Un modèle de criticité auto-organisée en percolation

Nicolas Forien

3 juin 2020

Sommaire

1. Criticité auto-organisée
2. Construction du modèle et résultat
   - La percolation Bernoulli
   - Construction du modèle
   - Résultat de convergence
3. Esquisse de démonstration
   - Décroissance exponentielle loin du point critique
   - Minoration de la fonction de partition
   - Un lemme de séparation

Sommaire

1. Criticité auto-organisée

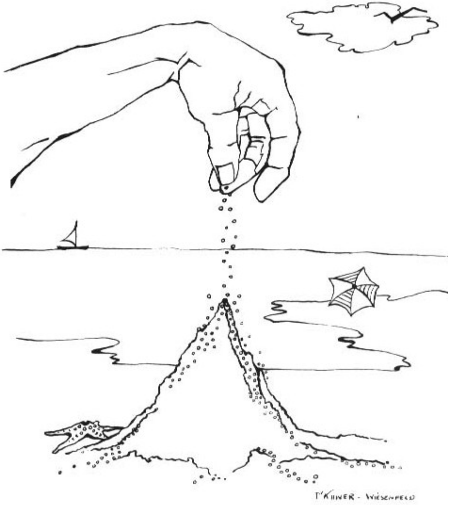
2. Construction du modèle et résultat
   - La percolation Bernoulli
   - Construction du modèle
   - Résultat de convergence

3. Esquisse de démonstration
   - Décroissance exponentielle loin du point critique
   - Minoration de la fonction de partition
   - Un lemme de séparation

Certains systèmes physiques seraient naturellement attirés vers un état « critique ».

Certains systèmes physiques seraient naturellement attirés vers un état « critique ».

Exemple du tas de sable



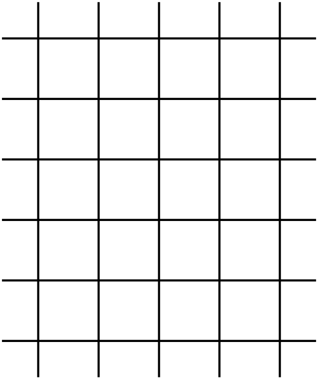
Sommaire

1 Criticité auto-organisée

2 Construction du modèle et résultat
- La percolation Bernoulli
- Construction du modèle
- Résultat de convergence

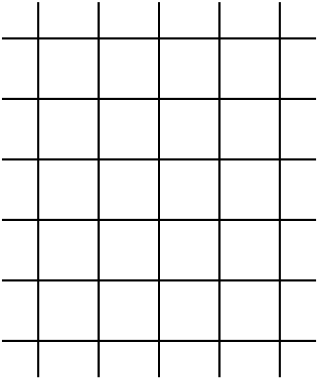
3 Esquisse de démonstration
- Décroissance exponentielle loin du point critique
- Minoration de la fonction de partition
- Un lemme de séparation

Graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$.



Graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$.

Paramètre $p \in [0, 1]$.

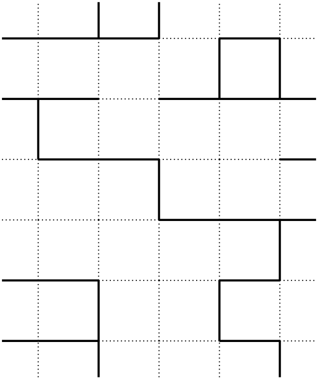


Graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$.

Paramètre $p \in [0, 1]$.

Probabilité sur $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$:

$$\mathbb{P}_p = \Big((1-p)\delta_0 + p\delta_1\Big)^{\otimes \mathbb{E}^d}.$$



Graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$.

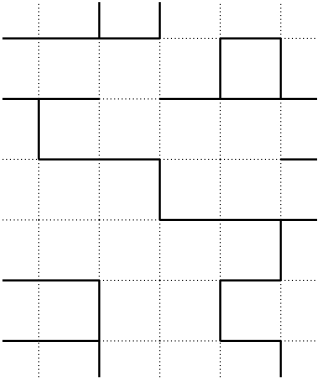
Paramètre $p \in [0,1]$.

Probabilité sur $\{0,1\}^{\mathbb{E}^d}$:

$$\mathbb{P}_p = \Big((1-p)\delta_0 + p\delta_1\Big)^{\otimes \mathbb{E}^d}.$$

Pour $\omega \sim \mathbb{P}_p$ et $e \in \mathbb{E}^d$,

- Si $\omega(e) = 1$, l'arête est dite ouverte,
- Si $\omega(e) = 0$, l'arête est dite fermée.



