Anne et les carrés

Daniel PERRIN

1 Introduction

Le problème qui est à l'origine de ce texte est un problème de géométrie posé par ma collègue Anne Broise en dossier de CAPES.

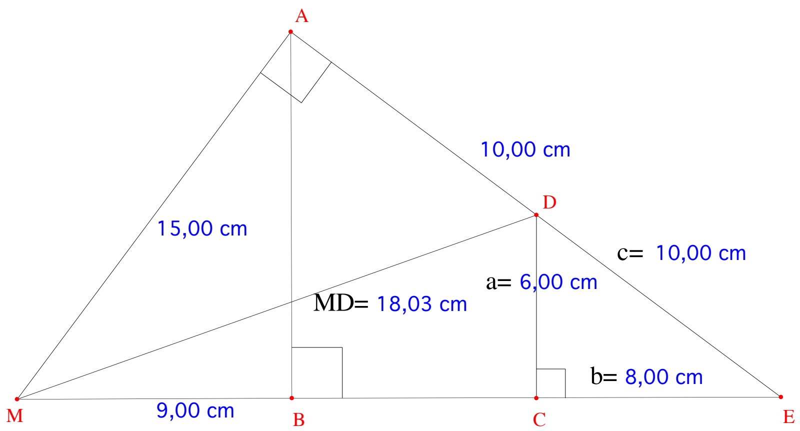

FIGURE 1 – La figure, échelle $1m = 2cm$

Il y a des angles droits en A, B, C. Il s'agit, à partir des longueurs $AD = 5m$, $DC = 3m$ et $AB = 6m$, de calculer les longueurs AM, BM et DM. C'est facile car il y a beaucoup de triangles semblables au triangle $3, 4, 5$. On trouve $AM = 15/2$, $BM = 9/2$ et $DM = 5\sqrt{13}/2$. La question (importante sur le plan didactique !) est de savoir si l'on peut s'arranger pour que le résultat donnant DM soit rationnel, afin de ne pas rajouter aux élèves la difficulté de manipuler des radicaux. Si on pose $CD = a$, $CE = b$, un calcul facile donne $b^2MD^2 = (a^2 + b^2)(4a^2 + b^2)$. Si l'on veut que les dimensions soient rationnelles, on se ramène à la question arithmétique suivante : trouver des entiers naturels non nuls a et b tels que $a^2+b^2 = DE^2$ et $4a^2+b^2$ soient tous deux des carrés parfaits, disons c^2 et d^2. On verra que la réponse n'est pas si évidente ...

2 La quartique elliptique

On cherche donc les solutions entières des équations $a^2+b^2=c^2$ et $4a^2+b^2=d^2$. Comme ces équations sont homogènes, il revient au même de chercher des solutions rationnelles, puisqu'en multipliant par les dénominateurs on en déduira des solutions entières. On peut donc travailler dans $\mathbf{P}^3(\mathbf{Q})$, les équations sont celles de deux quadriques [1] et il s'agit de trouver les points à coordonnées rationnelles de leur intersection X. La courbe X est une quartique [2] lisse. En effet, la matrice jacobienne des équations est $\begin{pmatrix} a & b & -c & 0 \\ 4a & b & 0 & -d \end{pmatrix}$ et on voit facilement que ses 2-mineurs ne sont pas tous nuls sur X. On sait alors que c'est une courbe de genre 1, donc une courbe elliptique et toutes les mathématiques du monde (ou presque) nous tombent dessus. En particulier, on sait qu'on peut munir l'ensemble $X(\mathbf{Q})$ des points rationnels de X d'une loi de groupe abélien, que le groupe en question est alors de type fini (théorème de Mordell), produit d'un groupe du type $\mathbf{Z}^r$ et d'un groupe fini, qu'il n'y a que très peu de possibilités pour ce dernier (théorème de Mazur) et qu'enfin le rang r est lié à la fonction L de X par les célèbres et lucratives conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer.

De manière élémentaire, il est facile de trouver 8 points rationnels triviaux (au sens où ils ont des coordonnées nulles) sur X. Ce sont les points $(0, \pm1, \pm1, \pm1)$ (quatre [3] points) et $(\pm1, 0, \pm1, \pm2)$ (quatre autre points).

Pour étudier cette courbe on va la projeter pour se ramener à une cubique plane, archétype des courbes elliptiques.

