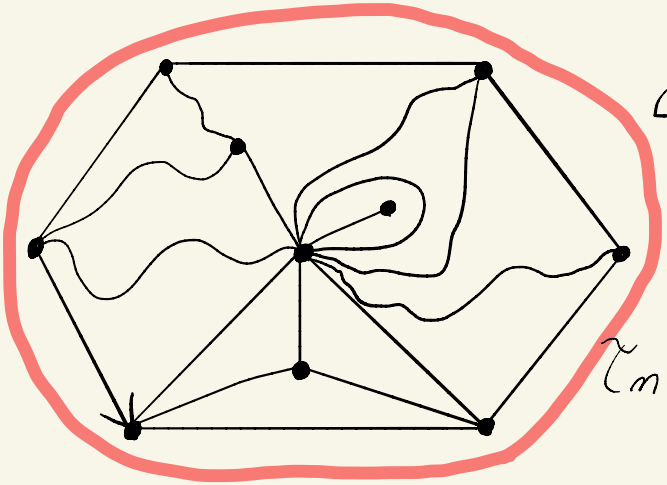
Processus de croissance-fragmentation et géométrie brownienne*

Travail en collaboration avec J.-F. Le Gall.

* Financé par l'ERC Geobrown

Triangulations du p-gon :



← Bord

$\mathcal{T}_n := \left\{ \begin{array}{l} \text{Tri. du p-gon} \\ \text{à } n\text{-sommets} \end{array} \right\}$

Tri. du 6-gon

$$\# \mathcal{T}_n \underset{n \to \infty}{\sim} C_p \frac{(12\sqrt{3})^n}{n^{5/2}}$$

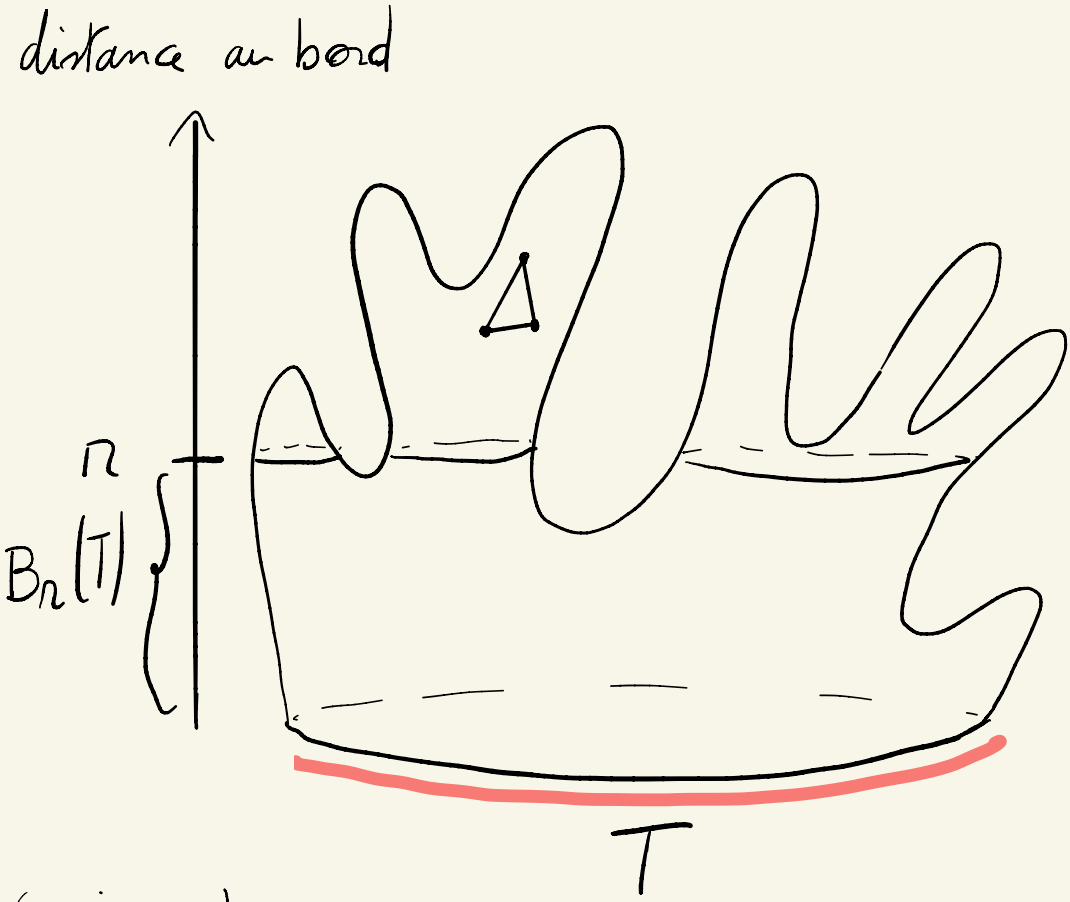
On pose :

$$\mathbb{P}_p(T) = \frac{q_c^{|T|}}{Z_p}$$

← const. de normalisation.

avec $q_c = (12\sqrt{3})^{-1}$.

