L'exercice d'Anthony Dubocq

Daniel Perrin

1 L'exercice

L'exercice proposé par Anthony sur le thème des aires se ramène, peu ou prou, au suivant :

On considère un carré. Déterminer, parmi les triangles équilatéraux contenus dans ce carré, quels sont ceux dont l'aire est maximum.

On notera $K = ABCD$ le carré et $T = PQR$ le triangle. Le problème étant invariant par similitude, on peut supposer que K est le carré unité de $\mathbf{R}^2$ dont les sommets sont les points $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$ et $D = (0,1)$. En identifiant le plan au plan complexe, les points A, B, D sont donc d'affixes $0, 1, i$.

On notera que, comme l'aire du triangle équilatéral de côté c vaut $\dfrac{c^2\sqrt{3}}{4}$, maximiser l'aire revient à maximiser c, voire c^2.

2 La solution

2.1 Les éliminés

Le lemme suivant permet de se ramener au cas où le triangle a deux sommets sur le bord de K. Précisément :

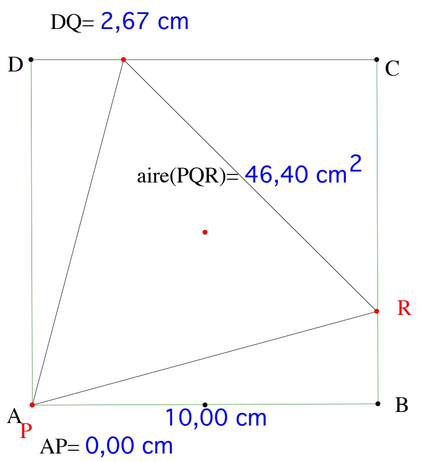
2.1 Lemme. *On suppose que le triangle n'a pas deux sommets situés sur deux côtés opposés de K. Alors, il est contenu dans un carré K', à côtés parallèles à K, strictement plus petit que K. En particulier, T n'est pas d'aire maximum.*

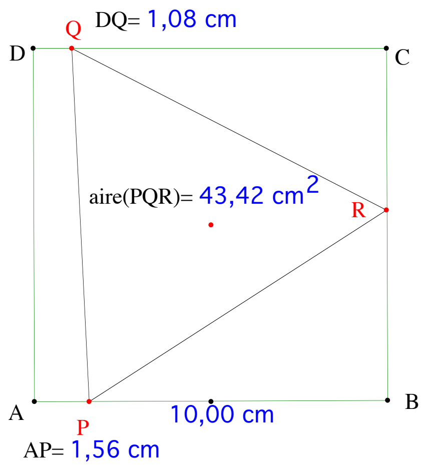
Démonstration. Si PQR n'a pas deux sommets situés sur deux côtés opposés, on peut supposer, par exemple, qu'il n'a pas de sommet sur les côtés $x = 1$ et $y = 1$. Si on désigne par c le maximum des abscisses et des ordonnées de P, Q, R, on a donc $c < 1$ et $T = PQR$ est contenu dans le carré K' homothétique de K par l'homothétie h de centre l'origine et de rapport c. Mais alors, $T' = h^{-1}(T)$ est contenu dans K et d'aire $\mathcal{A}(T)/c^2 > \mathcal{A}(T)$.

2.2 Record à battre : les triangles de coin

Il y a quatre triangles de coin isométriques, admettant un sommet en A, B, C ou D. Décrivons celui qui a un sommet P en A. Ses sommets R, Q sont respectivement sur $[BC]$ et $[CD]$ et symétriques par rapport à (AC). On pose $BR = DQ = x$ et on écrit le théorème de Pythagore dans BPR et CQR. On obtient $PR^2 = 1 + x^2 = QR^2 = 2(1-x)^2$, d'où $x^2 - 4x + 1 = 0$. On en déduit $x = 2 - \sqrt{3}$. Le côté c du triangle vérifie $c^2 = 1 + x^2 = 4x = 4(2-\sqrt{3})$. L'aire du triangle est égale à $2\sqrt{3} - 3 \simeq 0,4641$.

Notons que ce triangle est meilleur que l'un de ses concurrents directs, celui qui a deux sommets en A, B et le troisième sur la médiatrice. Celui-là vérifie $c^2 = 1$ et on a $4(2-\sqrt{3}) \sim 1,07 > 1$ (car $\sqrt{3} \sim 0,732 < \frac{7}{4}$).





2.3 Existence de triangles

On suppose désormais que T a deux sommets situés sur des côtés opposés de K. Quitte à appliquer une isométrie conservant le carré, on peut supposer qu'on a $P = (p, 0)$ avec $p \in [0,1]$ et même $p \in [0, 1/2]$ et $Q = (q, 1)$ avec $q \in [0,1]$. Le point P est donc d'affixe p et le point Q d'affixe $q + i$.

2.2 Lemme. *Les points P et Q ci-dessus étant donnés, il existe un triangle équilatéral direct PRQ contenu dans K (resp. admettant ses trois sommets sur le bord de K) si et seulement si on a $p+q \leq 2-\sqrt{3}$ (resp. $p+q = 2-\sqrt{3}$).*

Démonstration. Si PRQ est un tel triangle et si r est l'affixe de R, la rotation de centre P et d'angle $-\pi/3$ transforme Q en R et on a donc $r - p =$

$e^{-i\frac{\pi}{3}}(i+q-p)$, ou encore $r = p+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2})(i+q-p)$. On en déduit les parties réelles et imaginaires de r : $\mathrm{Re}\, r = \dfrac{p+q+\sqrt{3}}{2}$ et $\mathrm{Im}\, r = \dfrac{1+(p-q)\sqrt{3}}{2}\cdot$ Le triangle PRQ est contenu dans le carré si et seulement si ces nombres sont tous deux dans $[0,1]$. La condition sur la partie réelle donne $p+q \leq 2-\sqrt{3}$, celle sur la partie imaginaire $|p-q| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ et, comme $\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,577$ est plus grand que $2-\sqrt{3} \simeq 0,268$, on voit que cette deuxième condition est inutile.

Le cas d'égalité intervient lorsque R est sur $[BC]$.

2.3 *Remarque.* On notera qu'il y a une infinités de triangles équilatéraux inscrits dans K (i.e. avec leurs trois sommets sur le bord de K). Il suffit en effet de prendre $0 \leq p \leq 2-\sqrt{3}$ et $q = 2-\sqrt{3}-p$ pour en obtenir un.

2.4 La conclusion

2.4 Théorème. *Un triangle équilatéral contenu dans K est d'aire $\leq 2\sqrt{3}-3$, le maximum étant atteint pour les triangles de coin.*

Démonstration. On considère un triangle équilatéral contenu dans K avec deux sommets P, Q sur le bord et on reprend les notations du lemme 2.2. Le carré du côté du triangle est $c^2 = |i+q-p|^2 = 1+(q-p)^2$. Mais, comme p, q sont positifs et $p+q \leq 2-\sqrt{3}$, on a *a fortiori*, $|p-q| \leq 2-\sqrt{3}$, donc $c^2 \leq 1+(2-\sqrt{3})^2 = 4(2-\sqrt{3})$ et on a vu ci-dessus que c'est exactement le carré du côté du triangle de coin.