manifolds of higher rank.* Ann. of Math. **122** (1985) 597–609.

[BaGS] W. Ballmann, M. Gromov, et V. Schroeder. *Manifolds of nonpositive curvature.* Progress in Math. **61**, Birkhäuser, 1985.

[Bea] A. F. Beardon. *The geometry of discrete groups.* Grad. Texts Math. **91**, Springer-Verlag, 1983.

[Ben] N. Benakli. *Polyèdres hyperboliques, passage du local au global.* Thèse, Université Paris-Sud 11, 1992.

[BeP] R. Benedetti et C. Petronio. *Lectures on hyperblic geometry.* Springer-Verlag, 1992.

[Ber] M. Berger. *Géométrie.* Cedic/Fernand Nathan, 1977.

[Bess] A. Besse. *Einstein manifolds.* Springer Verlag, (ed. 2008 Classics in Math.), 1987.

[BessCG] G. Besson, G. Courtois, et S. Gallot. *Minimal entropy and Mostow's rigidity theorems.* Erg. Theo. Dyn. Syst. **16** (1996) 623–649.

[Best] M. Bestvina. *$\mathbb{R}$-trees in topology, geometry, and group theory.* Handbook of Geometric Topology, 55–91, North-Holland, 2002.

[Bol] J. Bolyai. *Scientiam spatii absolute veram exhibens.* Appendix, 1832.

[Bor1] A. Borel. *Linear algebraic groups.* Dans "Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups", A. Borel et G. D. Mostow eds, Proc. Sympos. Pure Math. (Boulder, 1965), pp. 20–25, Amer. Math. Soc. 1966.

[Bor2] A. Borel. *Linear algebraic groups.* 2nd Enlarged Ed., Grad. Texts Math. **126**, Springer Verlag, 1991.

[Bou1] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie : chap. 1.* Hermann, 1972.

[Bou2] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie : chap. 2 et 3.* Hermann, 1972.

[Bou3] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie : chap. 4, 5 et 6.* Masson, 1981.

[Bou4] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie : chap. 7 et 8.* Hermann, 1975.

[Bourd1] M. Bourdon. *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un $CAT(-1)$ espace.* L'Ens. Math. **41** (1995) 63–102.

[Bourd2] M. Bourdon. *Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow.* Geom. Func. Anal. **7** (1997) 245–268.

[BrH] M. R. Bridson et A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature.* Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag, 1999.

[Bro] K. Brown. *Buildings.* Springer Verlag, 1989.

[BuI] M. Burger et A. Iozzi, eds. *Rigidity in dynamics and geometry.* (Cambridge, 2000), Springer Verlag, 2002.

[BuS] K. Burns et R. Spatzier. *Manifolds of nonpositive curvature and their buildings.* Publ. Math. IHÉS **65** (1987) 35–59.

[Bus] P. Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces.* Prog. Math. **106**, Birkhäuser, 1992.

[BusK] P. Buser et H. Karcher. *Gromov's almost flat manifolds.* Astérisque **81**, Soc. Math. France, 1981.

[Car] R. W. Carter. *Simple groups of Lie type.* Pure Appl. Math. **28**, Wiley 1972.

[CaSM] R. W. Carter, G. Segal et I. MacDonald. *Lectures on Lie algebras and Lie groups.* Lond. Math. Soc. Stud. Texts **32**, Camb. Univ. Press 1995.

[Coh] D. Cohn. *Measure theory.* Birkhäuser, 1980.

[CDP] G. Courtois, F. Dal'Bo, et F. Paulin. *Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques.* Journées X-UPS 2007, N. Berline, A. Plagne, C. Sabbagh eds., Ed. Ecole Polytechnique, 2007.

[Die1] J. Dieudonné. *Les déterminants sur un corps non commutatif.* Bull. Soc. Math. France, **71** (1943) 27–45.

[Die2] J. Dieudonné. *Éléments d'analyse t. 3 : chap. XVI et XVII.* Gauthier-Villars, 2nd ed, 1974.

[Die3] J. Dieudonné. *Éléments d'analyse t. 4 : chap. XVIII à XX.* Gauthier-Villars, 1971.

