Le modèle de la Quasi espèce

Maxime Berger

Ecole normale supérieure

May 27, 2020

Manfred Eigen

Manfred Eigen, Nobel de Chimie 1967.

Une population mathématique

Un individu est codé par son génôme: une suite finie de 0 et de 1.

Une population mathématique

Un individu est codé par son génôme: une suite finie de 0 et de 1.

Mutations Lorsqu'un individu doit muter, chaque bit de son génôme est changé avec probabilité q, indépendament des autres.

Une population mathématique

Un individu est codé par son génôme: une suite finie de 0 et de 1.

Mutations Lorsqu'un individu doit muter, chaque bit de son génôme est changé avec probabilité q, indépendamant des autres.

Sélection A chaque chaîne est associée une fitness, indiquant le nombre moyen de descendants.

Une population mathématique

Un individu est codé par son génôme: une suite finie de 0 et de 1.

Mutations Lorsqu'un individu doit muter, chaque bit de son génôme est changé avec probabilité q, indépendament des autres.

Sélection A chaque chaîne est associée une fitness, indiquant le nombre moyen de descendants.

Une seule chaîne: $0 \cdots 0$ a une fitness $\sigma > 1$,
c'est la master sequence.
Toutes les autres ont une fitness 1.

Une population mathématique

Un individu est codé par son génôme: une suite finie de 0 et de 1.

Mutations Lorsqu'un individu doit muter, chaque bit de son génôme est changé avec probabilité q, indépendament des autres.

Sélection A chaque chaîne est associée une fitness, indiquant le nombre moyen de descendants.

Une seule chaîne: $0 \cdots 0$ a une fitness $\sigma > 1$,
c'est la master sequence.
Toutes les autres ont une fitness 1.

Le modèle d'Eigen

Des molécules évoluent dans une soupe primitive.

Le modèle d'Eigen

Des molécules évoluent dans une soupe primitive.
Elles sont soumises à 3 types de réaction:

Le modèle d'Eigen

Des molécules évoluent dans une soupe primitive.
Elles sont soumises à 3 types de réaction:
Replication,

$$(\mathrm{T}) + I_i \xrightarrow{A_i Q_{ii}} 2I_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Le modèle d'Eigen

Des molécules évoluent dans une soupe primitive.
Elles sont soumises à 3 types de réaction:
Replication,

$$(\mathrm{T}) + I_i \xrightarrow{A_i Q_{ii}} 2I_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Mutation,

$$(\mathrm{T}) + I_i \xrightarrow{A_i Q_{ki}} I_i + I_k; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

Le modèle d'Eigen

Des molécules évoluent dans une soupe primitive.
Elles sont soumises à 3 types de réaction:
Replication,

$$(\mathrm{T}) + I_i \xrightarrow{A_i Q_{ii}} 2I_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Mutation,

$$(\mathrm{T}) + I_i \xrightarrow{A_i Q_{ki}} I_i + I_k; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

Degradation

$$I_i \xrightarrow{D_i} (\mathrm{M}); \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Le paramètre critique

Il existe un paramètre critique q^* qui sépare deux régimes distincts.

$$q^* = \frac{\ln \sigma}{\ell} \,,$$

où ℓ est la longueur des génômes des individus,
et σ la fitness de la master sequence.

Le paramètre critique

Il existe un paramètre critique q^* qui sépare deux régimes distincts.

$$q^* = \frac{\ln \sigma}{\ell} \, ,$$

où ℓ est la longueur des génômes des individus,
et σ la fitness de la master sequence.

- Si $q < q^*$, Les master sequences occupent une proportion ρ^* de la population, avec $\rho^* = \frac{\sigma(1-q)^\ell - 1}{\sigma - 1}$. C'est la Quasi espèce.

Le paramètre critique

Il existe un paramètre critique q^* qui sépare deux régimes distincts.

$$q^* = \frac{\ln \sigma}{\ell},$$

où ℓ est la longueur des génômes des individus,
et σ la fitness de la master sequence.

- Si $q < q^*$, Les master sequences occupent une proportion ρ^* de la population, avec $\rho^* = \frac{\sigma(1-q)^\ell - 1}{\sigma - 1}$. C'est la Quasi espèce.
- Si $q > q^*$, la population est uniforme.
  C'est un régime de chaos.

Le paramètre critique

Il existe un paramètre critique q^* qui sépare deux régimes distincts.

$$q^* = \frac{\ln \sigma}{\ell} \,,$$

où ℓ est la longueur des génômes des individus,
et σ la fitness de la master sequence.

