Théorie des nombres/Théorie des groupes

Equidistribution non-archimédienne et actions de groupes sur les arbres

Anne Broise-Alamichel [a], Jouni Parkkonen [b], Frédéric Paulin [c]

[a] *Laboratoire de mathématique d'Orsay, UMR 8628 Université Paris-Sud et CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 ORSAY Cedex, FRANCE*

[b] *Department of Mathematics and Statistics, P.O. Box 35, 40014 University of Jyväskylä, FINLAND*

[c] *Laboratoire de mathématique d'Orsay, UMR 8628 Université Paris-Sud et CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 ORSAY Cedex, FRANCE*

Reçu le *****; accepté après révision le +++++

Présenté par £££££

Résumé

Nous donnons des résultats d'équidistribution d'éléments de corps de fonctions sur des corps finis, et d'irrationnels quadratiques sur ces corps, dans leurs corps locaux complétés. Nous déduisons ces résultats de théorèmes d'équidistribution de perpendiculaires communes dans des quotients d'arbres par des réseaux de leur groupe d'automorphismes, démontrés à l'aide de propriétés ergodiques du flot géodésique discret.

Abstract

Non-Archimedean equidistribution and group actions on trees. We give equidistribution results of elements of function fields over finite fields, and of quadratic irrationals over these fields, in their completed local fields. We deduce these results from equidistribution theorems of common perpendiculars in quotients of trees by lattices in their automorphism groups, proved by using ergodic properties of the discrete geodesic flow.

Abridged English version

Let $\mathbb{F}_q$ be a finite field with q elements. Let K be the function field of a geometrically irreducible smooth projective curve $\mathbf{C}$ over $\mathbb{F}_q$ of genus g and let v be a (normalised discrete) valuation of K. Let K_v be the completion of K for v, with residual field of order q_v and absolute value $|\cdot|_v = {q_v}^{-v(\cdot)}$. Let R_v be the

Email addresses: `anne.broise@math.u-psud.fr` (Anne Broise-Alamichel), `jouni.t.parkkonen@jyu.fi` (Jouni Parkkonen), `frederic.paulin@math.u-psud.fr` (Frédéric Paulin).

affine function ring associated to v. Let ζ_K be Dedekind's zeta function of K and Haar_{K_v} the usual Haar measure of K_v. Let Δ_x be the unit Dirac mass at any point x of a topological space.

The aim of this note is to give equidistribution results in K_v of elements of K, and of quadratic irrationals in K_v over K, when considered in an orbit of the modular group $\mathrm{PGL}_2(R_v)$ acting by homographies on $\mathbb{P}_1(K_v) = K_v \cup \{\infty\}$. We only give in the abridged English version two of these results, and we refer to [1] for more general versions and complete proofs.

The first one, analogous to a result of Mertens on the equidistribution of $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, says that every orbit of a finite index subgroup (not necessarily a congruence one) of the modular group $\mathrm{PGL}_2(R_v)$ of an element of K equidistributes, when the absolute value of the denominators in reduced form converge to infinity.

Theorem 0.1 *For every finite index subgroup G of $\mathrm{GL}({R_v}^2)$, as $s \to +\infty$, with $G_{(1,0)}$ the stabiliser of $(1,0)$ in G, we have*

$$\frac{(q_v^2-1)\;(q_v+1)\;\zeta_K(-1)\;[\mathrm{GL}({R_v}^2):G]}{q_v^3\;q^{\,g-1}\;[\mathrm{GL}({R_v}^2)_{(1,0)}:G_{(1,0)}]}\;s^{-2}\sum_{(x,y)\in G(1,0),\;|y|_v\le s}\Delta_{\frac{x}{y}}\;\overset{*}{\rightharpoonup}\;\mathrm{Haar}_{K_v}\;.$$

Assume now that the characteristic of K is not 2. If $\alpha \in K_v$ is a quadratic irrational over K, let α^σ be its Galois conjugate and

$$h(\alpha) = \frac{1}{|\alpha - \alpha^\sigma|_v}\;,$$

which is an appropriate complexity in a given orbit of the modular group $\mathrm{PGL}_2(R_v)$.

