Bissectrices

Daniel Perrin

Introduction

Le but de ce texte est d'essayer de donner une référence fiable sur la question des bissectrices, pour traiter notamment l'exposé de CAPES intitulé Droites remarquables du triangle. *Parmi les questions épineuses :*

- *quelle définition des bissectrices, bissectrices de quoi ? de quelle nature : droites, demi-droites ? en termes d'angles ou d'axes de symétrie ?, etc.*
- *bissectrices intérieures et extérieures, problèmes de position,*
- *centre du cercle inscrit et barycentres, cercles exinscrits, etc.*

1 Rappels

Tous les rappels sur les questions de position, les secteurs, etc., ainsi que les rappels sur les angles, sont dans mon cours de M1 et peuvent être consultés sur ma page web, à la rubrique *Projet de géométrie*, Cours 1, axiomatique et convexité et Cours sur les angles.

Au départ, on dispose des notions de points, droites, demi-droites et segments.

1.1 Demi-plans

1.1 Axiome. *Une droite D partage le plan en trois parties non vides disjointes : D et deux demi-plans ouverts notés E^+ et E^-. Deux points a, b sont dans le même demi-plan (on dit aussi "du même côté de D") si et seulement si $[ab]$ ne rencontre pas D.*

1.2 Corollaire. *Soit D une droite et soient $a, b \notin D$. Alors, a et b sont dans des demi-plans différents (on dit aussi "de part et d'autre" de D) si et seulement si $[ab]$ rencontre D.*

1.3 Proposition. *1) Soit D une droite, o un point de D et a un point de E^+. Alors, la demi-droite $[oa)$ (resp. $]oa)$) est entièrement contenue dans $E^+ \cup D$ (resp. E^+).*

2) La demi-droite opposée est contenue dans $E^- \cup D$.

1.4 Proposition. *Soient D, D' des droites parallèles et distinctes et soit $a \in D'$. La droite D' est toute entière dans le demi-plan ouvert limité par D qui contient a.*

1.2 Secteurs

1.5 Définition. *Soient $\alpha = [oa)$ et $\beta = [ob)$ deux demi-droites d'origine o, non portées par la même droite. Soient U^+ (resp. V^+) le demi-plan (fermé) limité par (oa) contenant b (resp. par (ob) contenant a). On appelle* **secteur saillant** *défini par ces demi-droites l'intersection $U^+ \cap V^+$. Le secteur saillant est noté $[\widehat{aob}]$. Le point o est le* **sommet** *du secteur, les demi-droites $[oa)$ et $[ob)$ sont ses* **côtés**. *On définit aussi le secteur nul (cas $[oa) = [ob)$) et plat (cas $[oa)$ et $[ob)$ opposées).*

Les deux lemmes suivants sont essentiels pour travailler avec les secteurs :

1.6 Lemme. *Soient a et o deux points distincts et b, c deux points situés dans le même demi-plan ouvert E^+ limité par (oa). Alors, si c n'est pas dans $[\widehat{aob}]$, on a deux propriétés :*
1) $[ac]$ coupe la demi-droite $[ob)$,
2) $b \in [\widehat{aoc}]$.

1.7 Lemme. *Soit $[\widehat{aob}]$ un secteur saillant et soit c un point de ce secteur, non situé sur les demi-droites $[oa)$ et $[ob)$. Alors, les points a et b sont situés de part et d'autre de la droite (oc) et, plus précisément, le segment $[ab]$ coupe la demi-droite $[oc)$.*

1.3 Angles

On suppose qu'on a une distance dans le plan pour laquelle la ligne droite est le plus court chemin. La distance de a à b, ou longueur du segment $[ab]$, est notée ab. À partir de cette notion, on définit les longueurs d'arcs, ce qui se fait par la méthode habituelle avec la borne supérieure des lignes brisées (mais n'est pas totalement trivial). On peut alors définir les angles géométriques :

1.8 Définition. *On considère un secteur $[\widehat{aob}]$. Quitte à changer a, b sur les demi-droites on peut supposer qu'on a $oa = ob = 1$.* **L'angle géométrique**[1] *$\widehat{aob}$, angle des demi-droites $[oa)$ et $[ob)$, est la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{ab}$, intersection du cercle de centre o et de rayon 1 et du secteur.*

1. Attention, les puristes parleraient de mesure de l'angle.

Si on appelle 2π la longueur du cercle unité, les angles sont des éléments de $[0, \pi]$. L'angle du secteur nul (resp. plat) vaut 0 (resp. π). L'angle droit est l'angle $\pi/2$.