Transition de phase dans le modèle de percolation

Transition de phase dans le modèle de percolation

En dimension $d \geqslant 2$, il existe $p_c \in (0,1)$ tel que :

Transition de phase dans le modèle de percolation

En dimension $d \geqslant 2$, il existe $p_c \in (0,1)$ tel que :

$$\forall p < p_c \quad \mathbb{P}_p\big(\text{Il existe un cluster infini}\big) \ = \ 0\,,$$

Transition de phase dans le modèle de percolation

En dimension $d \geqslant 2$, il existe $p_c \in (0,1)$ tel que :

$$\forall p < p_c \quad \mathbb{P}_p\big(\text{Il existe un cluster infini}\big) \; = \; 0\,,$$

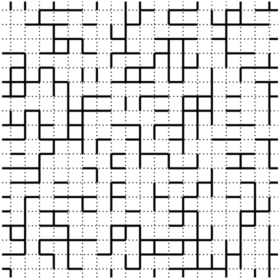
$$\forall p > p_c \quad \mathbb{P}_p\big(\text{Il existe un cluster infini}\big) \; = \; 1\,.$$

Transition de phase dans le modèle de percolation

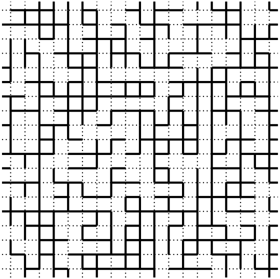
En dimension $d \geqslant 2$, il existe $p_c \in (0,1)$ tel que :

$$\forall p < p_c \quad \mathbb{P}_p\big(\text{Il existe un cluster infini}\big) = 0\,,$$

$$\forall p > p_c \quad \mathbb{P}_p\big(\text{Il existe un cluster infini}\big) = 1\,.$$



$p = 0,4$



$p = 0,6$

Boîtes finies $\Lambda(n) = \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right[\cap \mathbb{Z}^d$. Ensemble d'arêtes noté $\mathbb{E}_n$.

Boîtes finies $\Lambda(n) = \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right[\cap \mathbb{Z}^d$. Ensemble d'arêtes noté $\mathbb{E}_n$.

Définition

Boîtes finies $\Lambda(n) = \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right[\cap \mathbb{Z}^d$. Ensemble d'arêtes noté $\mathbb{E}_n$.

Définition

Soit $0 < a < d$.

Pour $\omega : \mathbb{E}_n \to \{0,1\}$, notons

$$p_n(\omega) = \exp\left(-\frac{|C_{\max}(\omega)|}{n^a}\right).$$

Boîtes finies $\Lambda(n) = \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right[\cap \mathbb{Z}^d$. Ensemble d'arêtes noté $\mathbb{E}_n$.

Définition

Soit $0 < a < d$.
Pour $\omega : \mathbb{E}_n \to \{0,1\}$, notons

$$p_n(\omega) = \exp\left(-\frac{|C_{\max}(\omega)|}{n^a}\right).$$

On considère la distribution de probabilité :

$$\mu_n \;:\; \omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_n} \longmapsto \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega).$$

$$\mu_n(\omega) \;=\; \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n \;=\; e^{-|C_{max}|/n^a}\,.$$

$$\mu_n(\omega) \;=\; \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n \;=\; e^{-|C_{max}|/n^a}\,.$$

Théorème

$$\mu_n(\omega) \;=\; \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n \;=\; e^{-|C_{max}|/n^a}\;.$$

Théorème

Sous μ_n, nous avons la convergence en loi $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \delta_{p_c}$.

$$\mu_n(\omega) \;=\; \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n \;=\; e^{-|C_{max}|/n^a}\,.$$

Théorème

Sous μ_n, nous avons la convergence en loi $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \delta_{p_c}$.

Heuristique avec les mains

$$\mu_n(\omega) \;=\; \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n \;=\; e^{-|C_{max}|/n^a}\,.$$

Théorème

Sous μ_n, nous avons la convergence en loi $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \delta_{p_c}$.

Heuristique avec les mains

$\mu_n\big(p_n \simeq p\big)$

$$\mu_n(\omega) \;=\; \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n \;=\; e^{-|C_{max}|/n^a}\,.$$

Théorème

Sous μ_n, nous avons la convergence en loi $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \delta_{p_c}$.

Heuristique avec les mains

$$\mu_n\big(p_n \simeq p\big) \;\simeq\; \frac{1}{Z_n}\sum_{\omega\,:\,p_n(\omega)\simeq p} \mathbb{P}_p(\omega)$$

$$\mu_n(\omega) = \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n = e^{-|C_{max}|/n^a}\,.$$

Théorème

Sous μ_n, nous avons la convergence en loi $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \delta_{p_c}$.

