Formules de Taylor. Applications.

Remarques Le niveau naturel de cette leçon est celui du Deug.

Pré-requis

1. Continuité, dérivabilité, inégalité des accroissements finis, théorème de Rolle, dérivabilité d'ordre supérieur, intégration.
2. Pour les applications : séries entières.

1 Formule de Taylor avec reste intégral

1.1 Théorème

Théorème 1.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}. On a:*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Preuve Elle se fait par récurrence sur n en intégrant par parties le reste intégral $R_n(f) = \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$

Définition 1.1 *On appelle partie régulière d'ordre n du développement de Taylor de f en a le polynôme $P_n(x)$ défini par $P_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.*

Remarque Après le changement de variable $t = a+(b-a)s$, le reste intégral peut s'écrire sous la forme

$$R_n(f) = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a+s(b-a))\, ds.$$

1.2 Applications

- **Développement en série entière**
  On va traiter l'exemple classique suivant. On définit la fonction exponentielle exp comme l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle :

  $$y'(x) = y(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 1.$$

  Il vient immédiatement (par récurrence) que exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)}(0) = 1$. On démontre sans problème que exp ne s'annule pas (on rappelle pour cela qu'il suffit d'étudier la fonction $x \to \exp(x)\exp(-x)$) et donc reste positive et est croissante. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n s'écrit alors :

  $$\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \exp(tx)\, dt \qquad (*)$$

On peut alors majorer grossièrement le reste de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\left|\exp(x) - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)\right| &= \left|\frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \exp(tx)\, dt\right| \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} \exp(|x|) \int_0^1 (1-t)^n\, dt = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|x|)\end{aligned}$$

Le dernier terme de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Remarque Grâce à $(*)$, on a : $e = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \exp(t)\, dt$. En étudiant sur $[0,1]$ la fonction $t \to (1-t)^n \exp(t)$, on voit qu'elle reste comprise entre 0 et 1 quand $n \geq 1$. On en déduit l'encadrement :

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq e \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

et en particulier, le fait que e est irrationnel.

- On peut alors citer quelques développements en séries entières célèbres: ceux de $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$ où α est un réel non nul ...
- **Exercice**
  Montrer qu'une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme si, et seulement si, ses dérivées successives sont nulles à partir d'un certain rang.

2 Formule de Taylor-Lagrange

2.1 Théorème(s)

Théorème 2.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Preuve On déduit ce résultat de la formule de Taylor avec reste intégral et de la formule de la moyenne. Si on note m le minimum de la fonction continue $f^{(n+1)}$ sur $[a,b]$ et M son maximum, on remarque que

$$m \leq (n+1) \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a + s(b-a))\, ds \leq M.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'existence d'un $c \in [a,b]$ tel que

$$f^{(n+1)}(c) = (n+1) \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a + s(b-a))\, ds$$

et on conclut.
On a le résultat plus précis suivant :

Théorème 2.2 ** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ et dont la dérivée $n+1$ ième existe sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Preuve 1 Le cas $n = 0$ correspond à l'égalité des accroissements finis. Pour $n \geq 1$, on considère la fonction

$$\Theta_n(t) = f(b) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(b-t)^k - \lambda \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où l'on a choisi λ pour que $\Theta_n(a) = 0$. (On ne cherche pas pour le moment à exprimer ce λ.) Comme $\Theta_n(b) = 0$, on applique le théorème de Rolle. Il existe donc $c \in]a,b[$ tel que $\Theta'_n(c) = 0$. Cette égalité s'écrit

$$-f'(c) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(b-c)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(b-t)^{k-1} + \lambda \frac{(b-c)^n}{n!}$$

qui, après simplications, donne

$$\lambda = f^{(n+1)}(c)$$

Dans l'expression $\Theta_n(a) = 0$, il suffit de remplacer λ par la valeur que l'on vient de trouver. Ce qui termine cette preuve.

Preuve 2 Elle utilise le théorème des accroissements finis généralisés que l'on rappelle et démontre pour le confort du lecteur.

Proposition 2.1 ** (Accroissements finis généralisés) Soient f et g des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que:*

$$\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0.$$

(Comment cela se traduit-il géométriquement pour une courbe paramétrée régulière?)

Preuve de la proposition On applique le théorème de Rolle à la fonction définie sur $[a,b]$ par: $h(t) = (g(t) - g(a))(f(b) - f(a)) - (f(t) - f(a))(g(b) - g(a))$.

Suite de la preuve 2 On définit le reste $R_n(x) = f(a+x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k$ pour $x \in [0, b-a]$ et on le compare à $S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. On a

$$R_n(0) = R'_n(0) = ... = R_n^{(n)}(0) = 0,$$
$$S_n(0) = S'_n(0) = ... = S_n^{(n)}(0) = 0.$$

De l'utilisation répétée du théorème des accroissements finis généralisés il résulte l'existence d'une suite de $n+1$ réels $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+1}$ vérifiant $0 < \xi_{n+1} < \xi_n < ... < \xi_1 < x \leq b - a$ et telle que

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(0)}{S_n(x) - S_n(0)} = \frac{R'_n(\xi_1)}{S'_n(\xi_1)} = \frac{R'_n(\xi_1) - R'_n(0)}{S'_n(\xi_1) - S'_n(0)} = \frac{R''_n(\xi_2)}{S''_n(\xi_2)} = ... = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{S_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$

Comme $S_n^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = 1$, on obtient, pour $x = b-a$, $R_n(b-a) = \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(a+\xi_{n+1})$.

