Équations différentielles linéaires : le cas du discriminant négatif

On commence par un lemme :

Lemme 1. *Soit ω un réel et f une solution (réelle) de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y = 0$. On suppose qu'on a $f(0) = f'(0) = 0$. Alors, f est identiquement nulle.*

Démonstration. On a $f'' + \omega^2 f = 0$. L'astuce (il n'y en a qu'une) c'est de multiplier cette égalité par f' pour faire apparaître des dérivées : $f'f'' + \omega^2 f'f = 0$. On constate que cette expression est la moitié de la dérivée de $(f')^2 + \omega^2 f^2$. Cette fonction, dont la dérivée est nulle, est donc constante. Vu les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$ elle est identiquement nulle. Mais, comme f et f' sont réelles, on a $(f'(x))^2 \geq 0$ et $f(x)^2 \geq 0$ et $(f'(x))^2 + \omega^2 f(x)^2 = 0$ n'est posssible que si les deux termes sont nuls. On a bien montré le lemme.

Corollaire 2. *Les solutions réelles de l'équation $y''+\omega^2 y = 0$ sont les fonctions $h_{A,B}(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$.*

Démonstration. On vérifie que ces fonctions sont solutions. Réciproquement, si on a une solution g, il existe A, B uniques tels que $h_{A,B}(0) = g(0)$ et $h'_{A,B}(0) = g'(0)$ (il suffit de résoudre le système linéaire en A et B donné par ces relations). Mais alors, la différence $f = g - h_{A,B}$ est solution de l'équation différentielle et vérifie $f(0) = f'(0) = 0$. Elle est donc nulle en vertu du lemme et on a $g = h_{A,B}$.

Pour le cas général d'une équation $ay'' + by' + cy = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, on fait le changement de fonction $f(x) = e^{rx}g(x)$ avec r réel. Ce changement est assez naturel : on le fait pour les équations d'ordre 1 et aussi pour celles d'ordre 2 quand r est racine de l'équation caractéristique. Ici, notre objectif, pour trouver le r convenable : tuer le terme en g'. Le calcul est facile (c'est presque le même que pour le cas $\Delta > 0$) et on obtient :

$$ag'' + (b + 2ar)g' + (ar^2 + br + c)g = 0.$$

Le choix de r est alors évident : on prend $r = -\dfrac{b}{2a}\cdot$

La nouvelle équation s'écrit $g'' - \dfrac{\Delta}{4a^2}g = 0$. On pose $\omega^2 = -\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$. On connaît toutes les solutions de cette équation par le corollaire 2. On a donc $g(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ et donc $f(x) = e^{rx}\big(A\cos\omega x + B\sin\omega x\big)$.

En définitive, on a montré :

Théorème 3. *On considère l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ et on suppose $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. On pose $\omega^2 = -\dfrac{\Delta}{4a^2}$ et $r = -\dfrac{b}{2a}\cdot$ Les solutions de l'équation sont alors les fonctions $f(x) = e^{rx}\big(A\cos\omega x + B\sin\omega x\big)$.*

Remarque 4. Les solutions de l'équation caractéristique étant $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, on voit qu'elles sont bien de la forme $r \pm i\omega$.