Heuristique avec les mains

$$\mu_n\big(p_n \simeq p\big) \simeq \frac{1}{Z_n}\sum_{\omega\,:\,p_n(\omega)\simeq p}\mathbb{P}_p(\omega) \simeq \frac{\mathbb{P}_p\big(\,|C_{max}| \simeq n^a(-\ln p)\big)}{Z_n},$$

$$\mu_n(\omega) \;=\; \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n \;=\; e^{-|C_{max}|/n^a}\,.$$

Théorème

Sous μ_n, nous avons la convergence en loi $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \delta_{p_c}$.

Heuristique avec les mains

$$\mu_n\big(p_n \simeq p\big) \;\simeq\; \frac{1}{Z_n}\sum_{\omega\,:\,p_n(\omega)\simeq p} \mathbb{P}_p(\omega) \;\simeq\; \frac{\mathbb{P}_p\big(\,|C_{max}| \simeq n^a(-\ln p)\big)}{Z_n}\,,$$

ce qui est « très petit » quand p est éloigné de p_c.

Sommaire

1. Criticité auto-organisée
2. Construction du modèle et résultat
   - La percolation Bernoulli
   - Construction du modèle
   - Résultat de convergence
3. Esquisse de démonstration
   - Décroissance exponentielle loin du point critique
   - Minoration de la fonction de partition
   - Un lemme de séparation

$$\mu_n(\omega) \;=\; \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n \;=\; e^{-|C_{max}|/n^a}\,.$$

$$\mu_n(\omega) \;=\; \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n \;=\; e^{-|C_{max}|/n^a}\,.$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \mu_n\big(p_n \leqslant p_c - \varepsilon\big)$$

$$\mu_n(\omega) \;=\; \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n \;=\; e^{-|C_{max}|/n^a}\,.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu_n\big(p_n \leqslant p_c - \varepsilon\big) \;=\; \frac{1}{Z_n} \sum_{\omega\,:\,p_n(\omega)\leqslant p_c-\varepsilon} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega)$$

$$\mu_n(\omega) \;=\; \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n \;=\; e^{-|C_{max}|/n^a}\,.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu_n\big(p_n \leqslant p_c - \varepsilon\big) \;=\; \frac{1}{Z_n}\sum_{\omega\,:\,p_n(\omega)\leqslant p_c-\varepsilon} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega)$$

$$= \frac{1}{Z_n}\sum_{b=\lceil n^a(-\ln(p_c-\varepsilon))\rceil}^{n^d} \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}\Big(\,|C_{max}| = b\Big)$$

$$\mu_n(\omega) = \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n = e^{-|C_{max}|/n^a}.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu_n\big(p_n \leqslant p_c - \varepsilon\big) = \frac{1}{Z_n}\sum_{\omega\,:\,p_n(\omega)\leqslant p_c-\varepsilon} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega)$$

$$= \frac{1}{Z_n}\sum_{b=\lceil n^a(-\ln(p_c-\varepsilon))\rceil}^{n^d} \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}\Big(|C_{max}| = b\Big)$$

$$\leqslant \frac{n^d}{Z_n}\mathbb{P}_{p_c-\varepsilon}\Big(|C_{max}| \geqslant n^a\big(-\ln(p_c-\varepsilon)\big)\Big)$$

$$\mu_n(\omega) \;=\; \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n \;=\; e^{-|C_{max}|/n^a}\,.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu_n\big(p_n \leqslant p_c - \varepsilon\big) \;=\; \frac{1}{Z_n}\sum_{\omega\,:\,p_n(\omega)\leqslant p_c-\varepsilon} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega)$$

$$= \frac{1}{Z_n}\sum_{b=\lceil n^a(-\ln(p_c-\varepsilon))\rceil}^{n^d} \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}\Big(\,|C_{max}| = b\Big)$$

$$\leqslant \frac{n^d}{Z_n}\mathbb{P}_{p_c-\varepsilon}\Big(\,|C_{max}| \geqslant n^a\big(-\ln(p_c-\varepsilon)\big)\Big) \;\leqslant\; \frac{n^d}{Z_n}e^{-K(\varepsilon)n^a}\,.$$

$$\mu_n(\omega) \;=\; \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n \;=\; e^{-|C_{max}|/n^a}\,.$$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \mu_n\big(p_n\leqslant p_c-\varepsilon\big) \;=\; \frac{1}{Z_n}\sum_{\omega\,:\,p_n(\omega)\leqslant p_c-\varepsilon}\mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega)$$

$$=\;\frac{1}{Z_n}\sum_{b=\lceil n^a(-\ln(p_c-\varepsilon))\rceil}^{n^d}\mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}\Big(\,|C_{max}|=b\Big)$$

$$\leqslant\;\frac{n^d}{Z_n}\mathbb{P}_{p_c-\varepsilon}\Big(\,|C_{max}|\geqslant n^a\big(-\ln(p_c-\varepsilon)\big)\Big)\;\leqslant\;\frac{n^d}{Z_n}e^{-K(\varepsilon)n^a}\,.$$