[Die4] J. Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques.* Erg. Math. Grenz., Springer Verlag, 1971.

[Don] S. Donaldson. *Lie algebra theory without algebra.* In "Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. Manin, Vol. I", pp. 549–566, Progr. Math. **269**, Birkhäuser, 2009.

[Ebe1] P. Eberlein. *Rigidity of lattices of nonpositive curvature.* Erg. Theo. Dyn. Syst. **3** (1983) 47-85.

[Ebe2] P. Eberlein. *Geometry of nonpositively curved manifolds.* Chicago Lect. in Math., Chicago Univ. Press, 1996.

[EiLMV] M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, P. Michel, et A. Venkatesh. *Distribution of periodic torus orbits on homogeneous spaces.* Duke Math. J. **148** (2009) 119–174.

[Ehr] C. Ehresmann. *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable.* Séminaire N. Bourbaki. 1948-1951, Exp. **24**, 153–156.

[FM] B. Farb et D. Margalit. *A primer on mapping class groups.* Princeton Math. Ser., Princeton Univ. Press, 2012.

[FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, et V. Poenaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces.* Astérisque **66-67**, Soc. Math. France 1979.

[GaHL] S. Gallot, D. Hulin, et J. Lafontaine. *Riemannian geometry.* Springer Verlag, 1990.

[Godb] C. Godbillon. *Éléments de topologie algébrique.* Hermann, 1971.

[Gode] R. Godement. *Introduction à la théorie des groupes de Lie, I et II.* Pub. Math. Université Paris VII **011**, 1982.

[Gol] W. M. Goldman. *Complex hyperbolic geometry.* Oxford Univ. Press, 1999.

[Gro1] M. Gromov. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* écrit avec J. Lafontaine et P. Pansu, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.

[Gro2] M. Gromov. *Carnot-Carathéodory spaces seen from within.* In "Sub-Riemannian geometry", 79–323, Progr. Math. **144**, Birkhäuser, 1996.

[Gro3] M. Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces.* Prog. Math. **152**, Birkhäuser, 1999.

[GroP] M. Gromov et P. Pansu. *Rigidity of lattices : an introduction.* In "Geometric topology : recent developments", Montecatini Terme, 1990, eds. de Bartolomeis, F. Tricerri, Lect. Notes **1504**, Springer Verlag, 1987.

[Har] P. de la Harpe. *An invitation to Coxeter groups.* In "Group theory from a geometrical viewpoint" (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), 193–253, World Scientific, 1991.

[Hel] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.* Academic Press, 1978.

[Hum] J. E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups.* Cambridge Univ. Press, 1990.

[Hus] D. Husemoller. *Fiber bundles.* 2nd ed., Springer Verlag, 1975.

[Kar] M. Karoubi. *K-theory : an introduction.* Classics in Math., Springer Verlag, 2008.

[KH] A. Katok et B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems.* Ency. Math. App. **54**, Camb. Univ. Press, 1995.

[Kle] F. Klein. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Verlag von Andreas Deichert, Erlangen, 1872. Traduction française de Henri Eugène Padé *Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, Ann. scien. Éc. norm. sup. 3e série, t. 8, 1891, p. 87-102 et 173-199, reproduite dans *Le Programme d'Erlangen*, Bordas, 1974. Traduction anglaise de M. W. Haskell : *A comparative review of recent researches in geometry*, Bull. New York Math. Soc. **2** (1892-1893), 215-249.

[Kna] A. W. Knapp. *Lie groups beyond an introduction.* Prog. Math. **140**, 2nd ed., Birkhaüser, 2005.

[KN] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry.* Wiley classics, Wiley, 1996.

[Laf] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles.* Press. Univ. Grenoble, 1996.

[Lie] S. Lie. *Gesammelte Abhandlungen 5-6.* F. Engel, P. Heegard eds, Teubner, 1924-1927.

[MaT] G. Margulis et G. Tomanov. *Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces.* Invent. Math. **116** (1994) 347–392.

[Mil] J. Milnor. *Morse theory.* Ann. Math. Stud. **51**, Princeton Univ. Press, 5th ed., 1973.