Representation en cactus :

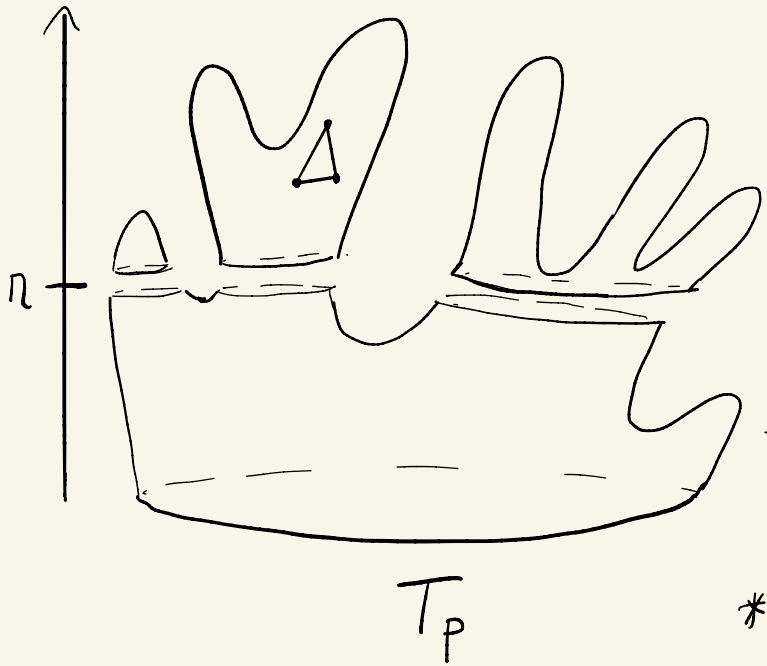


$(C_r^i(T))_{i\in\mathbb{N}}$ comp. connexe de $T \setminus B_r(T)$.

$L_r^i(T)$ longueur du bord de $C_r^i(T)$.

Propriété de Markov :

$T_p \sim \mathbb{P}_p$



Cond. à $(L_n^i(T_p))_{i\in\mathbb{N}}$:

* $(C_n^i(T_p))_{i\in\mathbb{N}}$ sont indépendants.
* $C_n^i(T_p) \sim \mathbb{P}_{L_n^i(T_p)}$

Théorème (B-C-K) :

Fixe $g > 0$

$$\left(\left(\frac{1}{p} L^i_{\sqrt{p}\,n}(T_{gp})\right)_{i\in\mathbb{N}}\right)_{n\geq 0} \xrightarrow[p\to\infty]{(d)} \text{GFP}\left(\tfrac{1}{2};\psi\right)\text{-stable}$$

commençant en g.

avec :

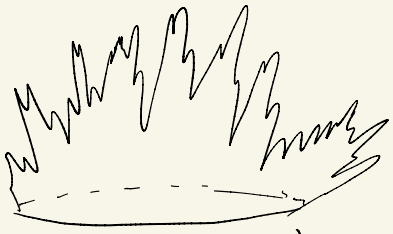
$$\psi(\lambda) := -2\sqrt{\frac{8}{3\pi}}\,\lambda + \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\int_{-\log(2)}^{0}\left(e^{\lambda y} - 1 - \lambda(e^y - 1)\right) e^{\frac{y}{2}}(1-e^y)^{-\frac{5}{2}}\,dy$$

Limite d'échelle :

$(T; d_{gr})$ est un espace metrique compact.

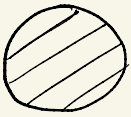
$g > 0$

$$\left(T_{pg}; \frac{1}{\sqrt{p}} d_{gr}\right) \xrightarrow[p \to \infty]{(d)}$$



$(FBD_g; D)$

(Bettinelli, Miermont, Le Gall ...)

$FBD_g \simeq$  p.s.