De même, $\quad \mu_n\big(p_n\geqslant p_c+\varepsilon\big)\;\leqslant\;\dfrac{n^d}{Z_n}e^{-K(\varepsilon)n^{d-1}}\,.$

Ainsi, $\mu_n\big(\,|p_n - p_c| \geqslant \varepsilon\big) \;\leqslant\; \dfrac{n^d}{Z_n}\Big(e^{-K(\varepsilon)n^a} + e^{-K(\varepsilon)n^{d-1}}\Big)\,.$

Ainsi, $$\mu_n\big(\,|p_n - p_c| \geqslant \varepsilon\big) \;\leqslant\; \frac{n^d}{Z_n}\left(e^{-K(\varepsilon)n^a} + e^{-K(\varepsilon)n^{d-1}}\right)\,.$$

Lemme

Ainsi, $$\mu_n\big(\,|p_n - p_c| \geqslant \varepsilon\big) \;\leqslant\; \frac{n^d}{Z_n}\left(e^{-K(\varepsilon)n^a} + e^{-K(\varepsilon)n^{d-1}}\right)\,.$$

Lemme

$$\exists K > 0 \quad \forall n \geqslant 1 \qquad Z_n \;\geqslant\; \exp\left(-K(\ln n)n^{a(d-1)/d}\right)\,.$$

Ainsi, $\mu_n\big(\,|p_n - p_c| \geqslant \varepsilon\big) \;\leqslant\; \dfrac{n^d}{Z_n}\left(e^{-K(\varepsilon)n^a} + e^{-K(\varepsilon)n^{d-1}}\right)$.

Lemme

$$\exists K > 0 \quad \forall n \geqslant 1 \qquad Z_n \;\geqslant\; \exp\left(-K(\ln n)n^{a(d-1)/d}\right) .$$

$$Z_n \;=\; \sum_{\omega\in\{0,1\}^{\mathbb{E}_n}} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega)$$

$$\text{Ainsi,} \quad \mu_n\big(\,|p_n - p_c| \geqslant \varepsilon\big) \;\leqslant\; \frac{n^d}{Z_n}\left(e^{-K(\varepsilon)n^a} + e^{-K(\varepsilon)n^{d-1}}\right).$$

Lemme

$$\exists K > 0 \quad \forall n \geqslant 1 \qquad Z_n \;\geqslant\; \exp\left(-K(\ln n)n^{a(d-1)/d}\right).$$

$$Z_n \;=\; \sum_{\omega\in\{0,1\}^{\mathbb{E}_n}} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega) \;=\; \sum_{b=1}^{n^d} \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}\big(\,|C_{max}| = b\big).$$

Ainsi, $$\mu_n\big(\,|p_n - p_c| \geqslant \varepsilon\big) \;\leqslant\; \frac{n^d}{Z_n}\left(e^{-K(\varepsilon)n^a} + e^{-K(\varepsilon)n^{d-1}}\right).$$

Lemme

$$\exists K > 0 \quad \forall n \geqslant 1 \qquad Z_n \;\geqslant\; \exp\left(-K(\ln n)n^{a(d-1)/d}\right).$$

$$Z_n \;=\; \sum_{\omega\in\{0,1\}^{\mathbb{E}_n}} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega) \;=\; \sum_{b=1}^{n^d} \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}\big(\,|C_{max}| = b\big).$$

Si $\omega_1, \ldots, \omega_{n^d}$ est un couplage décroissant avec $\omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$, Ainsi, $\mu_n\big(\,|p_n - p_c| \geqslant \varepsilon\big) \;\leqslant\; \dfrac{n^d}{Z_n}\left(e^{-K(\varepsilon)n^a} + e^{-K(\varepsilon)n^{d-1}}\right)$.

Lemme

$$\exists K > 0 \quad \forall n \geqslant 1 \qquad Z_n \;\geqslant\; \exp\left(-K(\ln n)n^{a(d-1)/d}\right) .$$

$$Z_n \;=\; \sum_{\omega\in\{0,1\}^{\mathbb{E}_n}} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega) \;=\; \sum_{b=1}^{n^d} \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}\big(\,|C_{max}| = b\big) .$$

Si $\omega_1, \ldots, \omega_{n^d}$ est un couplage décroissant avec $\omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$,

$$Z_n \;=\; \sum_{b=1}^{n^d} \mathbb{P}\big(\,|C_{max}(\omega_b)| = b\big)$$

Ainsi, $$\mu_n\big(\,|p_n - p_c| \geqslant \varepsilon\big) \;\leqslant\; \frac{n^d}{Z_n}\left(e^{-K(\varepsilon)n^a} + e^{-K(\varepsilon)n^{d-1}}\right).$$