Theorem 0.2 *For every finite index subgroup G of $\mathrm{GL}_2(R_v)$ and every quadratic irrational $\alpha_0 \in K_v$ over K, as $s \to +\infty$, we have*

$$\frac{(q_v+1)^2\;\zeta_K(-1)\;m_0\;[\mathrm{GL}_2(R_v):G]}{2\;q_v^2\;(q-1)\;|v(\mathrm{tr}\,g_0)|}\;s^{-1}\sum_{\alpha\in G\cdot\alpha_0,\;h(\alpha)\le s}\Delta_\alpha\;\overset{*}{\rightharpoonup}\;\mathrm{Haar}_{K_v}\;,$$

where $g_0 \in G$ fixes α_0 with $v(\mathrm{tr}\,g_0) \neq 0$ and m_0 is the index of ${g_0}^{\mathbb{Z}}$ in the stabiliser of α_0 in G.

Our approach relies on techniques of ergodic theory for the geodesic flow on trees. Let $\mathbb{X}$ be a $(q+1)$-regular tree, let Γ be a lattice in $\mathrm{Aut}(\mathbb{X})$, preserving the set of vertices at even distance from a given vertex. Let $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{X}) = \sum_{[x]\in\Gamma\backslash V\mathbb{X}}\frac{1}{|\Gamma_x|}$. Let $\breve{\mathscr{G}}\mathbb{X}$ be the Bartels-Lück space of continuous maps ℓ from $\mathbb{R}$ to the geometric realisation X of $\mathbb{X}$ such that $\ell(0)$ is a vertex, that are isometric on a closed interval, and constant on each complementary component, endowed with the geodesic flow $(t,\ell)\mapsto\{s\mapsto\ell(s+t)\}$ (with discrete time $t\in\mathbb{Z}$). Let $\mathbb{D}^\pm$ be two subtrees of $\mathbb{X}$ such that the families $(\gamma\mathbb{D}^\pm)_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_{\mathbb{D}^\pm}}$ are locally finite in $\mathbb{X}$. The closed subspace of $\breve{\mathscr{G}}\mathbb{X}$ consisting of geodesic rays arriving at $\mathbb{D}^+$ (respectively exiting from $\mathbb{D}^-$) carries a natural Borel measure $\widetilde{\sigma}^-_{\mathbb{D}^+}$ (respectively $\widetilde{\sigma}^+_{\mathbb{D}^-}$).

Our main result is a simultaneous equidistribution result of common perpendiculars: for every $\gamma\in\Gamma$, let $\alpha^-_\gamma : [0, d(\mathbb{D}^-,\gamma\mathbb{D}^+)] \to X$ and $\alpha^+_\gamma : [-d(\mathbb{D}^-,\gamma\mathbb{D}^+), 0] \to X$ be the parametrisations with $\alpha^-_\gamma(0)\in\mathbb{D}^-$ and $\alpha^+_\gamma(0)\in\mathbb{D}^+$ of the common perpendicular from $\mathbb{D}^-$ to $\gamma\mathbb{D}^+$, when it exists.

Theorem 0.3 *As $t\to+\infty$, for the weak-star convergence of measures on $\breve{\mathscr{G}}\mathbb{X}\times\breve{\mathscr{G}}\mathbb{X}$, we have*

$$\frac{(q^2-1)\;(q+1)}{2\;q^2}\;\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash\backslash\mathbb{X})\;q^{-t}\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma/\Gamma_{\mathbb{D}^+}\\ 0<d(\mathbb{D}^-,\gamma\mathbb{D}^+)\le t}}\Delta_{\alpha^-_\gamma}\otimes\Delta_{\gamma^{-1}\alpha^-_\gamma}\;\overset{*}{\rightharpoonup}\;\widetilde{\sigma}^+_{\mathbb{D}^-}\otimes\widetilde{\sigma}^-_{\mathbb{D}^+}\;.$$

When Γ is a geometrically finite lattice, there is an error term $\mathrm{O}(q^{-\kappa\,t})$ for some $\kappa>0$ in this equidistribution claim evaluated on a locally constant function with compact support. The proof (see [1]) uses the mixing property of the square of the geodesic flow, and its exponential mixing property when Γ is a geometrically finite lattice.

