Une variante de la formule de Stirling

Daniel PERRIN

1 Introduction

S'il est évident que la suite des factorielles $(n!)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini et si l'expérience montre qu'elle le fait "rapidement", il est un peu plus délicat de quantifier cette dernière assertion. Par exemple, lorsqu'on utilise une calculatrice comme la Voyage 200 dont le maximum de capacité est de 10^{1000}, il n'est pas évident de dire à partir de quel entier n la calculatrice renvoie ∞ quand on lui demande $n!$. La formule de Stirling permet de donner une réponse assez précise à cette question. Rappelons cette magnifique formule qui donne, pour n tendant vers $+\infty$, un équivalent de $n!$:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Dans ce texte on montre une variante affaiblie de cette formule en proposant un encadrement analogue, mais sans le fameux[1] $\sqrt{2\pi}$.

L'intérêt de ce qui suit, outre de permettre de répondre facilement à la question sur la calculatrice, réside dans la méthode, qui est d'une simplicité enfantine. Une première estimation grossière est donnée, en effet, en appliquant à la fonction $\ln x$ une méthode des rectangles et une estimation un peu plus fine s'obtient à l'aide des méthodes des trapèzes et du point médian.

2 L'estimation à l'aide de la méthode des rectangles

Expliquons d'abord, le principe de ce que nous allons faire. La difficulté de la suite $n!$ est d'être définie par des multiplications, alors qu'on préfère, en général, les additions. Une méthode universelle pour se ramener au cas additif consiste à appliquer le logarithme. On posera donc ici $u_n = \ln n! =$

[1] Je dis fameux car, lorsqu'on demande aux étudiants s'ils se souviennent de la formule de Stirling, c'est presque toujours le $\sqrt{2\pi}$ qui leur revient en premier, alors que pourtant, il est quasiment sans importance. Rappelons que pour obtenir l'équivalent exact la voie usuelle passe par les intégrales de Wallis.

$\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n$. Une deuxième idée, tout aussi universelle, pour estimer cette somme (cette série, donc) est de la comparer avec une intégrale, ici, celle de $\ln x$. Le plus simple pour cela est la méthode des rectangles, telle qu'elle apparaît sur la figure 1. Par chance, on sait calculer une primitive du logarithme par intégration par parties. On va ainsi obtenir le résultat suivant, qui n'est déjà pas si mal :

2.1 Théorème. *On a l'encadrement :*

$$e\, n^n e^{-n} \leq n! \leq e\, n^n e^{-n} n.$$

Démonstration. On a l'encadrement de l'intégrale entre les rectangles bleus et les bleus additionnés des jaunes :

$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln(n-1) \leq \int_1^n \ln(x)dx \leq \ln 2 + \cdots + \ln(n-1) + \ln n.$$

L'intégrale se calcule par intégration par parties :

$$\int_1^n \ln(x)dx = \big[x \ln x - x\big]_1^n = n \ln n - n + 1.$$

On a donc $\ln(n!) - \ln n \leq n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!)$, soit encore $n \ln n - n + 1 \leq \ln n! \leq (n+1) \ln n - n + 1$ et l'encadrement du théorème en résulte en passant à l'exponentielle.

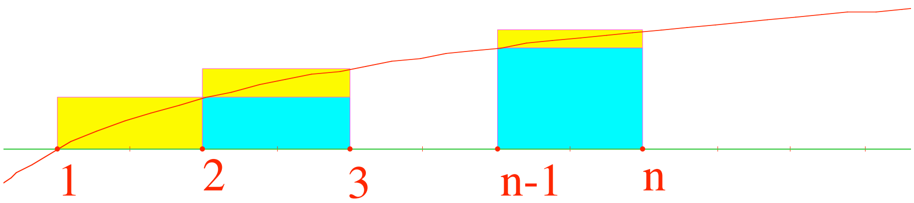

Figure 1

3 Majoration de $n!$ par la méthode des trapèzes

Si l'on trouve l'encadrement précédent trop grossier, on peut l'améliorer en utilisant les méthodes classiques de calcul d'intégrales et d'abord la méthode des trapèzes.

3.1 Théorème. *On a la majoration :*

$$n! \leq e\, n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

Démonstration.

Comme la fonction logarithme est concave, les cordes sont en-dessous de la courbe et on voit, cf. figure 2, que l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \ln t\, dt$ est supérieure à l'aire du trapèze $ABCD$ qui vaut $\dfrac{1}{2}\big(\ln k + \ln(k+1)\big)$.