Lemme

$$\exists K > 0 \quad \forall n \geqslant 1 \qquad Z_n \;\geqslant\; \exp\left(-K(\ln n)n^{a(d-1)/d}\right).$$

$$Z_n \;=\; \sum_{\omega\in\{0,1\}^{\mathbb{E}_n}} \mathbb{P}_{p_n(\omega)}(\omega) \;=\; \sum_{b=1}^{n^d} \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}\big(\,|C_{max}| = b\big).$$

Si $\omega_1, \ldots, \omega_{n^d}$ est un couplage décroissant avec $\omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$,

$$Z_n \;=\; \sum_{b=1}^{n^d} \mathbb{P}\big(\,|C_{max}(\omega_b)| = b\big) \;=\; \mathbb{P}\Big(\,\exists b,\ |C_{max}(\omega_b)| = b\,\Big).$$

$$Z_n = \mathbb{P}\Big(\exists b,\ |C_{max}(\omega_b)| = b\Big)$$

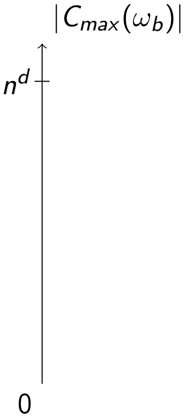
où $\omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$

avec $\omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_{n^d}$.

$$Z_n = \mathbb{P}\big(\exists b,\ |C_{max}(\omega_b)| = b\big)$$

où $\quad \omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$

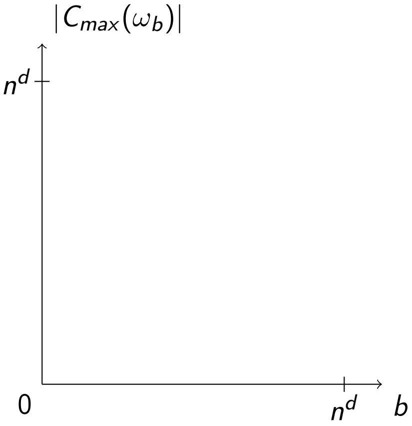
avec $\quad \omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_{n^d}$.



$$Z_n = \mathbb{P}\big(\exists b,\ |C_{max}(\omega_b)| = b\big)$$

où $\quad \omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$

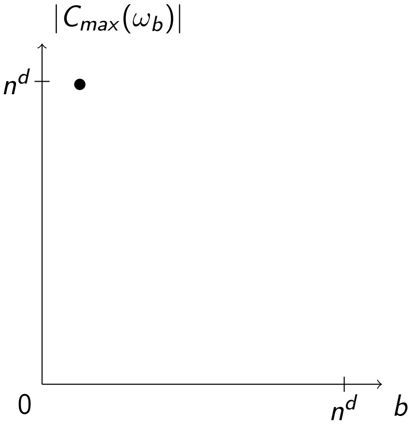
avec $\quad \omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_{n^d}$.



$$Z_n = \mathbb{P}\big(\exists b,\ |C_{max}(\omega_b)| = b\big)$$

où $\quad \omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$

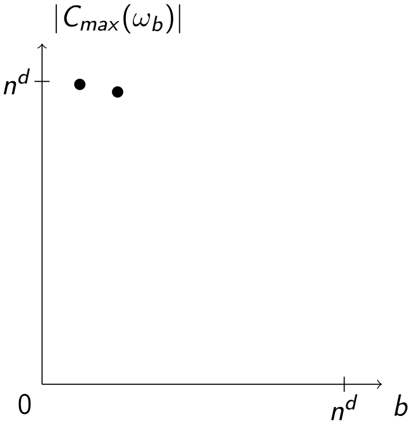
avec $\quad \omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_{n^d}\,.$



$$Z_n = \mathbb{P}\big(\exists b,\ |C_{max}(\omega_b)| = b\big)$$

où $\quad \omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$

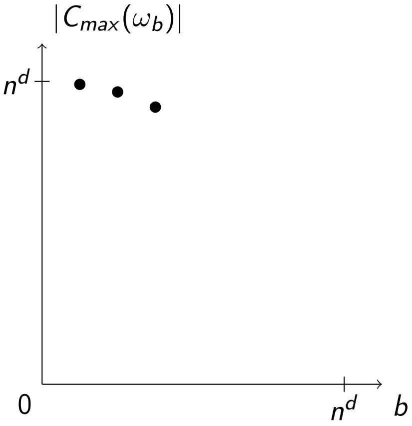
avec $\quad \omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_{n^d}$.



$$Z_n = \mathbb{P}\Big(\exists b,\ |C_{max}(\omega_b)| = b\Big)$$

où $\quad \omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$

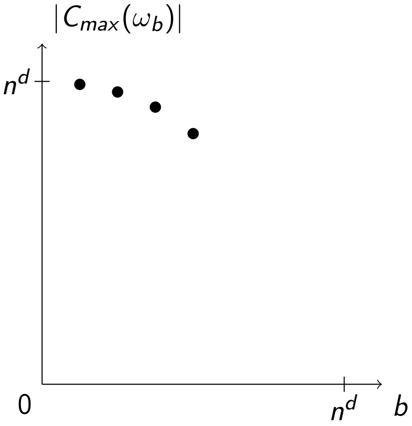
avec $\quad \omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_{n^d}$.



