Convergence : vitesse et accélération

Daniel PERRIN

1. Rapidité de convergence.

a) Introduction.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers a. On cherche à préciser la rapidité de convergence de (u_n). Pour cela on compare la suite $|v_n| = |u_n - a|$, qui est positive et tend vers 0, à une suite de référence (r_n).

Quitte à remplacer u_n par $|u_n - a|$ on se ramène au cas d'une suite (u_n) positive et qui tend vers 0, ce que nous supposerons dans tout le paragraphe 1.

Comparer peut avoir deux sens. On peut chercher à montrer que u_n et r_n sont proches, par exemple que u_n est équivalent à r_n ou à λr_n avec $\lambda \neq 0$ ou, à défaut, que u_n est **dominé** par r_n, c'est-à-dire que u_n est un $O(r_n)$ ("un grand O" de r_n). Rappelons que ceci signifie qu'il existe une constante $M > 0$ telle que l'on ait, pour n assez grand, $u_n \leq Mr_n$. Une notion plus précise consiste à demander qu'il existe $m, M > 0$ tels que l'on ait $mr_n \leq u_n \leq Mr_n$ pour n grand. On note parfois $u_n \asymp r_n$ cette propriété.
Mais on peut aussi chercher à montrer que u_n tend plus vite vers 0 que r_n. C'est le cas où u_n est **négligeable** devant r_n : $u_n = o(r_n)$, ce qui signifie que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N, tel que l'on ait, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq \epsilon\, r_n$.

Lorsqu'on a une suite convergente (u_n), on cherchera des procédés pour accélérer sa convergence, c'est-à-dire pour remplacer (u_n) par une suite (u'_n) qui converge vers la même limite, mais plus rapidement. C'est l'objet des paragraphes 2,3,4.

b) Les étalons.

Les suites de référence auxquelles on peut comparer (u_n) sont les suivantes :

$$\frac{1}{(\ln n)^{\beta}},\ \beta > 0\,;\ \frac{1}{n^{\alpha}},\ \alpha > 0\,;\ k^n,\ 0 < k < 1\,;\ \frac{1}{n!}\,;\ \frac{1}{n^n}\,;\ k^{2^n},\ 0 < k < 1.$$

On vérifie que chaque suite tend plus vite vers 0 que celle qui la précède.

c) La convergence géométrique.

Définition 1.1.
On dit qu'une suite (u_n) converge (au moins) **géométriquement** *vers 0 si elle est dominée par une suite géométrique (k^n) avec $0 < k < 1$.*

Le théorème suivant est essentiel pour assurer qu'une convergence est géométrique :

Théorème 1.2.(D'Alembert).
Soit (u_n) une suite de nombres > 0. On suppose que le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers un nombre k avec $0 < k < 1$. Alors, la suite (u_n) converge vers 0 géométriquement et,

plus précisément, si ϵ est un nombre > 0 qui vérifie $k+\epsilon < 1$, la suite est dominée par $(k+\epsilon)^n$. (On parle, dans ce cas, de convergence géométrique de rapport k.)

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ comme dans l'énoncé. Comme u_{n+1}/u_n tend vers k, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait, pour $n \geq p$,

$$(*_n) \qquad k-\epsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k+\epsilon.$$

En multipliant les inégalités $(*_k)$ pour $p \leq k \leq n-1$, on obtient

$$u_n \leq u_p(k+\epsilon)^{n-p} = \frac{u_p}{k^p}\,(k+\epsilon)^n,$$

de sorte que u_n est dominé par $(k+\epsilon)^n$ comme annoncé.

Remarques 1.3.
1) Comme k est > 0, on a aussi une minoration de u_n par une suite de la forme $m(k-\epsilon)^n$ pour tout ϵ vérifiant $0 < \epsilon < k$. Cela montre que la convergence n'est pas meilleure que géométrique, cf. §*e)*.
2) La définition 1.1 n'est pas toujours celle adoptée en analyse numérique où l'on préfère parfois donner comme définition la condition du théorème : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers un nombre k compris entre 0 et 1. Les exemples ci-dessous expliquent mon choix.