The proofs of the above arithmetic applications use for $\mathbb{X}$ the Bruhat-Tits building $\mathbb{X}_v$ of (PGL_2, K_v), on which the modular group $\mathrm{PGL}_2(R_v)$ is a geometrically finite lattice. For $\mathbb{D}^-$ and $\mathbb{D}^+$ in Theorem 0.1, we take the same horoball $\mathscr{H}_\infty$ centered at the point ∞ of the space of ends $\partial_\infty \mathbb{X}_v = \mathbb{P}_1(K_v)$. For $\mathbb{D}^-$ and $\mathbb{D}^+$ in Theorem 0.2, we take $\mathbb{D}^- = \mathscr{H}_\infty$ and $\mathbb{D}^+$ the geodesic line in $\mathbb{X}_v$ with points at infinity α_0 and α_0^σ.

1. Équidistribution dans des corps locaux non-archimédiens

Une motivation pour notre travail est le résultat de Mertens suivant, précisant quantitativement la densité du corps $K = \mathbb{Q}$ des fractions de l'anneau $\mathbb{Z}$ dans sa complétion $\mathbb{R}$ pour la valeur absolue usuelle. Nous noterons Δ_x la masse de Dirac unité en tout point x d'un espace topologique, H_x le stabilisateur de tout point x d'un ensemble muni d'une action d'un groupe H et $\overset{*}{\rightharpoonup}$ la convergence vague des mesures sur tout espace localement compact. En notant $\mathrm{Haar}_{\mathbb{R}}$ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$, quand $s \to +\infty$, nous avons (voir par exemple [2] pour une démonstration géométrique)

$$\frac{\pi^2}{6}\, s^{-2} \sum_{p,q\in\mathbb{Z},\ (p,q)=1,\ |q|\leq s} \Delta_{\frac{p}{q}} \overset{*}{\rightharpoonup} \mathrm{Haar}_{\mathbb{R}} \ .$$

Le but de cette note est de donner un analogue à ce résultat d'équidistribution de rationnels dans le cas des corps de fonctions, ainsi que des résultats d'équidistribution d'irrationnels quadratiques. Nous renvoyons à [1] pour des énoncés et démonstrations complets.

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini d'ordre q. Soient K le corps des fonctions d'une courbe projective lisse géométriquement irréductible $\mathbf{C}$ sur $\mathbb{F}_q$ de genre g, et v une valuation (discrète, normalisée) sur K. Soit K_v la complétion de K à la place v, d'anneau de valuation $\mathscr{O}_v$, de corps résiduel d'ordre q_v, et de valeur absolue $|\cdot|_v = {q_v}^{-v(\cdot)}$. Soit R_v l'anneau des fonctions de la courbe affine $\mathbf{C} - \{v\}$. Notons ζ_K la fonction zéta de Dedekind de K et Haar_{K_v} la mesure de Haar sur le groupe additif K_v normalisée pour que $\mathrm{Haar}_{K_v}(\mathscr{O}_v) = 1$.

Notre premier résultat est un résultat d'équidistribution, analogue à celui de Mertens, de l'orbite du point à l'infini $\infty = [1:0]$ par un sous-groupe d'indice fini (pas forcément de congruence) du groupe modulaire $\mathrm{PGL}_2(R_v)$ agissant par homographies sur les points rationnels sur K de $\mathbb{P}_1(K_v) = K_v \cup \{\infty\}$.