Remarque Noter que la formule de Taylor-Lagrange (de même que le théorème de Rolle) **n'est pas valable si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.** Penser par exemple à la fonction $f(x) = e^{ix}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

2.2 Applications

- **Convexité** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) de classe C^2 sur I. Si $f'' \geq 0$ sur I alors la courbe représentative de f est au dessus de ses tangentes.

- **Inégalités de Kolmogorov** Soit $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que $|f|$ et $|f''|$ sont bornées respectivement par M_0 et M_2. Alors $|f'|$ est bornée par $2\sqrt{M_0 M_2}$.
  preuve Soit $x \in]a, +\infty[$ et $u \in]0, +\infty[$. Il existe alors $c_{x,u} \in [x, x+u]$ tel que

  $$f'(x) = \frac{1}{u}\left(f(x+u) - f(x) - \frac{u^2}{2!} f''(c_{x,u})\right).$$

  On en déduit que

  $$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{u} + \frac{u}{2} M_2.$$

  Si $M_2 = 0$, on fait tendre u vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente et on obtient $f' = 0$ sur $]a, +\infty[$ et le résultat annoncé est évidemment vérifié.
  Si $M_2 \neq 0$, on minimise l'expression de droite dans l'inégalité en choisissant $u = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ et on obtient $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$, ceci pour tout $x \in]a, +\infty[$.

3 Formule de Taylor-Young

3.1 Théorème(s)

Théorème 3.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur l'intervalle I. Soit $a \in I$. Alors il existe une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$ telle que, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \epsilon(x).$$

Preuve Soit $x \in I$. On écrit la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$ sur l'intervalle $[a, x]$ (ou $[x, a]$); Il existe $c_x \in [a, x]$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c_x) \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^n}{n!}\left(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)\right). \quad (*) \end{aligned}$$

On pose, pour $x \neq a$,

$$\epsilon(x) = \frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$$

et, comme $f^{(n)}$ est continue en a, on déduit de l'égalité $(*)$ que $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.

On a le résultat plus fort suivant:

Théorème 3.2 ** Soit $a \in I$. On suppose que la fonction $f : I \to I\!R$ admet une dérivée d'ordre n au point a. Alors il existe une fonction $\epsilon : I \to I\!R$ vérifiant $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$ telle que, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \epsilon(x).$$

Preuve* La preuve se fait par récurrence sur n. Soit donc $n \in N^*$ et notons H_n l'assertion: *pour toute fonction $f : I \to I\!R$, n fois dérivable au point a, on a :*

$$\lim_{x\to a, x\neq a} \frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) = 0$$

H_1 est clairement vraie : c'est la définition de la dérivabilité au point a. Supposons donc H_n vraie et considérons une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable à l'ordre $n+1$ au point a. La fonction dérivée f', définie sur un certain $J = I \cap]a-\eta_1, a+\eta_1[$, est donc n fois dérivable en a. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\eta_\epsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in I \cap]a-\eta_\epsilon, a+\eta_\epsilon[$, on a :

$$|f'(t) - f'(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(t-a)^k| \leq \epsilon |t-a|^n$$

On définie sur $I \cap]a-\eta_\epsilon, a+\eta_\epsilon[$ les fonctions dérivables h et g par

$$h(t) = f(t) - f(a) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$$

et

$$g(t) = \frac{\epsilon}{n+1}|t-a|^n (t-a)$$

Le fait que H_n est vraie implique que

$$\forall t \in I \cap]a-\eta_\epsilon, a+\eta_\epsilon[, \quad |h'(t)| \leq g'(t)$$

Il résulte de l'inégalité des accroissements finis que

$$\forall x \in I \cap]a-\eta_\epsilon, a+\eta_\epsilon[, \quad |h(x) - h(a)| \leq |g(x) - g(a)|$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in I \cap]a-\eta_\epsilon, a+\eta_\epsilon[, \quad \frac{1}{|x-a|^{n+1}}\left|f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leq \frac{\epsilon}{n+1} \leq \epsilon$$

et H_{n+1} est vraie.

3.2 Applications

Cette formule de Taylor, contrairement aux deux précédentes, **n'a qu'un caractère local**. Elle ne pourra donc être utile que pour résoudre des problèmes locaux. Elle donne une condition suffisante pour qu'une fonction f possède **un développement limité** à l'ordre n en un point a : il suffit qu'elle admette en ce point a une dérivée d'ordre n. On peut, par exemple, s'attaquer aux problèmes suivants :

- détermination de limites;
- étude de la position de la courbe représentative d'une fonction au voisinage d'un point par rapport à sa tangente en ce point.