Exemples 1.4.
1) On ne peut pas améliorer le résultat de 1.2 en affirmant que (u_n) est équivalente à λk^n, ni même dominée par (k^n). Exemple : $u_n = nk^n$.
2) Une suite (u_n) peut être géométrique au sens de 1.1 sans vérifier les hypothèses de 1.2.
Exemple 1 : la suite lacunaire définie par $u_{2n} = k^{2n}$ et $u_{2n+1} = 0$, ici la suite u_{n+1}/u_n n'est pas définie pour n impair.
Exemple 2 : la suite définie par $u_{2n} = \dfrac{1}{2^{2n}}$ et $u_{2n+1} = \dfrac{1}{4^{2n+1}}$. La suite est géométrique (majorée par $1/2^n$), mais u_{n+1}/u_n n'a pas de limite (précisément, $\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{2^{2n}}$ tend vers 0 et $\dfrac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = \dfrac{1}{4}2^{2n}$ tend vers $+\infty$).
Avec le critère de Cauchy à la place de celui de D'Alembert on a une caractérisation qui marche dans tous les cas :

Proposition 1.5.
Soit (u_n) une suite de nombres ≥ 0. La suite converge géométriquement si et seulement si on a $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{u_n} < 1$.

Démonstration. Posons $s_n = \sup\limits_{p \geq n} \sqrt[p]{u_p}$. Rappelons que cette suite est positive et décroissante, donc convergente, et qu'on a $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{u_n} = \lim s_n$ par définition.
Supposons que l'on a $\lim s_n = k < 1$ et soit ϵ vérifiant $0 < \epsilon < 1-k$. On a, pour n grand, $s_n \leq k+\epsilon < 1$, d'où, *a fortiori*, $\sqrt[n]{u_n} \leq k+\epsilon$, soit $u_n \leq (k+\epsilon)^n$ et la suite converge géométriquement.
Réciproquement, si on a $u_n \leq Mk^n$ (avec $0 < k < 1$) pour n grand, on vérifie qu'on a $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{u_n} \leq k$.

Exemple 1.6. Un cas important d'application du théorème 1.2 est celui des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, pour une fonction f de classe C^1. Si f admet un point fixe α attractif, c'est-à-dire vérifiant $0 < |f'(\alpha)| < 1$, la suite converge vers α (pourvu que u_0 soit assez proche du point fixe). De plus, la définition de la dérivée montre que le rapport $\dfrac{u_{n+1}-\alpha}{u_n-\alpha}$ tend vers $f'(\alpha)$ quand n tend vers l'infini, ce qui montre que la convergence de la suite vers α est géométrique. En fait, dans ce cas, on peut montrer qu'on a un équivalent : $|u_n - \alpha| \sim \lambda |f'(\alpha)|^n$ avec $\lambda > 0$.

d) La convergence lente.

Il n'est pas facile de donner une définition de la convergence lente ! Nous dirons qu'une suite (u_n) (positive) converge **lentement** vers 0 si elle est minorée par une suite du type $\dfrac{A}{n^\alpha}$, avec $A, \alpha > 0$.

Remarques 1.7.
1) Si (u_n) converge géométriquement, elle ne converge pas lentement. En effet, on a $k^n = o(\dfrac{A}{n^\alpha})$ pour $0 < k < 1$ et $\alpha > 0$.
2) Si la suite (u_n) converge lentement et si u_{n+1}/u_n a une limite l, cette limite ne peut être que 1. En effet, si on a $l < 1$ il y a convergence géométrique, tandis que si on a $l > 1$ il y a divergence vers $+\infty$.
3) Dans le cas des suites récurrentes, la convergence lente correspond au cas $|f'(\alpha)| = 1$ (si toutefois il y a convergence, ce qui n'est pas certain dans ce cas).

e) La convergence rapide.