Théorème 1.1 *Pour tout sous-groupe d'indice fini G de $\mathrm{GL}({R_v}^2)$, quand $s \to +\infty$, nous avons*

$$\frac{(q_v^2-1)\,(q_v+1)\,\zeta_K(-1)\,[\mathrm{GL}({R_v}^2):G]}{q_v^3\,q^{\,g-1}\,[\mathrm{GL}({R_v}^2)_{(1,0)}:G_{(1,0)}]}\, s^{-2} \sum_{(x,y)\in G(1,0),\ |y|_v\leq s} \Delta_{\frac{x}{y}} \overset{*}{\rightharpoonup} \mathrm{Haar}_{K_v} \ .$$

Nous renvoyons à [1] pour l'énoncé général d'équidistribution dans $\mathbb{P}_1(K_v)$ de l'orbite de tout point de $\mathbb{P}^1(K)$ par G (intéressant lorsque le nombre de classes de K n'est pas 1), dont le résultat suivant se déduit : si $\mathfrak{m}$ est un idéal fractionnaire non nul de R_v, de norme $\mathtt{N}(\mathfrak{m})$, il existe $r_{\mathfrak{m}} \in \{1,\dots,q-1\}$ explicite et $\kappa > 0$ tels que, quand $s \to +\infty$, pour l'action par transvections $k\cdot(x,y) = (x+ky,y)$ de R_v sur $\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Card}\ \ R_v\backslash\Big\{(x,y)\in\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\ :\ 0<\frac{\mathtt{N}(y)}{\mathtt{N}(\mathfrak{m})}\leq s,\ \langle x,y\rangle=\mathfrak{m}\Big\}\\ &=\ \frac{(q-1)\,q^{\,2g-2}\,q_v^3}{(q_v^2-1)\,(q_v+1)\,\zeta_K(-1)\,r_{\mathfrak{m}}}\ s^2 + \mathrm{O}(s^{2-\kappa})\ .\end{aligned}$$

Donnons maintenant un échantillon de nos résultats d'équidistribution d'irrationnels quadratiques (voir [1] pour des énoncés et démonstrations complets), en supposant la caractéristique différente de 2. Si $\alpha \in K_v$ est un irrationnel quadratique sur K, notons α^σ son conjugué de Galois, $\mathtt{n}(x-y\alpha) = (x-y\alpha)(x-y\alpha^\sigma)$ pour tous les $x, y \in K$ la forme norme associée, et

$$h(\alpha) = \frac{1}{|\alpha - \alpha^\sigma|_v} ,$$

qui, comme nous allons le voir, est une complexité appropriée quand on regarde une orbite donnée du groupe modulaire $\mathrm{PGL}_2(R_v)$ sur des irrationnels quadratiques (notons que contrairement au cas rationnel, il y a une infinité de telles orbites). Notons $\cdot$ l'action par homographies de $\mathrm{GL}_2(K_v)$ sur $\mathbb{P}^1(K_v) = K_v \cup \{\infty\}$.

Théorème 1.2 *Pour tout sous-groupe d'indice fini G de $\mathrm{GL}_2(R_v)$ et tout irrationnel quadratique $\alpha_0 \in K_v$ sur K, quand $s \to +\infty$, nous avons*

$$\frac{(q_v+1)^2\ \zeta_K(-1)\ m_0\ [\mathrm{GL}_2(R_v) : G]}{2\ q_v^2\ (q-1)\ |v(\mathrm{tr}\, g_0)|}\ s^{-1} \sum_{\alpha \in G\cdot\alpha_0,\ h(\alpha)\le s} \Delta_\alpha \ \overset{*}{\rightharpoonup}\ \mathrm{Haar}_{K_v} ,$$

où $g_0 \in G$ fixe α_0 avec $v(\mathrm{tr}\, g_0) \neq 0$ et m_0 est l'indice de ${g_0}^{\mathbb{Z}}$ dans G_{α_0}.