$\dim_H(FBD_g) = 4$

FBD_g est muni d'une mesure de volume

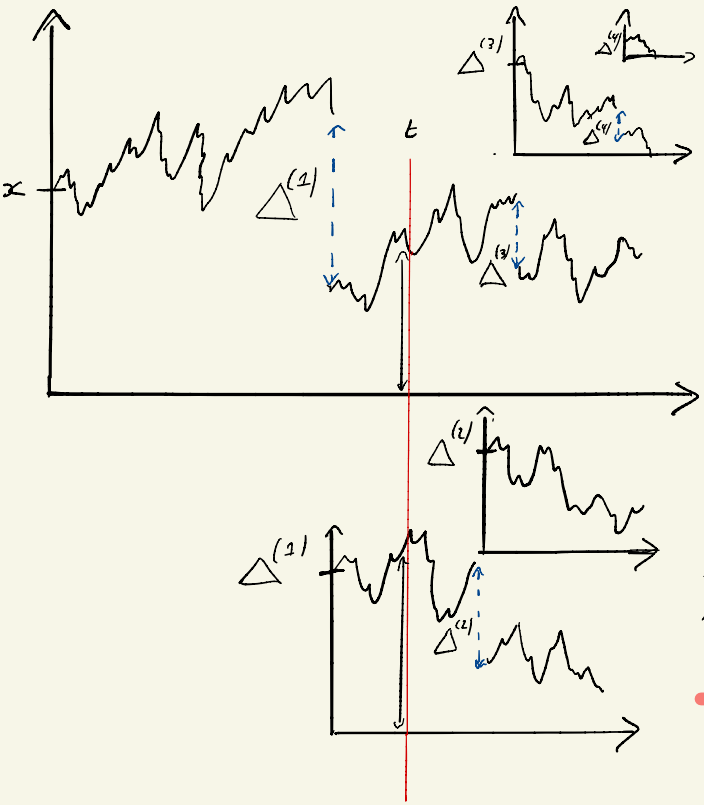
V.

GFP :

$X : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ Markovian :

$$\lim_{t \to \infty} X_t = 0 \quad ; \quad \forall t \geq 0 \quad \Delta X_t \leq 0$$

GFP induit par X commençant en x :



Chaque instant t où un saut Δ a lieu produit une particule de masse Δ est créée.

$$\mathbb{X}(t) := \left\{ \begin{array}{c} \text{collection des} \\ \text{masses à l'instant} \\ t \geq 0 \end{array} \right\}$$

Cas autosimilaire :

X α - autosimilaire :

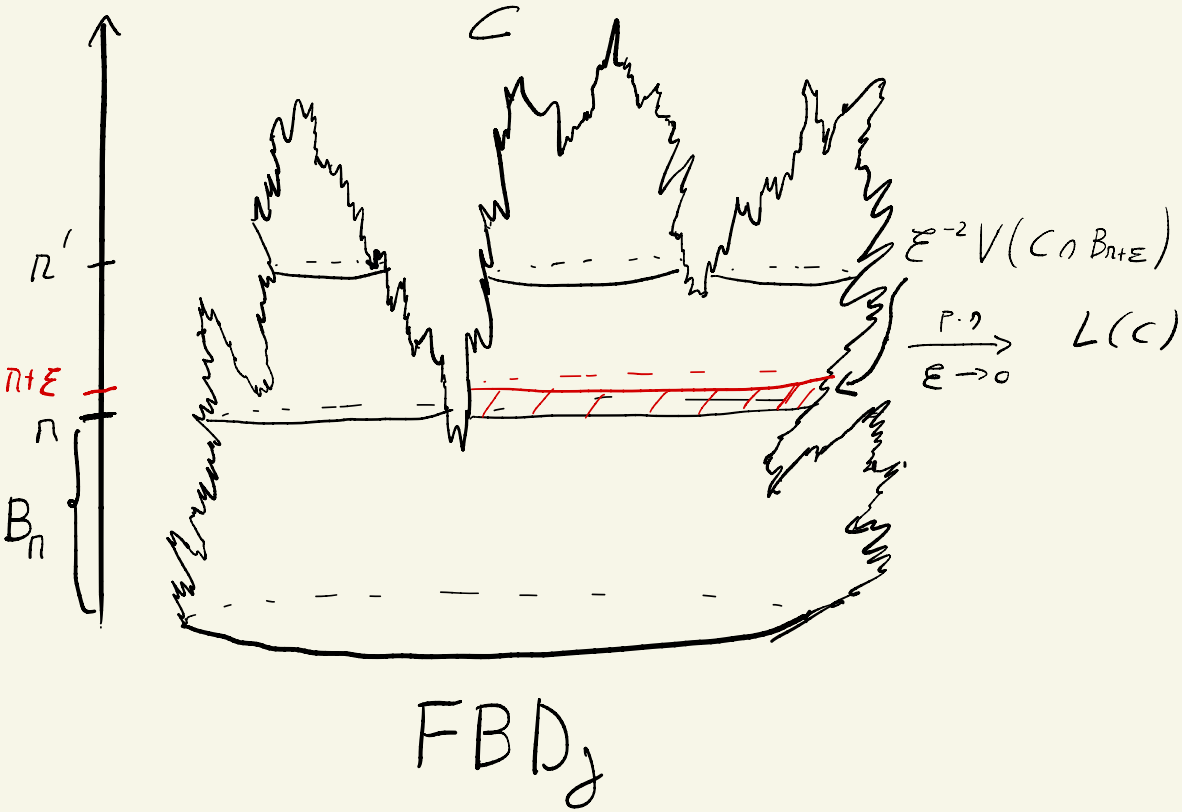
$$\underset{\mathbb{P}_x}{\underset{\wr}{(X_t)_{t\geq 0}}} \overset{(d)}{=} \underset{\mathbb{P}_1}{\underset{\wr}{\left(x\, X_{\frac{t}{x^\alpha}}\right)_{t\geq 0}}}$$