3 La cubique plane

On choisit comme centre de projection le point $O = (0,1,1,1)$ appartenant à X (cela va faire diminuer le degré de la courbe d'une unité et on obtiendra bien une cubique) et comme plan de projection le plan $d = 0$. On

1. C'est-à-dire des surfaces de degré 2.
2. C'est-à-dire une courbe de degré 4. Cela vient du fait qu'elle est intersection de deux surfaces de degré 2.
3. On est en projectif.

part de $M = (a, b, c, d) \in X$, $M \neq O$ et on cherche $N = (x, y, z, 0)$ dans le plan $d = 0$ aligné avec O et M. Pour cela on regarde la matrice de ces points : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix}$ et on écrit que tous ses 3-mineurs sont nuls. Un petit calcul donne les conditions $(b - d)x = ay$ et $(c - d)x = az$ qui conduisent à $x = a$, $y = b - d$, $z = c - d$. On obtient ainsi une projection de $\mathbf{P}^3 - O$ dans $\mathbf{P}^2$ qui à (a, b, c, d) associe $(a, b - d, c - d)$. On calcule l'image de X en tirant les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles : $a = x$, $b = y + d$, $c = z + d$ et en reportant dans les équations. On obtient $x^2 + y^2 - z^2 = 2dy - 2dx = 0$ et $4x^2 + y^2 + 2dy = 0$. De cette dernière équation on tire $d = -\dfrac{4x^2 + y^2}{2y}$ que l'on reporte dans l'autre et on obtient, en virant les dénominateurs la courbe plane projective Γ d'équation homogène :

$$3x^2y - 4x^2z - y^2z + yz^2 = 0.$$

On vérifie en calculant les dérivées partielles :

$$2x(3y - 4z), \quad 3x^2 - 2yz + z^2, \quad -4x^2 - y^2 + 2yz$$

que Γ est bien une cubique lisse [4], isomorphe à X.

On regarde ce que deviennent les points marqués : $(0, 1, -1, 1)$ donne $(0, 0, 1)$, $(0, -1, 1, 1)$ donne $(0, 1, 0)$, $(0, -1, -1, 1)$ devient $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 2)$ donne $(1, -2, -1)$, $(1, 0, -1, 2)$ devient $(1, -2, -3)$, $(1, 0, 1, -2)$ a pour image $(1, 2, 3)$ et enfin $(1, 0, -1, -2)$ devient $(1, 2, 1)$. Il y a encore O qui doit aussi donner un point de Γ, on vérifie (mais ce n'est pas évident) que c'est le point $(1, 0, 0)$.

4 Trouver de nouveaux points ?

Les méthodes classiques pour avoir de nouveaux points de Γ consistent à utiliser la loi de groupe, ou encore les sécantes et les tangentes à Γ (cette méthode remonte peut-être à Bachet, au début du XVII-ième siècle et en tous cas Newton savait faire cela). On note déjà que $\Omega = (1, 0, 0)$ est une inflexion de tangente $3y - 4z = 0$. On va prendre ce point pour origine. Les deux points $A = (0, 1, 0)$ et $B = (0, 0, 1)$ ont pour tangentes $z = 0$ et $y = 0$ qui recoupent la courbe en Ω : ce sont des points d'ordre 2.

Regardons le point $C = (1, -2, -1)$. La tangente en ce point est $x + z = 0$. Elle coupe Γ en A ce qui montre qu'on a $2C = A$. Au point $D = (0, 1, 1)$ la tangente est $z = y$ qui recoupe Γ en O et D est d'ordre 2.

4. On commence par regarder la dérivée par rapport à x.

Le point $E = (1, -2, -3)$ a pour tangente $z = -3x$ qui recoupe Γ en A : on a $2E = A$. Le point $F = (1, 2, 3)$ admet la tangente $z = 3x$ qui recoupe Γ en A : on a $2F = A$. Enfin $G = (1, 2, 1)$ a pour tangente $x = z$ qui recoupe Γ en A : on a $2G = A$.

On peut aussi chercher les intersections des droites joignant deux des 8 points. On vérifie qu'on n'obtient rien de nouveau, on reste dans l'ensemble des 8 points : on a mis en évidence un sous-groupe à 8 éléments de $\Gamma(\mathbf{Q})$ et on vérifie qu'il est isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ qui est bien une des valeurs prévues par le théorème de Mazur. La question est de savoir s'il y a d'autres points et notamment, quelle est la valeur du rang. Pour cela on va mettre l'équation sous une forme plus standard.

5 La forme de Weierstrass

Comme l'inflexion Ω a pour tangente $3y - 4z = 0$ on envoie le point Ω à l'infini et la tangente aussi en posant $t = 3y - 4z$. On obtient la courbe d'équation :

$$x^2 t = \frac{3}{16} y^3 + \frac{1}{8} y^2 t - \frac{1}{16} y t^2$$

ou en version affine :

$$x^2 = \frac{3}{16} y^3 + \frac{1}{8} y^2 - \frac{1}{16} y.$$

On multiplie cette équation par 16 puis par 9 et on pose $Y = 12x$ et $X = 3y$. On obtient l'équation :

$$Y^2 = X^3 + 2X^2 - 3X = X(X-1)(X+3)$$

qui est la forme usuelle, dite forme de Weierstrass. On voit sur cette équation les trois points d'ordre 2 qui correspondent aux racines du second membre. En utilisant [5] le logiciel *Pari* on voit que la courbe est de rang 0 et que sa partie de torsion est isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Autrement dit, il n'y a pas d'autre points rationnels que ceux déjà vus. Bref : si l'on revient au problème de géométrie initial, on voit qu'on ne peut pas s'arranger pour que MD soit rationnel. La réponse est un peu décevante, mais le chemin ne l'est pas ...

5. Merci Bernadette !