Un autre résultat d'équidistribution d'orbites d'irrationnels quadratiques s'obtient en utilisant une complexité construite à partir de birapports d'irrationnels quadratiques. Nous noterons $[a,b,c,d] = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$ le birapport de quatre éléments de K_v deux à deux disjoints. Si $\alpha, \beta \in K_v$ sont deux irrationnels quadratiques sur K, tels que $\alpha \notin \{\beta, \beta^\sigma\}$, notons

$$h_\beta(\alpha) = \max\{|[\alpha,\beta,\beta^\sigma,\alpha^\sigma]|_v,\ |[\alpha^\sigma,\beta,\beta^\sigma,\alpha]|_v\} ,$$

qui, comme nous allons le voir, est une autre complexité appropriée quand α varie dans une orbite donnée du groupe modulaire $\mathrm{PGL}_2(R_v)$ sur des irrationnels quadratiques. Par invariance de la complexité h_β par $\mathrm{PGL}_2(R_v)_\beta$, nous obtenons alors une équidistribution vers une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Haar, invariante par $\mathrm{PGL}_2(R_v)_\beta$.

Théorème 1.3 *Pour tout sous-groupe d'indice fini G de $\mathrm{GL}_2(R_v)$ et tous les irrationnels quadratiques $\alpha_0, \beta \in K_v$ sur K, quand $s \to +\infty$, pour la convergence vague des mesures sur $K_v - \{\beta, \beta^\sigma\}$,*

$$\frac{(q_v+1)^2\ \zeta_K(-1)\ m_0\ [\mathrm{GL}_2(R_v) : G]}{2\ q_v^2\ (q-1)\ |\beta-\beta^\sigma|_v |v(\mathrm{tr}\, g_0)|}\ s^{-1} \sum_{\alpha \in G\cdot\alpha_0,\ h_\beta(\alpha)\le s} \Delta_\alpha \ \overset{*}{\rightharpoonup}\ \frac{d\,\mathrm{Haar}_{K_v}(z)}{|z-\beta|_v\, |z-\beta^\sigma|_v} .$$

Le dernier résultat arithmétique affirme l'équidistribution projective de représentations intégrales de formes normes quadratiques vers la même mesure que dans le théorème précédent.

Théorème 1.4 *Pour tout idéal non nul I de R_v (de norme $N(I)$) et tout irrationnel quadratique $\beta \in K_v$ sur K, quand $s \to +\infty$, pour la convergence vague des mesures sur $K_v - \{\beta, \beta^\sigma\}$, nous avons*

$$\frac{(q_v^2-1)\ (q_v+1)\ \zeta_K(-1)\ N(I)\prod_{\mathfrak{p}|I}(1+\frac{1}{N(\mathfrak{p})})}{q_v^3\ (q-1)^2\ q^{g-1}}\ s^{-1} \sum_{\substack{(x,y)\in R_v\times I,\ xR_v+yR_v=R_v \\ |\mathtt{n}(x-y\beta)|_v\le s}} \Delta_{\frac{x}{y}} \ \overset{*}{\rightharpoonup}\ \frac{d\,\mathrm{Haar}_{K_v}(z)}{|z-\beta|_v\, |z-\beta^\sigma|_v} .$$

Les quatre résultats d'équidistribution ci-dessus admettent un terme d'erreur en $\mathrm{O}(s^{-\kappa})$ pour un $\kappa > 0$ quand ils sont évalués sur une fonction localement constante à support compact. Nous renvoyons à [1] pour des analogues aux théorèmes 1.2 et 1.3 dans $\mathbb{Q}_p$.

2. Équidistribution de perpendiculaires communes dans des arbres

Nous donnons dans cette partie l'outil géométrique principal utilisé pour montrer les résultats de la partie précédente. Il relève de la théorie ergodique des flots géodésiques dans les arbres. Nous renvoyons à [4] pour toute information sur les actions de groupes sur les arbres.