$$Z_n = \mathbb{P}\big(\exists b,\ |C_{max}(\omega_b)| = b\big)$$

$$\text{où} \quad \omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$$

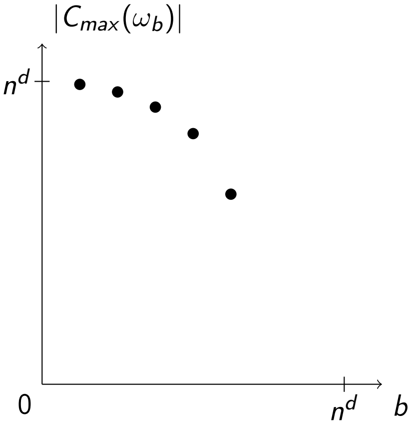
$$\text{avec} \quad \omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_{n^d}\,.$$



$$Z_n = \mathbb{P}\big(\exists b,\ |C_{max}(\omega_b)| = b\big)$$

où $\quad \omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$

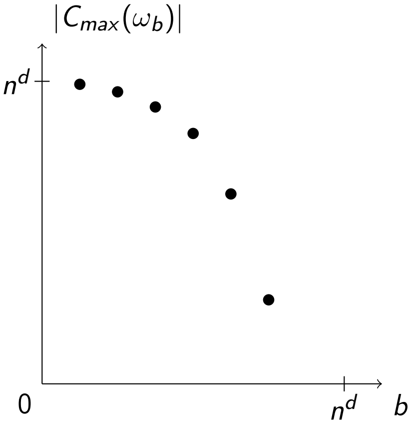
avec $\quad \omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_{n^d}$.



$$Z_n = \mathbb{P}\Big(\exists b,\ |C_{max}(\omega_b)| = b\Big)$$

où $\quad \omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$

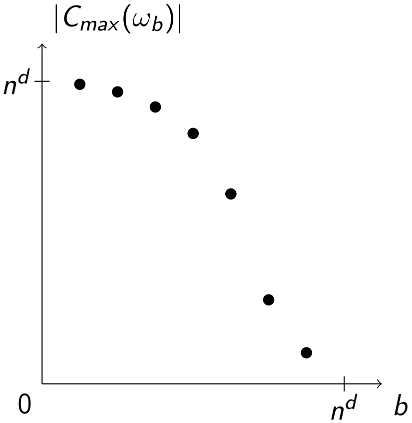
avec $\quad \omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_{n^d}$.



$$Z_n = \mathbb{P}\big(\exists b,\ |C_{max}(\omega_b)| = b\big)$$

où $\quad \omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$

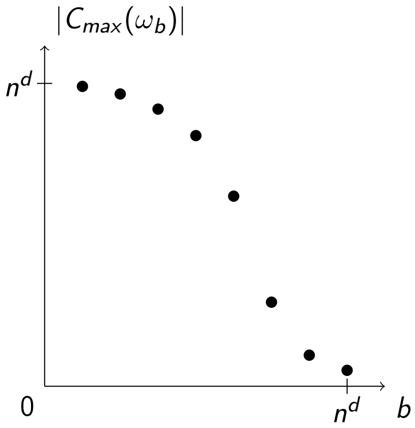
avec $\quad \omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_{n^d}$.



$$Z_n = \mathbb{P}\big(\exists b,\ |C_{max}(\omega_b)| = b\big)$$

où $\quad \omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$

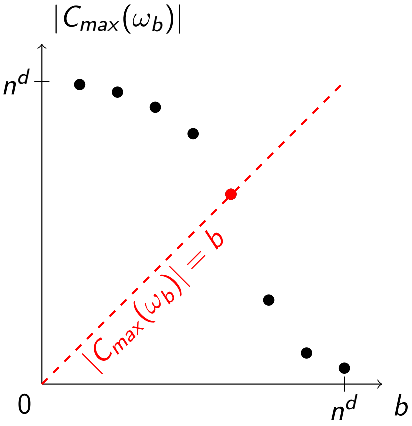
avec $\quad \omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_{n^d}$.



$$Z_n = \mathbb{P}\big(\exists b,\ |C_{max}(\omega_b)| = b\big)$$

$$\text{où} \quad \omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$$

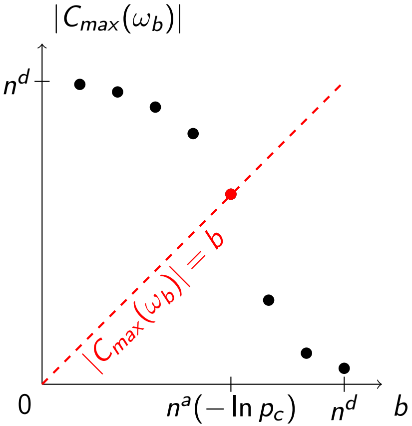
$$\text{avec} \quad \omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_{n^d}\,.$$



$$Z_n = \mathbb{P}\big(\exists b,\ |C_{max}(\omega_b)| = b\big)$$

où $\quad \omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}$

avec $\quad \omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_{n^d}$.