$\exists!\ \xi$ processus de Lévy $(\xi_0 = 0)$:

$$\underset{\mathbb{P}_x}{\underset{\wr}{(X_t)_{t\geq 0}}} \overset{(d)}{=} \left(x\, e^{\xi_{\gamma\left(\frac{t}{x^\alpha}\right)}}\right)_{t\geq 0}$$

$$\gamma(t) := \inf\left\{ r \geq 0 ;\ \int_0^r e^{\alpha \xi_s}\, ds \geq t \right\}$$

Généalogie des bords :



$(C_n^i)_{i \in \mathbb{N}}$ comp. connexes de $FBD_\gamma \setminus B_n$.

$L_n^i := L(C_n^i)$ longueur du bord de C_n^i.

Théorème (Le Gall - R) :

(i) $\left((L_n^i)_{i \in \mathbb{N}} \right)_{n \geq 0}$ est un GFP

$(\frac{1}{2}, \psi)$ autosimilaire.

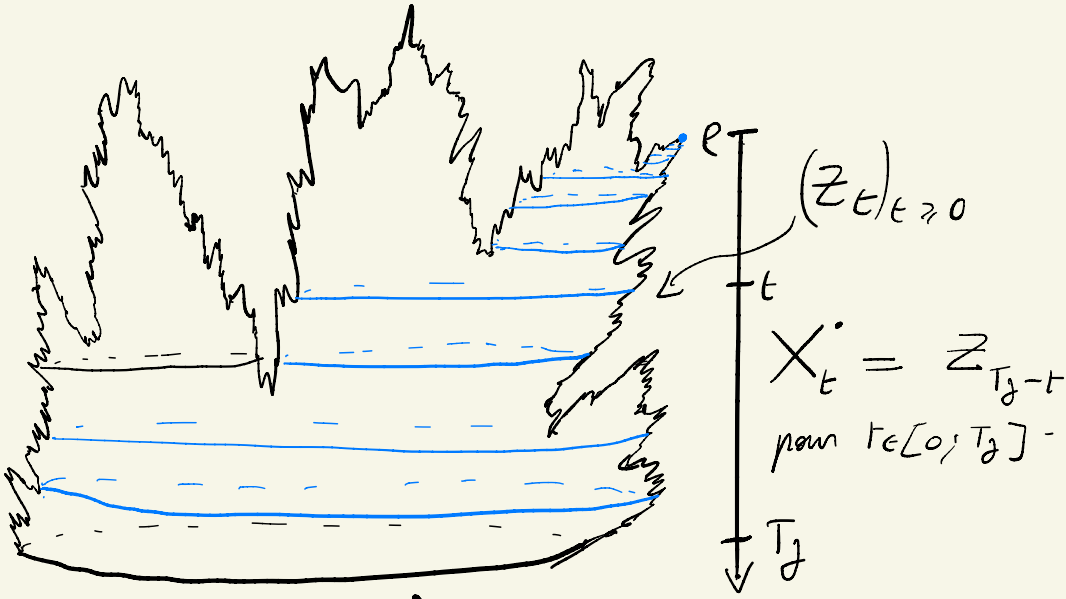
(ii) Cond. à $(L_n^i)_{i \in \mathbb{N}}$:

* $(C_n^i)_{i \in \mathbb{N}}$ indépendants

* $C_n^i \sim FBD_{L_n^i}$

FBD_γ pointé :

$FBD_\gamma^\bullet \overset{(d)}{=} FBD_\gamma$ + un point marqué, e, uniformément selon V.