Soient $q \in \mathbb{N}$ un entier au moins 2, $\mathbb{X}$ un arbre $(q+1)$-régulier, d'ensemble des sommets $V\mathbb{X}$ et de réalisation géométrique X, et $\operatorname{Aut}(\mathbb{X})$ le groupe localement compact des automorphismes sans inversion de $\mathbb{X}$. Soit Γ un réseau de $\operatorname{Aut}(\mathbb{X})$, c'est-à-dire un sous-groupe discret tel que $\Gamma\backslash\operatorname{Aut}(\mathbb{X})$ admette une mesure de probabilité invariante par $\operatorname{Aut}(\mathbb{X})$. Supposons que Γ préserve l'ensemble des sommets de $\mathbb{X}$ à distance paire d'un sommet donné. Pour toute partie E de $\mathbb{X}$, nous noterons Γ_E le stabilisateur de E dans Γ.

Nous noterons $\Gamma\backslash\backslash\mathbb{X}$ le graphe de groupes quotient de $\mathbb{X}$ par Γ et $\operatorname{vol}_{\Gamma\backslash\backslash\mathbb{X}}$ la mesure (de masse totale notée $\|\operatorname{vol}_{\Gamma\backslash\backslash\mathbb{X}}\|$) sur l'ensemble (discret) des sommets du graphe quotient $\Gamma\backslash\mathbb{X}$ définie par $\operatorname{vol}_{\Gamma\backslash\backslash\mathbb{X}} = \sum_{[x]\in\Gamma\backslash V\mathbb{X}} \frac{1}{|\Gamma_x|}\,\Delta_{[x]}$.

L'espace dans lequel aura lieu l'équidistribution est l'espace (de Bartels-Lück) localement compact $\check{\mathscr{G}}\mathbb{X}$ des géodésiques généralisées de $\mathbb{X}$, c'est-à-dire des applications continues $\ell : \mathbb{R} \to X$ telles que $\ell(0) \in V\mathbb{X}$, isométriques sur un intervalle fermé (à extrémités dans $\mathbb{Z}$) de $\mathbb{R}$, et constante sur chaque composante du complémentaire. Il est muni de l'action de $\operatorname{Aut}(\mathbb{X})$ par postcomposition et de l'action du flot géodésique (à temps $t \in \mathbb{Z}$ discret) $(t,\ell) \mapsto \{s \mapsto \ell(s+t)\}$. Il contient le sous-espace fermé $\mathscr{G}\mathbb{X}$ des géodésiques complètes (isométriques sur $\mathbb{R}$).

Soient $\mathbb{D}^\pm$ deux sous-arbres de $\mathbb{X}$, propres et non vides, tels que les familles $(\gamma\mathbb{D}^\pm)_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_{\mathbb{D}^\pm}}$ soient localement finies dans $\mathbb{X}$. Notons $\partial^1_\mp\mathbb{D}^\pm$ le sous-espace fermé de $\check{\mathscr{G}}\mathbb{X}$ des rayons géodésiques ρ rentrant/sortant de $\mathbb{D}^\pm$, c'est-à-dire isométriques sur exactement $\mp[0,+\infty[$, avec $\rho(0) \in \mathbb{D}^\pm$ et $\rho(t) \notin \mathbb{D}^\pm$ si $\mp t > 0$. Il porte une mesure borélienne $\widetilde{\sigma}^\mp_{\mathbb{D}^\pm}$ naturelle, dont la restriction au sous-espace des rayons géodésiques rentrant dans/sortant de $\mathbb{D}^\pm$ en un point x donné de $V\mathbb{D}^\pm$ est la restriction à ce sous-espace de l'unique mesure de probabilité invariante par $\operatorname{Aut}(\mathbb{X})_x$ sur l'espace des rayons géodésiques d'origine x.