- Si $q < q^*$, Les master sequences occupent une proportion ρ^* de la population, avec $\rho^* = \frac{\sigma(1-q)^\ell - 1}{\sigma - 1}$. C'est la Quasi espèce.
- Si $q > q^*$, la population est uniforme.
  C'est un régime de chaos.

Le modèle est formulé pour un nombre infini d'individu, les populations réelles le sont rarement.

Le modèle discret

Considérons maintenant une population finie, composée de m individus.

Le modèle discret

Considérons maintenant une population finie, composée de m individus.

A chaque génération, la population est soumise à 3 étapes.

- Un individu est choisi pour être parent selon la fitness.

Le modèle discret

Considérons maintenant une population finie, composée de m individus.

A chaque génération, la population est soumise à 3 étapes.

- Un individu est choisi pour être parent selon la fitness.
- Le génôme du parent est copié puis soumis aux mutations.

Le modèle discret

Considérons maintenant une population finie, composée de m individus.

A chaque génération, la population est soumise à 3 étapes.

- Un individu est choisi pour être parent selon la fitness.
- Le génôme du parent est copié puis soumis aux mutations.
- Le nouvel individu remplace un individu au hasard dans la population.

L'équilibre

Au cours du temps, la population passe par deux phases:

L’équilibre

Au cours du temps, la population passe par deux phases:

- Une phase neutre, sans master sequence.

L'équilibre

Au cours du temps, la population passe par deux phases:

- Une phase neutre, sans master sequence.
- Une phase quasi espèce, les master sequences occupent une proportion ρ^* de la population: $\rho^* = \frac{\sigma(1-q)^\ell - 1}{\sigma - 1}$.

L'équilibre

Au cours du temps, la population passe par deux phases:

- Une phase neutre, sans master sequence.
- Une phase quasi espèce, les master sequences occupent une proportion ρ^* de la population: $\rho^* = \frac{\sigma(1-q)^\ell - 1}{\sigma - 1}$.

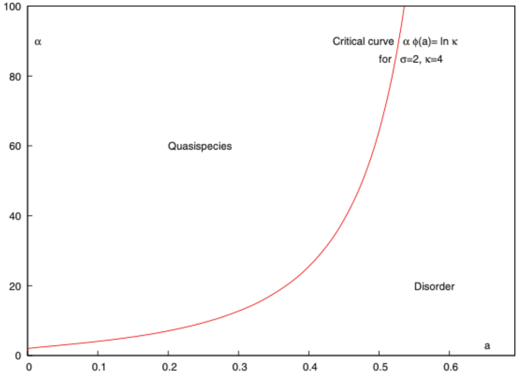
Ces deux phases s'alternent sans arrêt.
Leur durée représente leur stabilité.

Un point critique du modèle est atteint si ces deux durées sont équivalentes.

La courbe critique

Le comportement asymptotique de la population est différent suivant les paramètres.

$$a = \lim \ell q \,, \quad \alpha = \lim \frac{m}{\ell} \,.$$



Plus près de la courbe

Qu'en est-il des exposants critiques ?

- Il faut estimer le temps de survie de la master sequence pour des paramètres finis.

Plus près de la courbe

Qu'en est-il des exposants critiques ?

- Il faut estimer le temps de survie de la master sequence pour des paramètres finis.

La difficulté vient du fait que ce qui se passe à chaque étape dépend de toute la population.

- Encadrer le processus par deux processus plus simples.

Plus près de la courbe

Qu'en est-il des exposants critiques ?

- Il faut estimer le temps de survie de la master sequence pour des paramètres finis.

La difficulté vient du fait que ce qui se passe à chaque étape dépend de toute la population.

- Encadrer le processus par deux processus plus simples.

  Dans un régime où la proportion de master sequence tend vers 0,

$$q^* = \frac{\ln \sigma}{\ell} - \frac{\sqrt{2 \ln 2(\sigma - 1)}}{\sqrt{\ell m}} + \cdots$$

Une autre définition du seuil d'erreur ?

Considèrons le temps de survie des master sequences.

Commençons avec un paramètre de mutation très petit.

- Quand q augmente, ce temps commence à diminuer.

Une autre définition du seuil d'erreur ?

Considèrons le temps de survie des master sequences.

Commençons avec un paramètre de mutation très petit.

- Quand q augmente, ce temps commence à diminuer.
- A un moment on atteint le temps de la phase neutre $\sim 2^{\ell}$.

Une autre définition du seuil d'erreur ?

Considèrons le temps de survie des master sequences.

Commençons avec un paramètre de mutation très petit.

- Quand q augmente, ce temps commence à diminuer.
- A un moment on atteint le temps de la phase neutre $\sim 2^{\ell}$.
- Si q augmente encore, les master sequences survivront pendant un temps polynomial, et non plus exponentiel.

Merci pour votre attention