$FBD_\gamma^\bullet$

Cas $\gamma = 0$: Sphère Brownienne.

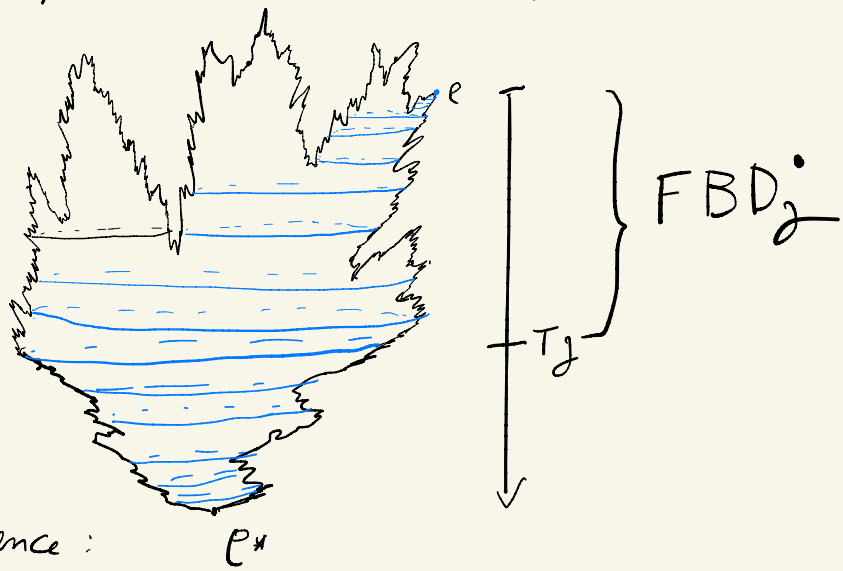
$(Z_t)_{t\geq 0}$ excursion d'un processus de branchement de mécanisme $\lambda \mapsto \sqrt{\frac{8}{3}}\lambda^{\frac{3}{2}}$.

Couplage avec la sphère Brownienne :

Proposition :

Z cond. à $\sup Z \geq g$:

$T_g := \sup\{t \geq 0 ; Z_t \geq g\}$



Conséquence :

Soit $\xi^{\bullet}$ un $\psi^{\bullet}$-processus de Lévy avec :

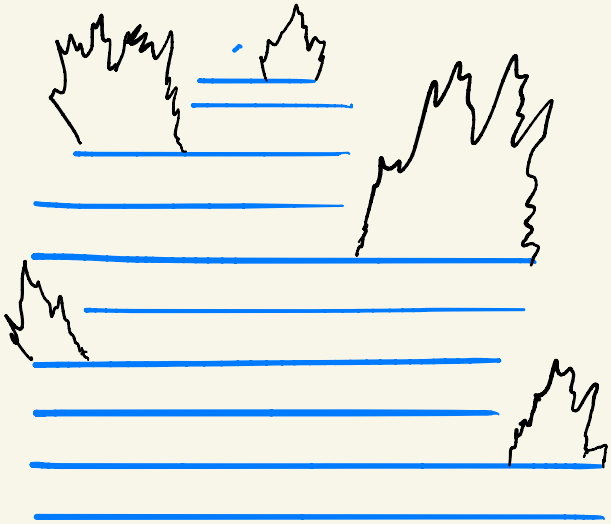
$$\psi^{\bullet}(\lambda) := \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \left(e^{\lambda y} - 1 - \lambda(e^{y}-1)\right) e^{\frac{y}{2}} (1-e^{y})^{-\frac{5}{2}} dy$$

Sur FBD_g :

$$\left(X_t^{\bullet}\right)_{t \geq 0} = \left(g\, e^{\xi^{\bullet}_{\gamma^{\bullet}\left(\frac{t}{\sqrt{g}}\right)}}\right)_{t \geq 0}$$

avec $\gamma^{\bullet}(t) := \inf\left\{r \geq 0 ; \int_0^r e^{\frac{1}{2}\xi^{\bullet}_r} dr \geq t\right\}$.

