Trois applications de Thalès :

Ménélaüs, Céva, Pappus

Daniel PERRIN

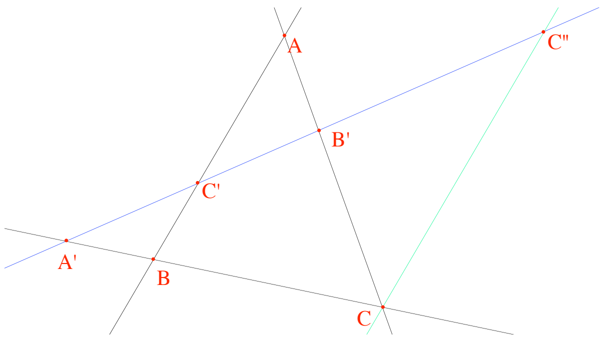
L'objectif de ce texte est de faire le point sur les théorèmes de Ménélaüs, Céva et Pappus, leurs énoncés, leurs réciproques éventuelles et leurs preuves et de préciser ce qui peut être traité le jour du CAPES.

1 Le théorème de Ménélaüs

1.1 La variante avec les longueurs

1.1 Théorème. *Soit ABC un triangle et soit D une transversale, c'est-à-dire une droite qui coupe respectivement les droites (BC), (CA), (AB) en A', B', C'. On suppose ces points distincts des sommets du triangle. Alors, on a l'égalité de rapports de longueurs :*

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

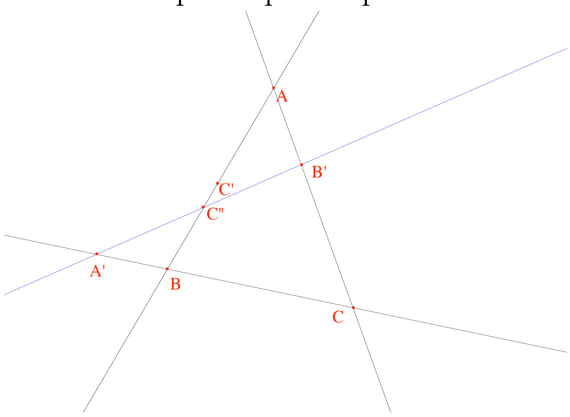


1.2 *Remarque.* Nous verrons plus bas que l'énoncé le plus raisonnable n'est pas en termes de rapports de longueurs mais de mesures algébriques, voire de vecteurs. Notons aussi qu'un choix rationnel des noms des points permet de retrouver facilement l'énoncé (les rapports se déduisent les uns des autres par permutation circulaire).

Démonstration. Un seul geste suffit pour se ramener à Thalès : tracer une parallèle à un côté (par exemple (AB)) passant par le sommet opposé (ici C), voir figure ci-dessus. Cette droite coupe D en C''. L'application de Thalès avec le triangle $A'CC''$ donne $\dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{C'B}{CC''}\cdot$ L'application de Thalès avec le papillon de sommet B' donne $\dfrac{B'C}{B'A} = \dfrac{CC''}{C'A}\cdot$ Le produit de ces relations donne le résultat.

1.2 Réciproque

On suppose qu'on a l'égalité $\dfrac{A'B}{A'C} \times \dfrac{B'C}{B'A} \times \dfrac{C'A}{C'B} = 1$ et il s'agit de prouver que A', B', C' sont alignés. Pour cela, on trace la droite $(A'B')$ qui coupe *a priori* (AB) en C'' et il s'agit de montrer qu'on a $C' = C''$. L'hypothèse donne $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{C''A}{C''B}$ ce qui ne suffit pas pour conclure (il y a deux points qui divisent un segment dans un rapport donné). D'ailleurs, l'exemple des points A', B', C' milieux des côtés de ABC montre que cette réciproque est évidemment fausse si l'on ne prend pas de précautions.



Il y a deux solutions pour surmonter cette difficulté :

• Un énoncé avec des mesures algébriques, voir ci-dessous.

• La précision de la situation des points. Par exemple, avec la figure ci-dessus, on suppose $B' \in [AC]$, $C' \in [AB]$ mais $A' \notin [BC]$. L'axiome de Pasch (une droite qui coupe un côté d'un triangle en coupe un deuxième) implique alors que C'' est lui aussi dans $[AB]$ donc égal à C'.