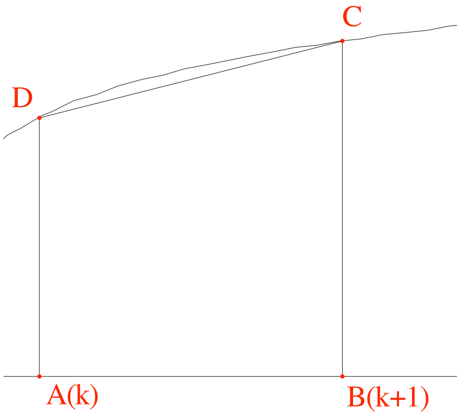

Figure 2

Par sommation, on en déduit l'inégalité :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(\ln k + \ln(k+1)) \leq \int_1^n \ln t\, dt = n\ln n - n + 1,$$

ce qui donne, en reconnaissant $\ln n!$ dans la somme :

$$\frac{1}{2}(2\ln n! - \ln n) \leq n\ln n - n + 1,$$

donc $\ln n! \leq (n+\frac{1}{2})\ln n - n + 1$ et le résultat annoncé s'obtient en passant à l'exponentielle.

4 Minoration de $n!$ par la méthode du point médian

4.1 Théorème. *On a la minoration :*

$$n! \geq Kn^n e^{-n}\sqrt{n} \qquad \text{avec } K = e^k, \quad k = \frac{3}{2}\big(1 - \ln\frac{3}{2}\big).$$

Démonstration. On applique cette fois la méthode du point médian.

Comme la fonction logarithme est concave, elle est en dessous de ses tangentes et on voit, cf. figure 3, que l'intégrale $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t \, dt$ est inférieure à l'aire du trapèze situé sous la tangente, qui n'est autre que $\ln k$. En effet, les petits triangles de part et d'autre du point milieu sont isométriques.

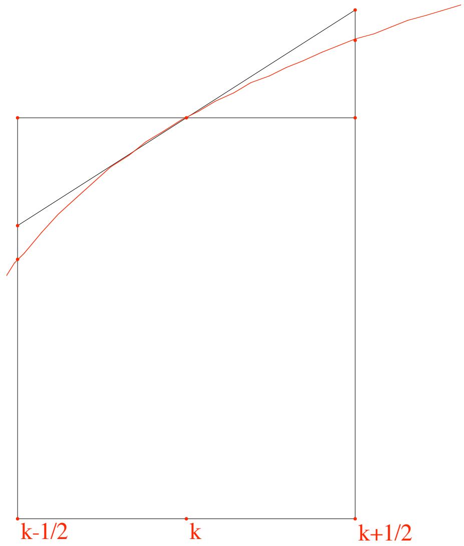

Figure 3

Par sommation on en déduit :

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln t \, dt \leq \ln n!$$

soit encore $\ln n! \geq (n+\frac{1}{2}) \ln(n+\frac{1}{2}) - (n+\frac{1}{2}) - \frac{3}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cdot$ On obtient ainsi une minoration, un peu moins bonne que celle annoncée. Pour obtenir celle-là, il suffit de vérifier qu'on a, pour tout $n \geq 1$, $(n+\dfrac{1}{2}) \ln \big(1 + \dfrac{1}{2n}\big) \geq \dfrac{1}{2}$, ce qui résulte de la minoration[2] $\ln \big(1 + \dfrac{1}{2n}\big) \geq \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{8n^2}$.

5 Discussion et application

On a obtenu, en résumé :

$$Kn^n e^{-n} \sqrt{n} \leq n! \leq en^n e^{-n} \sqrt{n},$$

avec $K \sim 2,43$ et $e \sim 2,718$. Par rapport à la vraie formule de Stirling qui donne un équivalent analogue avec la constante $\sqrt{2\pi} \sim 2,50$, l'estimation n'est donc pas si mauvaise. En tous cas, elle est bien suffisante pour la plupart des questions de limites mettant en jeu $n!$.

Ces estimations permettent d'ailleurs de répondre à la question posée sur la calculatrice : quand la Voyage 200 renvoie-t-elle $+\infty$ pour $n!$ (en mode

[2] Qu'on peut prouver en utilisant le développement en série ou une étude de fonction.

approché) ? Il s'agit de déterminer quand $\ln n!$ est plus grand que $1000 \ln 10 \sim 2302$. En tabulant simplement la fonction $n \ln n - n + 1$ donnée par la méthode des rectangles on trouve $n = 451$. L'expérience montre qu'en réalité c'est 450, ce qu'on trouve exactement avec la méthode du point médian.

Une autre application consiste à demander le nombre de chiffres (en base 10) de $N = 100000!$. C'est, bien entendu la partie entière de $\log_{10} N$, plus un. Avec l'encadrement fourni par la méthode des rectangles on trouve que le nombre de chiffres est compris entre 456571 et 456576, avec les autres méthodes, on trouve exactement 456574.