Composantes non explorées :



Soit $(C^{i,\bullet})_{i\in\mathbb{N}}$ les comp. connexes de $FBD_g \setminus$ Bleu

$$C^{i,\bullet} \xleftrightarrow{\text{big}} \text{Sauts de } Z$$

Proposition :

cond. à Z :

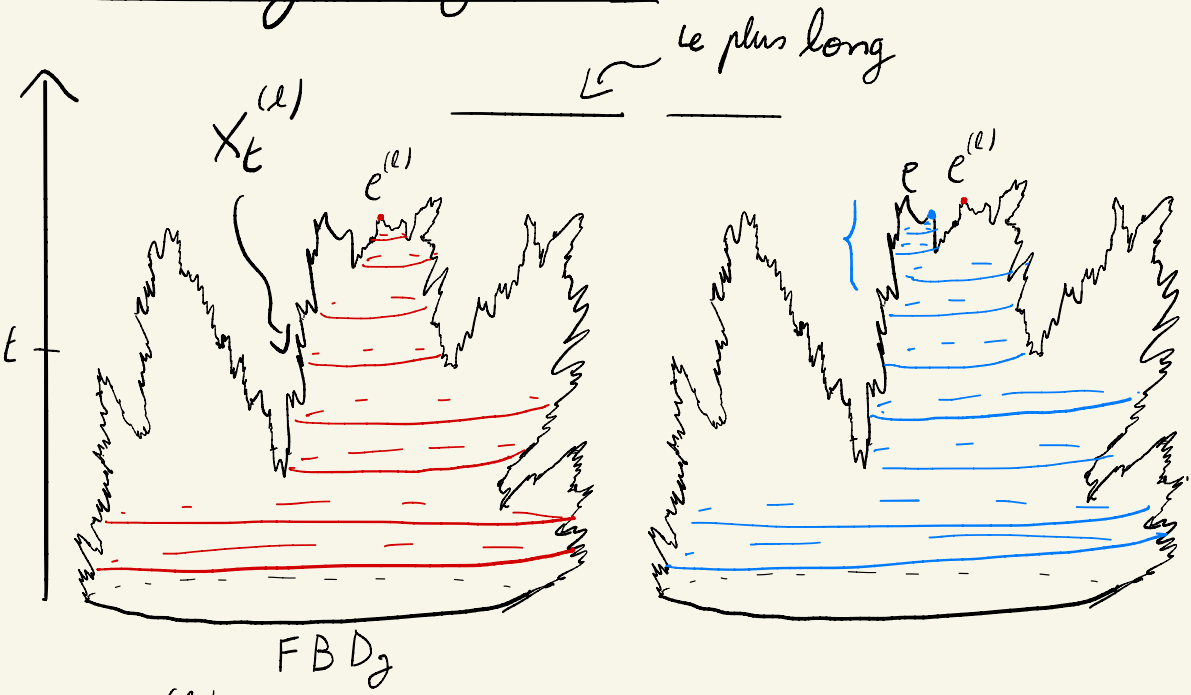
* $(C^{i,\bullet})_{i\in\mathbb{N}}$ indépendants. * $C^{i,\bullet} \sim FBD_{|\Delta Z_{t_i}|}$

Par retournement du temps :

cond. à $X^\bullet$:

* $(C^{i,\bullet})_{i\in\mathbb{N}}$ indépendants. * $C^{i,\bullet} \sim FBD_{|\Delta X^\bullet_{t_i}|}$

Locally largest :



$$X_t^{(\ell)} \overset{(d)}{=} X_t^{\cdot} \text{ cond. à } |\Delta X_t^{\cdot}| < X_t^{\cdot}$$

pour tout $t \geq 0$. $\left(|\Delta \xi_t^{\cdot}| < \log 2\right)$

Conséquence :

$X^{(\ell)}$ processus de Markov $(\frac{1}{2}; 4)$ autosimilaire.

Soit $(C^{i,\ell})_{i\in\mathbb{N}}$ les comp. connexes de $FBD_g \setminus$ Rouge.

Cond. à $X^{(\ell)}$:

* $(C^{i,\ell})_{i\in\mathbb{N}}$ indépendants. * $C^{i,\ell} \sim FBD_{|\Delta X_{t_i}^{(\ell)}|}$

Merci pour votre écoute.