[Mor] J. Morgan. Λ-*trees and their applications.* Bull. A.M.S. **26** (1992) 87–112.

[MnT] N. Mneimné et F. Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.* Hermann, 1986.

[MonZ] D. Montgomery et L. Zippin. *Topological transformation groups.* Huntington NY Robert E. Krieger, 1974.

[Mos1] G. D. Mostow. *Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms.* Pub. Math. IHÉS **34** (1968) 53–104.

[Mos2] G. D. Mostow. *Strong rigidity of locally symetric spaces.* Ann. Math. Studies **78**, Princeton Univ. Press, 1973.

[Nas] J. Nash. *The imbedding problem for Riemannian manifolds.* Ann. of Mat. **63** (1956) 20–63.

[OP] B. Oberknapp et K. Polthier. *An algorithm for discrete constant mean curvature surfaces.* dans "Visualization and mathematics" (Berlin-Dahlem, 1995), 141–161, Springer, 1997.

[OV] A. L. Onishchik et E. B. Vinberg. *Lie groups and algebraic groups.* Springer Verlag, 1990.

[Pan] P. Pansu. *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité.* Sém. Bourbaki 1993/94 n° 778, Astérisque **227**, Soc. Math. France (1995), 69–105.

[Par] J. Parker. *Hyperbolic spaces.* Jyväskylä Lect. Math. **2** (2008), voir http ://urn.fi/URN :ISBN :951-39-3132-2 .

[Pau1] F. Paulin. *Action de groupes sur les arbres.* Séminaire Bourbaki, Vol. 1995-96, exposé 808, Astérisque **241**, Soc. Math. France 1997.

[Pau2] F. Paulin. *Géométrie différentielle élémentaire.* Notes de cours de première année de mastère, Ecole Normale Supérieure, 2007, voir http ://www.math.u-psud.fr/∼paulin/notescours/cours_geodiff.pdf .

[Pau3] F. Paulin. *Topologie, analyse, calcul différentiel.* Notes de cours de troisième année de licence, Ecole Normale Supérieure, 2009, voir http ://www.math.u-psud.fr/∼paulin/notescours/cours_analyseI.pdf .

[Pau4] F. Paulin. *Topologie algébrique élémentaire*. Notes de cours de première année de mastère, Ecole Normale Supérieure, 2010, voir http ://www.math.u-psud.fr/∼paulin/notescours/cours_topoalg.pdf .

[Per] D. Perrin. *Géométrie algébrique : une introduction*. Intereditions/CNRS editions, 1995.

[Pet] P. Petersen. *Riemannian geometry*. Grad. Texts Math. bf 171, Springer Verlag, 1998.

[Pra] G. Prasad. *Strong rigidity of $\mathbb{Q}$-rank 1 lattices*. Invent. Math. **21** (1973) 255–286.

[Ron] M. Ronan. *Lectures on buildings*. Persp. Math. **7**, Academic Press, 1989.

[Ser1] J.-P. Serre. *Algèbres de Lie semi-simples complexes*. W.A. Benjamin, 1966.

[Ser2] J.-P. Serre. *Cours d'arithmetique*. Press. Univ. France, Paris, 1970.

[Ser3] J.-P. Serre. *Lie algebras and Lie groups*. Lect. Notes Math. **1500**, Springer-Verlag 1992.

[Sha1] P. Shalen. *Dendrology of groups : an introduction*. In "Essays in group theory", pp. 265–319, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **8**, Springer Verlag, 1987.

[Sha2] P. Shalen. *Dendrology and its applications*. In "Group theory from a geometrical viewpoint" (Trieste, 1990), pp. 543–616, World Sci. Publ. 1991.

[Spa] E. Spanier. *Algebraic topology*. Tata McGraw-Hill, 1981.

[Spi] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. 2nd ed., Publish or Perish, 1979.

[Wei] A. Weil. *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. Hermann, 1965.

Département de mathématique, UMR 8628 CNRS, Bât. 425
Université Paris-Sud, 91405 ORSAY Cedex, FRANCE
e-mail : frederic.paulin@math.u-psud.fr