Le résultat principal est un théorème d'équidistribution simultanée des segments perpendiculaires communs entre $\mathbb{D}^-$ et $\gamma\mathbb{D}^+$ lorsque γ varie dans Γ. Si $\mathbb{D}^-$ et $\gamma\mathbb{D}^+$ sont disjoints, nous noterons $\lambda_\gamma = d(\mathbb{D}^-, \gamma\mathbb{D}^+)$ la longueur du segment perpendiculaire commun et $\alpha^-_\gamma : [0,\lambda_\gamma] \to X$, $\alpha^+_\gamma : [-\lambda_\gamma, 0] \to X$ les deux paramétrages avec $\alpha^-_\gamma(0) \in \mathbb{D}^-$ et $\alpha^+_\gamma(0) \in \mathbb{D}^+$ du segment perpendiculaire commun, considérés comme des géodésiques généralisées par prolongement localement constant hors de $]0,\lambda_\gamma[$ et $]-\lambda_\gamma, 0[$.

Théorème 2.1 *Quand $t \to +\infty$, pour la convergence vague des mesures sur $\check{\mathscr{G}}\mathbb{X} \times \check{\mathscr{G}}\mathbb{X}$, nous avons*

$$\frac{(q^2-1)\,(q+1)}{2\,q^2}\,\|\operatorname{vol}_{\Gamma\backslash\backslash\mathbb{X}}\|\,q^{-t} \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma/\Gamma_{\mathbb{D}^+}\\ 0<\lambda_\gamma\le t}} \Delta_{\alpha^-_\gamma} \otimes \Delta_{\gamma^{-1}\alpha^-_\gamma} \;\overset{*}{\rightharpoonup}\; \widetilde{\sigma}^+_{\mathbb{D}^-} \otimes \widetilde{\sigma}^-_{\mathbb{D}^+}\,.$$

Si Γ est un réseau géométriquement fini, alors ce résultat d'équidistribution admet un terme d'erreur en $\operatorname{O}(q^{-\kappa\, t})$ pour un $\kappa > 0$ quand il est évalué sur une fonction localement constante à support compact. D'après [3], le groupe Γ est un réseau géométriquement fini si et seulement si le graphe de groupes $\Gamma\backslash\backslash\mathbb{X}$ est réunion d'un graphe fini de groupes et d'un nombre fini de rayons de groupes cuspidaux (c'est-à-dire dont les stabilisateurs des arêtes orientées vers le bout fixent leur origine).

La démonstration, pour laquelle nous renvoyons à [1], utilise la propriété de mélange pour le carré du flot géodésique sur le quotient par Γ de l'espace des géodésiques complètes d'origine à distance paire d'un point base, muni de la restriction de la mesure de Bowen-Margulis (ou mesure d'entropie maximale). Nous montrons d'ailleurs que l'image de cette mesure sur $\Gamma\backslash\mathscr{G}\mathbb{X}$ par l'application origine $\ell \mapsto \ell(0)$ est un multiple de la mesure $\mathrm{vol}_{\Gamma\backslash\backslash\mathbb{X}}$ sur $\Gamma\backslash V\mathbb{X}$. Le terme d'erreur lorsque Γ est un réseau géométriquement fini utilise la propriété de décroissance exponentielle des corrélations du mélange.

Nous concluons cette note en donnant des indications sur la déduction du théorème 1.1 à partir du théorème 2.1, quand, pour simplifier, K est le corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}_q(Y)$ en une variable sur $\mathbb{F}_q$, la valuation v est $v_\infty : \frac{P}{Q} \mapsto \deg Q - \deg P$, de sorte que $g = 0$, $q_v = q$, $R_v = \mathbb{F}_q[Y]$, et $G = \mathrm{GL}_2(R_v)$.

Prenons pour $\mathbb{X}$ l'arbre de Bruhat-Tits de (PGL_2, K_v) (voir [4]), dont les sommets sont les classes d'homothéties de $\mathscr{O}_v$-réseaux de $K_v \times K_v$, dont l'espace des bouts $\partial_\infty\mathbb{X}$ s'identifie avec $\mathbb{P}_1(K_v) = K_v \cup \{\infty\}$, de sorte que l'ensemble des extrémités en $+\infty$ des géodésiques complètes dont l'extrémité en $-\infty$ est le point $\infty \in \mathbb{P}_1(K_v)$ et qui passent par $*_v = [\mathscr{O}_v \times \mathscr{O}_v]$ soit exactement $\mathscr{O}_v$.

