# Décroissance exponentielle

# et équation fonctionnelle

## 1. Le modèle macroscopique.

Les modèles de décroissance exponentielle s'appliquent à une large classe de phénomènes qui concernent aussi bien la dynamique des populations que la radioactivité, l'élimination des médicaments par les organismes, etc.
Dans tous les cas on suppose qu'on est en présence d'une population (de cellules, d'atomes, ...) qui varie en fonction du temps $t$. Plutôt que de repérer cette population par un nombre entier d'individus, ce qui mènerait à des fonctions discontinues du temps, on mesure cette population par une variable continue, par exemple sa masse $m(t) \in \mathbf{R}$. C'est physiquement justifié si le nombre d'individus est très grand (comme dans le cas d'atomes ou de bactéries) et sinon, c'est commode.
On suppose que ces individus ont deux états possibles (et deux seulement), qui s'excluent. (Les physiciens parlent d'une loi du "tout ou rien".) Dans ce qui suit nous les appellerons "vie" et "mort" (mais on pourrait aussi bien dire carbone 14 et azote 14, ...). Les trois postulats suivants décrivent la situation :
1) On suppose qu'on peut passer de l'état de vie à l'état de mort, mais pas l'inverse : il n'y a pas de naissances.
2) On suppose que les individus en vie sont identiques entre eux : chacun a autant de chances de mourir, il n'y a ni malades, ni faibles, ni forts.
3) On suppose que les chances de mourir sont les mêmes au cours du temps : les individus ne vieillissent pas, un individu (vivant) a les mêmes chances de mourir pendant un laps de temps $h$, que ce soit au temps $t$ ou au temps 0.

## 2. Le calcul.

Au temps $t = 0$ on a une population $m(0)$. L'hypothèse numéro 1 dit que la fonction $m(t)$ est décroissante. On traduit les hypothèses 2) et 3) en disant que le rapport entre le nombre de morts entre les temps $t$ et $t+h$, $h > 0$, et la population au temps $t$, est indépendant de $t$. Autrement dit :

$$\frac{m(t) - m(t+h)}{m(t)} = \frac{m(0) - m(h)}{m(0)}.$$

Intuitivement, ce rapport est la probabilité qu'un individu meure entre les temps $t$ et $t+h$, dite en termes de fréquences : nombre de cas favorables (si j'ose dire) sur nombre total de cas. On développe cette expression et on a $m(t+h)m(0) = m(t)m(h)$. Si on pose $f(t) = \dfrac{m(t)}{m(0)}$, la fonction $f$ vérifie l'équation fonctionnelle $f(t+h) = f(t)f(h)$, pour tous $t, h \in \mathbf{R}^+$. Comme $f$ est décroissante[1] et vaut 1 en 0, il existe $a > 0$ tel que $f(t) = a^t$ et on en déduit $m(t) = m(0)a^t$.

[1] Pour appliquer le théorème habituel, il faut prolonger $f$ sur $\mathbf{R}^-$ par $f(-x) = 1/f(x)$.