1.3 L'énoncé correct

1.3 Théorème. *Soit ABC un triangle et soient A', B', C' des points distincts de A, B, C situés respectivement sur (BC), (CA) et (AB). On suppose ces* *points distincts des sommets du triangle. Alors les points A', B' et C' sont alignés si et seulement on a l'égalité :*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

1.4 *Remarque.* Attention, la notion de mesure algébrique n'est plus au programme du collège ni du lycée. On peut (mais on ne le fait pas en général au lycée) utiliser des rapports de vecteurs (si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs colinéaires et si $\vec{w}$ est non nul, le rapport $\dfrac{\vec{v}}{\vec{w}}$ est le scalaire λ défini par $\vec{v} = \lambda\vec{w}$).

2 Le théorème de Céva

2.1 La variante avec les longueurs

2.1 Théorème. *Soit ABC un triangle et soient A', B', C' des points distincts de A, B, C et situés respectivement sur (BC), (CA) et (AB). On suppose que les droites (AA'), $BB')$ et (CC') concourent en G. Alors, on a l'égalité de rapports de longueurs :*

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

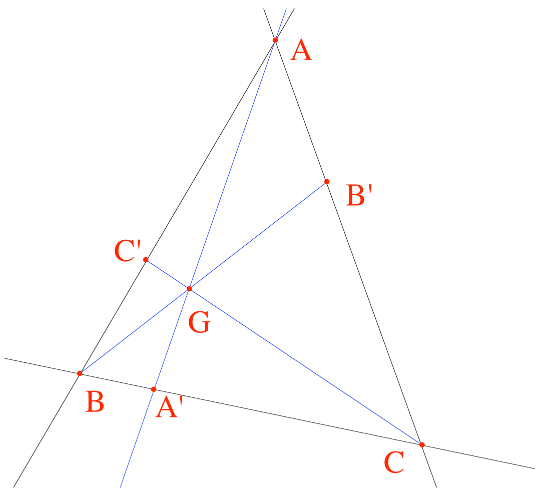
Démonstration.

On applique le théorème de Ménélaüs deux fois, une première avec le triangle ABA' et la transversale (CC') une seconde avec le triangle "complémentaire" CAA' et la transversale (BB'). On obtient les deux égalités :

$$\frac{C'A}{C'B} \times \frac{CB}{CA'} \times \frac{GA'}{GA} = 1$$

$$\frac{B'C}{B'A} \times \frac{GA}{GA'} \times \frac{BA'}{BC} = 1$$

et le résultat s'ensuit en multipliant ces relations.

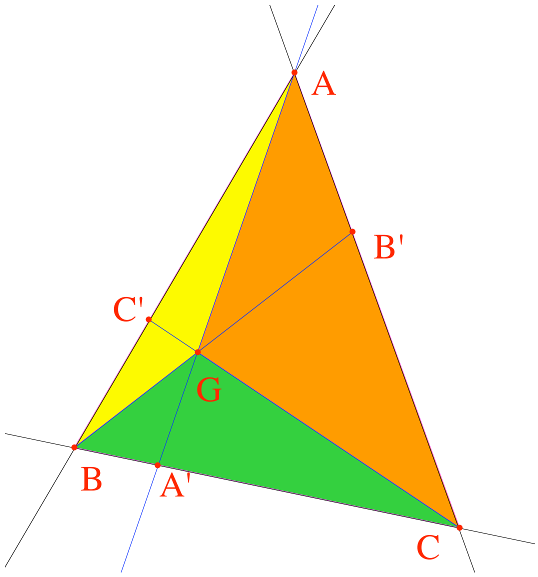


2.2 *Remarques.* 1) On note que l'égalité est la même que celle de Ménélaüs, ce qui n'est évidemment pas très raisonnable. On donnera un énoncé plus pertinent ci-dessous avec des mesures algébriques.

2) Je ne sais pas prouver directement Céva à partir de Thalès sans passer par Ménélaüs.

