Une version (quasi-)soluble du problème d'O'Connell–Yor

Alexandre Boyer

27 mai 2020

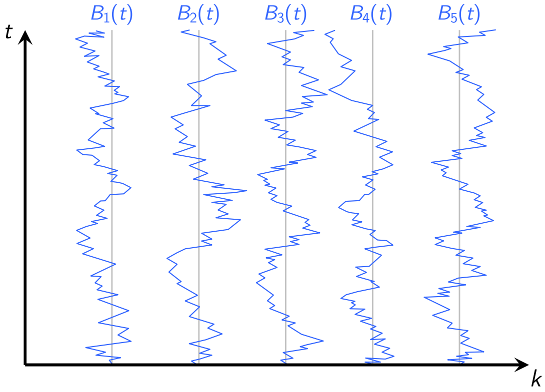
Doctorant au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay.
Thèse encadrée par Arvind Singh et Nathanaël Enriquez.

Introduction

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$L_n(B) \doteq \sup_{0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=1} \left(\sum_{k=1}^{n} [B_k(t_k) - B_k(t_{k-1})] \right),$$

où les (B_i) sont des mouvements browniens standards indépendants.



Théorème [Bar01, GTW01]

Si $\lambda^n_{\max}$ désigne la plus grande valeur propre d'une matrice GUE $n \times n$, alors

$$L_n(B) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \lambda^n_{\max}.$$

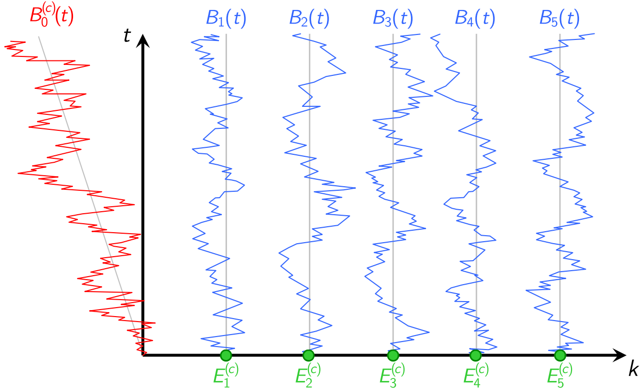
Corollaire

- On a
$$\frac{L_n(B)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 2.$$
- Plus précisément,
$$n^{1/6}(L_n(B) - 2\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} F_2,$$
où F_2 désigne la loi de Tracy–Widom.

Modèle & résultats

On considère les variables et processus suivants, tous indépendants :

- $B = (B_1, \ldots, B_n)$ des mouvements browniens standards,
- $B_0^{(c)}$ un mouvement brownien standard drifté de drift $c > 0$,
- $E^{(c)} = (E_1^{(c)}, \ldots, E_n^{(c)})$ des v.a. de loi exponentielle de paramètre c.

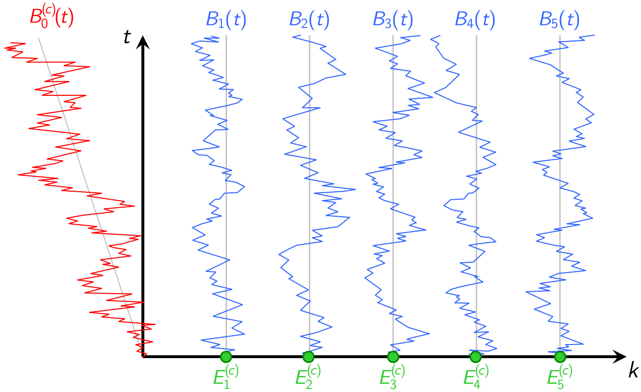


On pose pour $n \in \mathbb{N}^*, c > 0$:

$$L_n^*(E^{(c)}, B_0^{(c)}, B) := \sup_{i, t_0, \dots, t_{n-1}} \left(\sum_{k=1}^{i} E_k^{(c)} + B_0^{(c)}(t_0) + \sum_{k=1}^{n} [B_k(t_k) - B_k(t_{k-1})] \right),$$

où le sup est effectué sur l'ensemble

$$\{(i, t_0, \dots, t_{n-1}) : i \in [\![0, n]\!] \;;\; \forall j \leqslant i-1, t_j = 0 \;;\; 0 < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = 1\}.$$



On a alors :

Théorème 1

(i) Il existe une v.a $\Gamma_n^{(c)}$ de loi $\Gamma(n, c)$ telle que

$$L_n^*\left(E^{(c)}, B_0^{(c)}, B\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_0^{(c)}(1) + \Gamma_n^{(c)}.$$

(ii) De plus,

$$\mathrm{Cov}\left(B_0^{(c)}(1), \Gamma_n^{(c)}\right) \leqslant 0.$$

En prenant $c = \sqrt{n}$, on peut retrouver le premier ordre du modèle initial :