Définition 1.8.
On dit qu'une suite (u_n) converge vers 0 avec une convergence (au moins) **quadratique** *si elle est dominée par une suite (k^{2^n}) avec $0 < k < 1$.*

Remarque 1.9. Il y a une notion plus générale de convergence d'ordre $r > 1$ lorsque (u_n) est dominée par une suite de la forme (k^{r^n}), avec $0 < k < 1$.

Comme pour la convergence géométrique on a une sorte de critère de D'Alembert, mais, **attention**, ici il faut postuler la convergence de la suite :

Théorème 1.10.
Soit (u_n) une suite de nombres > 0 **de limite** *0. On suppose que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n^2}\right)$ a une limite finie (ou simplement qu'elle est bornée). Alors, la convergence de (u_n) est quadratique.*

Démonstration. Supposons qu'on ait $u_{n+1} \leq M u_n^2$ pour tout n, avec $M > 0$. On montre, par une récurrence évidente sur n, l'inégalité $u_{n+p} \leq \dfrac{1}{M}(M u_p)^{2^n}$, pour $p, n \geq 0$. Comme la suite (u_n) tend vers 0, on a $M u_p < 1$ pour p assez grand et on a la condition requise en posant $k = M u_p$.

Remarques 1.11.
1) Voici une méthode pratique pour retrouver l'inégalité ci-dessus. On part de l'hypothèse $u_{n+1} \leq M u_n^2$. On écrit ensuite $u_{n+2} \leq M u_{n+1}^2 \leq M^{1+2} u_n^4$, puis $u_{n+3} \leq M u_{n+2}^2 \leq M^{1+2+4} u_n^8$, jusqu'à ce que la relation à prouver nous saute sauvagement aux yeux.
2) La condition quadratique ne suffit pas à assurer la convergence de la suite, même si u_{n+1}/u_n^2 tend vers une limite < 1. Exemple : $u_n = \lambda k^{2^n}$ avec $k > 1$ et $\lambda > 1$ (la suite tend vers l'infini bien que u_{n+1}/u_n^2 tende vers $1/\lambda < 1$).

Exemples 1.12.
1) Si on a une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f de classe C^2, et si α est un point fixe de f qui vérifie $f'(\alpha) = 0$, la suite converge vers α (si u_0 est assez proche de α, cf. Exemple 1.6) et cette convergence est quadratique. Pour le voir, on applique la formule de Taylor à f :

$$u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha) = (u_n - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(u_n - \alpha)^2}{2} f''(\theta_n)$$

avec $\theta_n \in]\alpha, u_n[$. On en déduit, avec $f'(\alpha) = 0$, $\dfrac{u_{n+1} - \alpha}{(u_n - \alpha)^2} = \dfrac{1}{2} f''(\theta_n)$ et, quand n tend vers l'infini, cette quantité tend vers $f''(\alpha)/2$, d'où le résultat.
2) On est dans la situation précédente, en particulier, lorsqu'on utilise la méthode de Newton.

2. Accélération de convergence : méthode de Romberg-Richardson.

Cette méthode s'applique lorsqu'on a une suite (u_n) qui converge vers a avec une convergence géométrique de rapport $k < 1$ et qu'**on connaît** le rapport k. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 2.1.
Soit (u_n) une suite de nombres réels qui converge vers a. On suppose qu'on a un développement asymptotique de la forme

$$u_n = a + \lambda k^n + O(k'^n) \tag{1}$$

avec $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$ et $|k'| < |k| < 1$, de sorte que la convergence de (u_n) vers a est géométrique de rapport k. On pose

$$u'_n = \frac{u_{n+1} - ku_n}{1 - k}.$$

Alors, $u'_n - a$ est un $O(k'^n)$ et donc u'_n converge vers a avec une convergence qui est (au moins) géométrique de rapport k'.