3) En revanche, je rappelle la belle démonstration de ce résultat en utilisant les aires et notamment le lemme du chevron (voir [ME]), comme le montre la figure ci-dessous. En effet, on a la formule :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = \frac{\mathcal{A}(AGB)}{\mathcal{A}(AGC)} \times \frac{\mathcal{A}(BGC)}{\mathcal{A}(BGA)} \times \frac{\mathcal{A}(CGA)}{\mathcal{A}(CGB)} = 1.$$



2.2 Réciproque

Il y a ici deux difficultés. D'abord, la réciproque de Céva est évidemment fausse avec la formule exprimée en termes de rapports de longueurs (car c'est la même que pour Ménélaüs qui conduit à l'alignement des points A', B', C' et non au concours des droites (AA'), (BB') et (CC')). Il faut donc utiliser des mesures algébriques ou des arguments de position (par exemple supposer que les trois points A', B', C' sont dans les segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ et pas seulement sur les droites). Ensuite, si l'on tente de prouver la réciproque, on est amené à introduire le point d'intersection G de (AA') et (BB') par exemple, mais il faut pour cela que ces droites ne soient pas parallèles. Le résultat convenable est le suivant :

2.3 Théorème. *Soit ABC un triangle et soient A', B', C' des points distincts de A, B, C situés respectivement sur (BC), (CA) et (AB). On suppose ces points distincts des sommets du triangle. Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement on a l'égalité :*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

2.4 *Remarque.* Pour savoir quel signe correspond à Céva et quel autre à Ménélaüs, il suffit de penser au cas des médianes d'un triangle.

3 La variante affine de Pappus

Voici l'énoncé :

3.1 Théorème. *Soient d, d' deux droites sécantes en O et soient A, B, C (resp. A', B', C') trois points de d (resp. d') distincts de O. On suppose que les droites (AB') et (BA') sont parallèles, ainsi que (AC') et (CA'). Alors (BC') et (CB') sont parallèles.*

Démonstration. On applique Thalès d'abord avec (AB') et $(A'B)$, puis avec (AC') et $(A'C)$ et on obtient les égalités :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} \quad \text{et} \quad \frac{OC}{OA} = \frac{OA'}{OC'}.$$

En les multipliant on a $\dfrac{OC}{OB} = \dfrac{OB'}{OC'}$. Pour conclure avec la réciproque de Thalès il faut soit utiliser les mesures algébriques, soit un argument de position (par exemple, comme sur la figure ci-dessus, le fait que les points soient sur la même demi-droite issue de O).

3.2 *Remarque.* Il y a une variante de Pappus, projective : on suppose que les droites (AB') et (BA') se coupent en W, (CA') et (AC') en V et (BC') et (CB') en U. Alors U, V, W sont alignés. Je ne sais pas prouver ce résultat directement à partir de Thalès [1]. On peut soit le prouver analytiquement, soit, si l'on est plus savant, le déduire du cas affine en notant que la propriété est projective et en envoyant les points U, V à l'infini.

1. Et je pense que ce n'est pas possible.

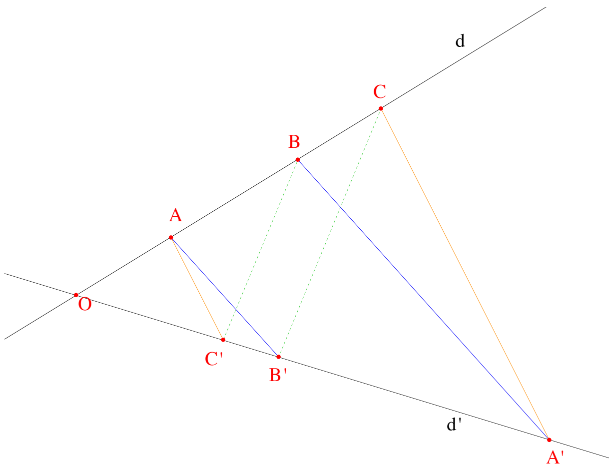


FIGURE 1 – La version affine de Pappus

4 Et au CAPES ?

Je propose de donner seulement les premiers résultats de chaque paragraphe, c'est-à-dire les théorèmes 1.1, 2.1 et 3.1, mais en ayant réfléchi notamment aux réciproques, de façon à pouvoir répondre à une question du jury. La réponse idéale consiste à noter que les réciproques de Ménélaüs et Céva sont fausses si l'on exprime les résultats en termes de longueurs et à les corriger soit en utilisant les mesures algébriques (avec la réserve sur les programmes), soit en employant un argument de position.

5 Références

[ME] PERRIN Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.