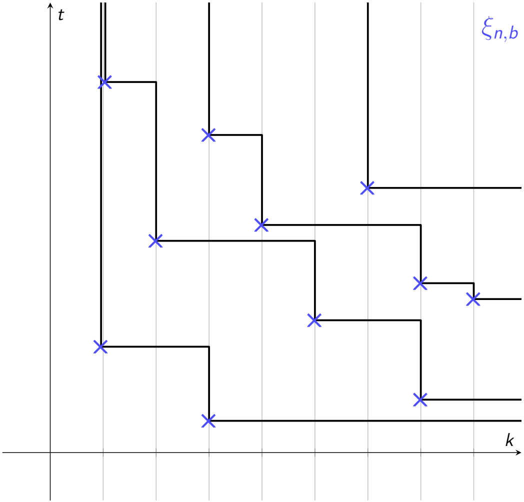
Corollaire 2

$$\frac{L_n(B)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 2.$$

Modèle discret

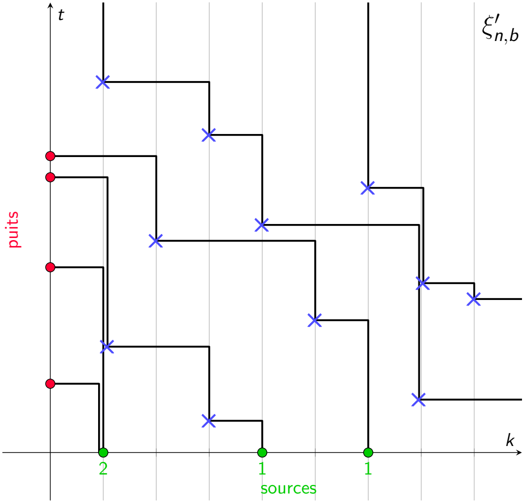
Lignes de Hammersley

$\xi_{n,b} \subset [\![1, n]\!] \times]0, b]$



Sources et puits

$\xi'_{n,b} \subset [\![0, n]\!] \times [0, b]$



Plus longue sous-suite croissante

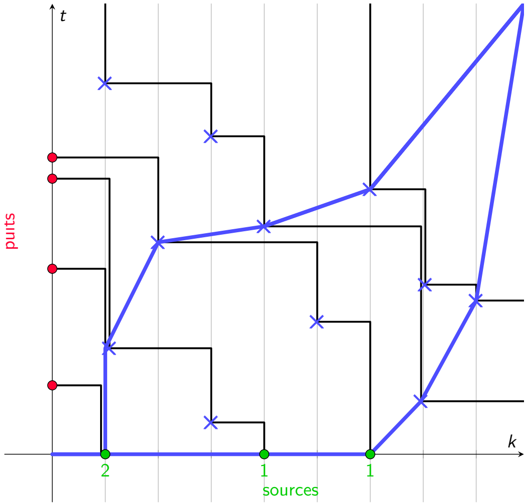
Relation d'ordre sur $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$:

$$(k,t) \prec (k',t') \Leftrightarrow \begin{cases} k \leqslant k' \text{ et } t < t' \\ \text{ou} \\ k < k' \text{ et } t = t'. \end{cases}$$

Lemme

La longueur de la plus longue sous-suite croissante de $\xi_{n,b}$ [resp. $\xi'_{n,b}$] pour $\prec$ est égale au nombre de lignes de Hammersley différentes construites avec $\xi_{n,b}$ [resp. $\xi'_{n,b}$].

Construction



Ajout d'aléa

$(X_k)_{k\geqslant 1}$: processus de Poisson indépendants d'intensité 1, vus comme évoluant sur $\{k\} \times \mathbb{R}_+$ respectivement.

$\xi_{n,b}$: points de sauts des processus jusqu'au temps b.

$\widetilde{X}_0$: autre processus de Poisson, indépendant des autres, d'intensité $\lambda > 1$ fixée, vu comme évoluant sur $\{0\} \times \mathbb{R}_+$

Puits : points de sauts de $\widetilde{X}_0$ jusqu'au temps b.

$(G_k)_{k\geqslant 1}$: v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des processus de loi à déterminer pour rendre le modèle stationnaire en temps.

Sources : en nombre G_k au point $(k, 0)$.

Réécriture de L et L^*

$$L_{n,b} := L_{n,b}(X) = \sup_{0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b} \left(\sum_{k=1}^{n} [X_k(t_k) - X_k(t_{k-1})] \right),$$

$$L^*_{n,b} := L^*_{n,b}(G, \widetilde{X}_0, X) = \sup_{i,t_0,\dots,t_n} \left(\sum_{k=1}^{i} G_k + \widetilde{X}_0(t_0) + \sum_{k=1}^{n} [X_k(t_k) - X_k(t_{k-1})] \right),$$

où le sup est effectué sur l'ensemble

$$\{(i, t_0, \dots, t_{n-1}) : i \in [\![0, n]\!] \; ; \; \forall j \leqslant i-1, t_j = 0 \; ; \; 0 < t_i < \cdots < t_n = b\}.$$

Processus de Markov

$N_k(t)$: nombre de lignes de Hammersley traversant le point (k, t).