Prenons pour Γ le réseau de Nagao $\mathrm{PGL}_2(R_v)$ (voir par exemple [5]), dont le graphe de groupes quotient $\Gamma\backslash\backslash\mathbb{X}$ est formé d'un rayon cuspidal recollé en son origine à une arête de groupes, et dont le covolume $\|\, \mathrm{vol}_{\Gamma\backslash\backslash\mathbb{X}} \,\| = \frac{2}{(q-1)(q^2-1)}$ est bien connu.

Prenons pour sous-arbres $\mathbb{D}^-$ et $\mathbb{D}^+$ tous deux l'horoboule $\mathscr{H}_\infty$ de $\mathbb{X}$ centrée en $\infty \in \mathbb{P}_1(K_v)$, dont le bord passe par $*_v$, de sorte que si $\beta_\infty(x, y) = \lim_{z\to\infty} d(x, z) - d(y, z)$, alors $V\mathbb{D}^- = V\mathbb{D}^+ = \{x \in V\mathbb{X} : \beta_\infty(x, *_v) \leq 0\}$. Notons que si θ est l'application continue et propre qui à un rayon géodésique de $\partial^1_+\mathbb{D}_-$ associe son point à l'infini, alors $\theta_*(\widetilde{\sigma}^+_{\mathbb{D}^-}) = \frac{q}{q+1}\ \mathrm{Haar}_{K_v}$.

Un petit calcul montre que l'image par γ de $\mathbb{D}^+$ est l'horoboule de $\mathbb{X}$ centrée en $\gamma\infty = \frac{a}{c}$ avec $a, b \in R_v$ premiers entre eux, et dont le segment de perpendiculaire commun avec $\mathbb{D}^-$ est de longueur $-2\, v(c) = 2\frac{\ln |c|_v}{\ln q_v}$. L'application prolongeant ce segment en un rayon géodésique de point à l'infini $\gamma\infty$ étant uniformément continue, par le changement de variable $s = q_v^{\frac{t}{2}}$ et par la continuité de θ_* pour les topologies vagues, le théorème 1.1 découle du théorème 2.1 (en ne considérant que la première composante).

Les théorèmes 1.2, 1.3 et 1.4 s'obtiennent de même en prenant $\mathbb{D}^- = \mathscr{H}_\infty$ et $\mathbb{D}^+ =]\alpha_0, \alpha_0^\sigma[$ la géodésique de $\mathbb{X}$ de points à l'infini $\alpha_0, \alpha_0^\sigma$ pour le premier, $\mathbb{D}^- =]\beta, \beta^\sigma[$ et $\mathbb{D}^+ =]\alpha_0, \alpha_0^\sigma[$ pour le second, et $\mathbb{D}^- =]\beta, \beta^\sigma[$ et $\mathbb{D}^+ = \mathscr{H}_\infty$ pour le troisième.

Références

[1] A. Broise-Alamichel, J. Parkkonen et F. Paulin. *Equidistribution and counting under equilibrium states in negatively curved spaces and graphs of groups. Applications to non-Archimedean Diophantine approximation.* Livre en préparation.

[2] J. Parkkonen et F. Paulin. *On the arithmetic of crossratios and generalised Mertens' formulas.* Numéro Spécial ≪ Aux croisements de la géométrie hyperbolique et de l'arithmétique ≫, F. Dal'Bo, C. Lecuire eds, Ann. Fac. Scien. Toulouse **23** (2014) 967–1022.

[3] F. Paulin. *Groupes géométriquement finis d'automorphismes d'arbres et approximation diophantienne dans les arbres.* Manuscripta Math. **113** (2004) 1–23.

[4] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames, SL_2.* 3ème éd. corr., Astérisque **46**, Soc. Math. France, 1983.

[5] A. Weil. *On the analogue of the modular group in characteristic p.* In "Functional Analysis and Related Fields" (Chicago, 1968), F. Browder ed, pp. 211–223, Springer, 1970.