Comment forcer l'apparition d'un point fixe ?

Comment forcer l'apparition d'un point fixe ?

- On construit le couplage $(\omega_b)_{1 \leqslant b \leqslant n^d}$ au fur et à mesure, en fermant certaines arêtes à chaque étape.

Comment forcer l'apparition d'un point fixe ?

- On construit le couplage $(\omega_b)_{1\leqslant b\leqslant n^d}$ au fur et à mesure, en fermant certaines arêtes à chaque étape.
- Quand $b \leqslant |C_{max}(\omega_b)| \leqslant 2b$, on s'arrête.

Comment forcer l'apparition d'un point fixe ?

- On construit le couplage $(\omega_b)_{1 \leqslant b \leqslant n^d}$ au fur et à mesure, en fermant certaines arêtes à chaque étape.
- Quand $b \leqslant |C_{max}(\omega_b)| \leqslant 2b$, on s'arrête.
- On force la fermeture de certaines arêtes à l'étape b pour tomber pile sur $|C_{max}(\omega_b)| = b$.

Comment forcer l'apparition d'un point fixe ?

- On construit le couplage $(\omega_b)_{1\leqslant b\leqslant n^d}$ au fur et à mesure, en fermant certaines arêtes à chaque étape.
- Quand $b \leqslant |C_{max}(\omega_b)| \leqslant 2b$, on s'arrête.
- On force la fermeture de certaines arêtes à l'étape b pour tomber pile sur $|C_{max}(\omega_b)| = b$.

Combien d'arêtes a-t-on besoin de fermer ?

Comment forcer l'apparition d'un point fixe ?

- On construit le couplage $(\omega_b)_{1\leqslant b\leqslant n^d}$ au fur et à mesure, en fermant certaines arêtes à chaque étape.
- Quand $b \leqslant |C_{max}(\omega_b)| \leqslant 2b$, on s'arrête.
- On force la fermeture de certaines arêtes à l'étape b pour tomber pile sur $|C_{max}(\omega_b)| = b$.

Combien d'arêtes a-t-on besoin de fermer ? Combien ça « coûte » ?

Comment forcer l'apparition d'un point fixe ?

- On construit le couplage $(\omega_b)_{1 \leqslant b \leqslant n^d}$ au fur et à mesure, en fermant certaines arêtes à chaque étape.
- Quand $b \leqslant |C_{max}(\omega_b)| \leqslant 2b$, on s'arrête.
- On force la fermeture de certaines arêtes à l'étape b pour tomber pile sur $|C_{max}(\omega_b)| = b$.

Combien d'arêtes a-t-on besoin de fermer ? Combien ça « coûte » ?

- Première remarque : avec grande proba, cet instant b est d'ordre n^a.

Un lemme de séparation

Un lemme de séparation

Il existe $K = K(d) > 0$ tel que,

Un lemme de séparation

Il existe $K = K(d) > 0$ tel que, pour tout sous-graphe connexe fini $G = (V, E)$ de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, pour tout $m \in \{|V|/2, \ldots, |V|\}$,

Un lemme de séparation

Il existe $K = K(d) > 0$ tel que, pour tout sous-graphe connexe fini $G = (V, E)$ de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, pour tout $m \in \{|V|/2, \ldots, |V|\}$, il existe un ensemble d'arêtes $E_0 \subset E$ tel que

Un lemme de séparation

Il existe $K = K(d) > 0$ tel que, pour tout sous-graphe connexe fini $G = (V, E)$ de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, pour tout $m \in \{|V|/2, \ldots, |V|\}$, il existe un ensemble d'arêtes $E_0 \subset E$ tel que

$$|E_0| \leqslant K \, |V|^{(d-1)/d}$$

Un lemme de séparation

Il existe $K = K(d) > 0$ tel que, pour tout sous-graphe connexe fini $G = (V, E)$ de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, pour tout $m \in \{|V|/2, \ldots, |V|\}$, il existe un ensemble d'arêtes $E_0 \subset E$ tel que

$$|E_0| \leqslant K\,|V|^{(d-1)/d} \quad \text{et} \quad |C_{max}(V,\, E \backslash E_0)| \;=\; m\,.$$