Remarque 2.2. Pour que la méthode précédente ait un sens et un intérêt, il faut :
1) connaître le rapport k, indispensable pour calculer u'_n ,
2) ne pas connaître le coefficient λ (sinon il suffit de retrancher λk^n pour avoir aussitôt une suite qui converge comme un $O(k'^n)$).
L'exemple de l'approximation de π par les longueurs des polygones réguliers inscrits fournit un cas où cette méthode s'applique, voir ci-dessous.

Démonstration. Avant de démontrer le théorème, expliquons d'où sort la suite u'_n. Il s'agit d'éliminer le terme en k^n dans l'expression de u_n. L'idée, faute de connaître λ, est de regarder u_{n+1}, puis, en calculant $u_{n+1} - ku_n$, d'éliminer les k^n entre les deux termes. Maintenant, on note que $u_{n+1} - ku_n$ converge vers $(1 - k)a$ et, en divisant par $1 - k$, on trouve une suite u'_n qui converge vers a.
Précisément, posons $u_n = a + \lambda k^n + w_n$, de sorte que w_n est un $O(k'^n)$. Un calcul immédiat donne

$$u'_n - a = \frac{w_{n+1} - kw_n}{1 - k}.$$

Si on a $|w_n| \leq A\,|k'|^n$, on a alors

$$|u'_n - a| \leq \frac{|w_{n+1}| + |k|\ |w_n|}{1 - k} \leq \frac{A\,(|k'| + |k|)}{1 - k}\,|k'^n| = M|k'^n|,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 2.3. Lorsque la rapidité de convergence obtenue n'est pas jugée satisfaisante, on peut en général itérer la méthode.

3. Accélération de convergence : méthode d'Aitken.

C'est une variante de la méthode précédente qui permet de faire le calcul lorsqu'on sait qu'on a un développement asymptotique de la forme (1) dans lequel on ne connaît pas explicitement la quantité k. L'astuce est de trouver k quand même (ou presque) avec la remarque suivante : u_n, u_{n+1}, u_{n-1} sont respectivement de l'ordre de k^n, k^{n+1}, k^{n-1} et donc k n'est pas très différent de $c_n = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}$ (l'intérêt de considérer les différences $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ est de faire disparaître la limite a qui est évidemment inconnue). On est alors amené à regarder la suite $v'_n = \dfrac{u_{n+1} - c_n u_n}{1 - c_n}$ et on a le théorème suivant :

Théorème 3.1 (Aitken).
Avec les notations précédentes, si u_n admet un développement asymptotique du type (1), la suite (v'_n) converge vers a et $v_n - a$ est un $O(k'^n)$, de sorte qu'on gagne la même rapidité de convergence que dans la méthode de Romberg-Richardson.

Démonstration. En remplaçant c_n par sa valeur on obtient

$$u'_n = \frac{u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}}{2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}} = \frac{N}{D} \quad \text{d'où} \quad u'_n - a = \frac{N - aD}{D}.$$

On pose $u_n = a + \lambda k^n + w_n$, et on suppose qu'on a $|w_n| \leq A\,|k'^n|$. On voit alors que le dénominateur D de $u'_n - a$ est équivalent à $-\lambda(k-1)^2 k^{n-1}$, tandis que le numérateur $N - aD$ qui vaut

$$N - aD = \lambda k^{n-1}(2kw_n - k^2 w_{n-1} - w_{n+1}) + w_n^2 - w_{n+1}w_{n-1}$$

est majoré en valeur absolue par $M_0|k|^{n-1}|k'|^n$ où M_0 est une constante > 0 et on en déduit que $|u'_n - a|$ est bien majoré par $M|k'|^n$ avec $M > 0$.

Remarque 3.2. La méthode d'Aitken s'applique notamment aux suite récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. En effet, si on suppose que f est une fonction C^2 contractante de $[a, b]$ dans $[a, b]$, elle admet un unique point fixe α et, si on suppose $f'(\alpha)$ et $f''(\alpha)$ non nuls, on peut montrer que la suite récurrente associée converge vers α avec un développement asymptotique : $u_n = \alpha + \lambda\, f'(\alpha)^n + \mu\, f'(\alpha)^{2n} + o\big(f'(\alpha)^{2n}\big)$, avec λ et $\mu \neq 0$, dans lequel $f'(\alpha)$, comme α, est inconnu en général.