$(N_k(t))_{k \leqslant n, t \in \mathbb{R}_+}$ est une chaîne de Markov, de loi stationnaire

$$\mathcal{G}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{\otimes n},$$

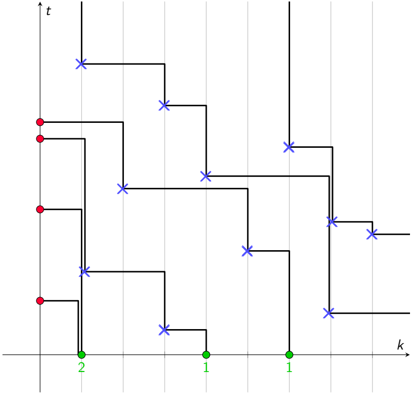
avec comme convention

$$G \sim \mathcal{G}(p) \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(G = i) = p(1-p)^i.$$

Observation clé

Chaque ligne de Hammersley sort de $[\![1,n]\!]\times]0,b]$ soit par un puits, soit par $[\![1,n]\!]\times\{b\}$:

$$L^*_{n,b} = \underbrace{\widetilde{X}_0(b)}_{\sim\mathcal{P}(\lambda b)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} N_k(b)}_{\sim\mathcal{BN}(n,1-\lambda^{-1})} \qquad (*)$$



Du discret au continu

But : transformer les processus de Poisson en mouvements browniens.
On prend $\lambda = 1 + \frac{c}{\sqrt{b}}$, avec $c > 0$, et on pose :

$$Y_{k,b}(t) := \frac{X_k(tb) - tb}{\sqrt{b}} \quad ; \quad \widetilde{Y}_{0,b}(t) := \frac{\widetilde{X}_0(tb) - tb}{\sqrt{b}} \quad ; \quad H_{k,b} := \frac{G_k}{\sqrt{b}}.$$

On a alors :

$$(H_{\cdot,b}, \widetilde{Y}_{0,b}, Y_{\cdot,b}) \xrightarrow[b \to \infty]{\mathcal{L}} \left(E^{(c)}, B_0^{(c)}, B \right).$$

Éléments de preuve du Théorème 1 (i)

Rappel : Il existe une v.a $\Gamma_n^{(c)}$ de loi $\Gamma(n, c)$ telle que $L_n^*\Big(E^{(c)}, B_0^{(c)}, B\Big) \overset{\mathcal{L}}{=} B_0^{(c)}(1) + \Gamma_n^{(c)}$.

Par continuité,

$$L_n^*(H_{\cdot,b}, \widetilde{Y}_{0,b}, Y_{\cdot,b}) \xrightarrow[b\to\infty]{\mathcal{L}} L_n^*\Big(E^{(c)}, B_0^{(c)}, B\Big).$$

Grâce à l'observation clé $(*)$:

$$\begin{aligned} L_n^*(H_{\cdot,b}, \widetilde{Y}_{0,b}, Y_{\cdot,b}) \quad &= \quad \widetilde{Y}_{0,b}(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k(b)}{\sqrt{b}} \\ &\xrightarrow[b\to\infty]{\mathcal{L}} B_0^{(c)}(1) + \Gamma_n^{(c)}. \end{aligned}$$

Approfondissements

Éléments de preuve du Théorème 1 (ii)

Rappel : $\mathrm{Cov}\left(B_0^{(c)}(1), \Gamma_n^{(c)}\right) \leqslant 0.$

Modèle discret, sources et croix fixées.

Relation d'ordre partielle sur les puits $\widetilde{X}_0 \implies$ monotonie sur le nombres de lignes qui sortent par le haut $\sum_{k=1}^n N_k(b)$.

Inégalité de Harris $\implies \mathrm{Cov}\left(\widetilde{X}_0(b), \sum_{k=1}^n N_k(b)\right) \leqslant 0$

Renormalisation + convergence $L^1 \implies \mathrm{Cov}\left(B_0^{(c)}(1), \Gamma_n^{(c)}\right) \leqslant 0.$

Éléments de preuve du Corollaire 2 (inspirée de [BEGG16])

Rappel : $\frac{L_n(B)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 2.$

Idée : faire varier c avec n. Pour $c = \sqrt{n}$, $\frac{L_n^{(\sqrt{n})}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 2.$

Encadrement entre les modèles : $L_n^{(\sqrt{n})} - \#\text{puits} - \#\text{sources} \leqslant L_n \leqslant L_n^{(\sqrt{n})}.$

Arguments de concentration : $\#\text{puits} = o(\sqrt{n})$ p.s. et dans L^1, idem pour $\#$sources.

Perspectives

- Application du Corollaire 2 ?
- Géométrie du chemin optimal ?
- Convergence du processus $\left(\frac{N_k(tb)}{\sqrt{b}}\right)_{t\geqslant 0}$ pour $b \to \infty$?

Bibliographie

Yu. Baryshnikov.
Gues and queues.
Probability Theory and Related Fields, 119(2) :256–274, Feb 2001.

A-L Basdevant, N Enriquez, L Gerin, and J-B Gouéré.
Discrete Hammersley's Lines with sources and sinks.
ALEA : Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics, 13(1) :33–52, 2016.

Janko Gravner, Craig Tracy, and Harold Widom.
Limit theorems for height fluctuations in a class of discrete space and time growth models.
Journal of Statistical Physics, 102, 05 2001.