Un lemme de séparation

Il existe $K = K(d) > 0$ tel que, pour tout sous-graphe connexe fini $G = (V, E)$ de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, pour tout $m \in \{|V|/2, \ldots, |V|\}$, il existe un ensemble d'arêtes $E_0 \subset E$ tel que

$$|E_0| \leqslant K\,|V|^{(d-1)/d} \quad \text{et} \quad |C_{max}(V,\, E \backslash E_0)| \;=\; m\,.$$

Quand $b \leqslant |C_{max}(\omega_b)| \leqslant 2b$, on trouve un ensemble d'au plus $K(2b)^{(d-1)/d}$ arêtes à fermer pour tomber sur $C_{max}(\omega_b) = b$.

Un lemme de séparation

Il existe $K = K(d) > 0$ tel que, pour tout sous-graphe connexe fini $G = (V, E)$ de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, pour tout $m \in \{|V|/2, \ldots, |V|\}$, il existe un ensemble d'arêtes $E_0 \subset E$ tel que

$$|E_0| \leqslant K\,|V|^{(d-1)/d} \quad \text{et} \quad |C_{max}(V,\, E \setminus E_0)| \,=\, m\,.$$

Quand $b \leqslant |C_{max}(\omega_b)| \leqslant 2b$, on trouve un ensemble d'au plus $K(2b)^{(d-1)/d}$ arêtes à fermer pour tomber sur $C_{max}(\omega_b) = b$.

Comme $b \asymp n^a$, ça fait $O\big(n^{a(d-1)/d}\big)$ arêtes à fermer.

- Combien ça « coûte » de fermer $n^{a(d-1)/d}$ arêtes ?

- Combien ça « coûte » de fermer $n^{a(d-1)/d}$ arêtes ?

$$\omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}, \qquad \omega_{b+1} \sim \mathbb{P}_{e^{-(b+1)/n^a}}.$$

- Combien ça « coûte » de fermer $n^{a(d-1)/d}$ arêtes ?

$$\omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}, \qquad \omega_{b+1} \sim \mathbb{P}_{e^{-(b+1)/n^a}}.$$

- De ω_b à ω_{b+1}, chaque arête ouverte reste ouverte avec proba e^{-1/n^a}

- Combien ça « coûte » de fermer $n^{a(d-1)/d}$ arêtes ?

$$\omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}, \qquad \omega_{b+1} \sim \mathbb{P}_{e^{-(b+1)/n^a}}.$$

- De ω_b à ω_{b+1}, chaque arête ouverte reste ouverte avec proba e^{-1/n^a}, et est fermée avec proba $1 - e^{-1/n^a} \simeq 1/n^a$.

- Combien ça « coûte » de fermer $n^{a(d-1)/d}$ arêtes ?

$$\omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}, \qquad \omega_{b+1} \sim \mathbb{P}_{e^{-(b+1)/n^a}} .$$

- De ω_b à ω_{b+1}, chaque arête ouverte reste ouverte avec proba e^{-1/n^a}, et est fermée avec proba $1 - e^{-1/n^a} \simeq 1/n^a$.

$$\Rightarrow \text{ Coût } \quad \left(\frac{1}{n^a}\right)^{n^{a(d-1)/d}} \quad = \ \exp\left(-a(\ln n)n^{a(d-1)/d}\right) .$$

- Combien ça « coûte » de fermer $n^{a(d-1)/d}$ arêtes ?

$$\omega_b \sim \mathbb{P}_{e^{-b/n^a}}, \qquad \omega_{b+1} \sim \mathbb{P}_{e^{-(b+1)/n^a}} .$$

- De ω_b à ω_{b+1}, chaque arête ouverte reste ouverte avec proba e^{-1/n^a}, et est fermée avec proba $1 - e^{-1/n^a} \simeq 1/n^a$.

$$\Rightarrow \text{ Coût } \quad \left(\frac{1}{n^a}\right)^{n^{a(d-1)/d}} \quad = \quad \exp\left(-a(\ln n)n^{a(d-1)/d}\right) .$$

$$\Rightarrow \quad Z_n \geqslant \exp\left(-K(\ln n)n^{a(d-1)/d}\right) .$$

$\square$

Récapitulons :

$$\mu_n(\omega) = \frac{1}{Z_n} \mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n = e^{-|C_{max}|/n^a} .$$

Nous avons bien démontré :

Théorème

Sous μ_n, nous avons la convergence en loi $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \delta_{p_c}$.

Récapitulons :

$$\mu_n(\omega) = \frac{1}{Z_n}\mathbb{P}_{p_n(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad p_n = e^{-|C_{max}|/n^a} .$$

Nous avons bien démontré :

Théorème

Sous μ_n, nous avons la convergence en loi $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \delta_{p_c}$.

Merci pour votre attention !