4. Exemples.

1. Approximation de π.

On calcule le demi-périmètre u_n du polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans le cercle unité. On a la formule : $u_n = 2^n \sin \dfrac{\pi}{2^n}$, mais on peut aussi calculer u_n par récurrence, sans utiliser π (qu'on cherche à calculer). Pour appliquer la méthode de Romberg-Richardson, il suffit de développer $\sin x$ au voisinage de 0 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!} + o(x^{2n+1}).$$

On en déduit :

$$u_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} = \pi - \frac{\pi^3}{6}\frac{1}{4^n} + O(\frac{1}{16^n})$$

et on peut appliquer le théorème 2.1 avec $k=\frac{1}{4},\ \lambda=-\frac{\pi^3}{6},\ k'=\frac{1}{16}$ (on notera que le coefficient λ n'est pas "connu" puisqu'il fait intervenir π que l'on cherche justement à calculer). Bien entendu, comme on connaît le développement du sinus à un ordre quelconque on peut itérer la méthode (les valeurs suivantes des k_i sont $1/16$ et $1/64$). Voici un exemple des résultats numériques ainsi obtenus (rappelons que l'on a, en réalité, $\pi \simeq 3,141592654$) :
Avec u_n elle même :

$$u_2 = 2,828427125, \quad u_3 = 3,061467459, \quad u_4 = 3,121445152,$$

$$u_5 = 3,136548523, \quad u_6 = 3,14033105,$$

avec $u'_n = (4u_{n+1} - u_n)/3$ (première suite de Romberg-Richardson) :

$$u'_2 = 3,13914757, \quad u'_3 = 3,141437716, \quad u'_4 = 3,14158298, \quad u'_5 = 3,141591892,$$

avec $u''_n = (16u'_{n+1} - u'_n)/15$ (Romberg bis) :

$$u''_2 = 3,141590392, \quad u''_3 = 3,141592664, \quad u''_4 = 3,141592486,$$

enfin, avec $u'''_n = (64u''_{n+1} - u''_n)/63$ (Romberg ter) :

$$u'''_2 = 3,1415927, \quad u'''_3 = 3,141592483.$$

On notera que la meilleure valeur est donnée par u''_3 (les erreurs dans les suivantes proviennent sans doute des erreurs d'arrondis des calculatrices qui sont amplifiées par les multiplications, notamment par 64).

2. Approximation de e.

On utilise l'approximation de e par la suite $u_n = \big(1+\frac{1}{n}\big)^n$. Cette convergence est lente. Pour le voir, on écrit

$$u_n = \exp\left(n\ln(1+1/n)\right)$$

et on utilise les développements limités du logarithme et de l'exponentielle au voisinage de 0. On obtient ([1])

$$u_n = e(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2} - \frac{21}{48n^3}) + o(\frac{1}{n^3}).$$

On applique la méthode de Romberg-Richardson à la suite $v_n = u_{2^n}$. Les coefficients k_i qui interviennent étant successivement $1/2, 1/4$ et $1/8$ les trois suites à considérer sont $v'_n = 2v_{n+1} - v_n$, $v''_n = (4v'_{n+1} - v'_n)/3$ et $v'''_n = (8v''_{n+1} - v''_n)/7$.
On obtient les valeurs suivantes en calculant jusqu'à v_5 :

$$v_5 = 2,676990129, \quad v'_4 = 2,716051761, \quad v''_3 = 2,718044855, \quad v'''_2 = 2,718235685,$$

(rappelons que l'on a $e \simeq 2,718281828$, de sorte que v'''_2 a 4 décimales exactes).

([1]) L'essentiel est que l'on ait un développement limité avec des termes en $1/n$, $1/n^2$, etc., les coefficients importent peu.