1.9 Proposition. *Soient $[\widehat{aob}]$ un secteur saillant et c un point du plan, distinct de o. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) On a la relation de Chasles géométrique : $\widehat{aob} = \widehat{aoc} + \widehat{cob}$.

2) Le point c est dans le secteur $[\widehat{aob}]$.

3) Les points a et b sont de part et d'autre de (oc) et on a $\widehat{aoc} + \widehat{cob} \leq \pi$.

On utilisera librement plusieurs autres propriétés des angles :

i) les notions de complémentaire et de supplémentaire,

ii) il y a deux demi-droites de part et d'autre d'une demi-droite donnée faisant le même angle, mais une seule d'un côté donné,

iii) les angles alternes-internes et correspondants (relativement à des parallèles) sont égaux,

iv) la somme des angles d'un triangle vaut π.

1.4 Symétries, isométries

Nous aurons besoin des propriétés des symétries axiales, notamment le fait que la symétrie d'axe D fixe D, conserve distance et angles et échange les demi-plans limités par D. Une possibilité alternative, souvent plus simple mais non conforme aux programmes actuels, est d'utiliser les triangles isométriques.

2 Bissectrices de demi-droites

2.1 Définition à la manière d'Euclide

2.1 Définition. *Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites distinctes issues du même point O et soit $[\widehat{xOy}]$ le secteur saillant ou plat défini par ces demi-droites. Une droite D passant par O est appelée* **bissectrice** *du secteur (ou des demi-droites) si les deux demi-droites $[Oz)$ et $[Oz')$ portées par D vérifient $\widehat{xOz} = \widehat{zOy}$ et $\widehat{xOz'} = \widehat{z'Oy}$.*

2.2 *Remarques.*

1) Il suffit de vérifier l'une des égalités, l'autre s'en déduit par passage au supplémentaire.

2) À cause de cette remarque, certains auteurs définissent les bissectrices comme des demi-droites (et il y en a deux opposées à ce moment là).

3) Si les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ sont égales, toute demi-droite $[Oz)$ vérifie l'égalité d'angles. On ne définit donc pas de bissectrice au sens d'Euclide dans ce cas.

2.3 Proposition. *Si D est bissectrice des demi-droites (distinctes) $[Ox)$ et $[Oy)$, l'une des demi-droites portées par D, disons $[Oz)$, est dans le secteur $[\widehat{xOy}]$. On en déduit $\widehat{xOy} = 2\widehat{xOz} = 2\widehat{zOy}$. Les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ sont de part et d'autre de D.*

Démonstration. Si ce n'était pas le cas, l'une des demi-droites de D, disons $[Oz)$, serait dans le même demi-plan limité par (Ox) que $[Oy)$, mais pas dans le secteur. Alors, le lemme 1.6 montre que $[Oy)$ est dans $[\widehat{zOx}]$ et, par Chasles géométrique 1.9, on en déduit $\widehat{xOz} = \widehat{zOy} + \widehat{xOy} = \widehat{xOz} + \widehat{xOy}$, donc $\widehat{xOy}$ est nul, ce qui est absurde. L'égalité d'angles vient de 1.9, le fait que $[Ox)$ et $[Oy)$ sont de part et d'autre de D de 1.7.

2.2 La version axe de symétrie

2.4 Proposition. *La droite D est bissectrice des demi-droites (distinctes) $[Ox)$ et $[Oy)$ si et seulement si elle est axe de symétrie de ces demi-droites.*

Démonstration. Supposons que la droite D est axe de symétrie et soit τ cette symétrie. Soit $[Oz)$ l'une des demi-droites portées par D. On a $\tau([Ox)) = [Oy)$ et $\tau([Oz)) = [Oz)$ (car τ fixe D) et donc, par conservation des angles par les symétries, $\widehat{xOz} = \widehat{yOz}$, de sorte que D est bissectrice.

Inversement, si on a l'égalité des angles, on appelle encore τ la symétrie par rapport à D et on note $[Oy')$ la demi-droite image de $[Ox)$ par τ. Les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy')$ sont de part et d'autre de D, donc $[Oy)$ et $[Oy')$ sont du même côté de D. Par conservation des angles on a $\widehat{xOz} = \widehat{zOy'}$, d'où $\widehat{zOy'} = \widehat{zOy}$ et on a le résultat en vertu de la propriété *ii*) des angles rappelée ci-dessus.

2.5 *Remarque.* La proposition précédente permet de définir la bissectrice lorsque l'on a $[Ox) = [Oy)$: c'est la droite (Ox).

2.3 Existence et unicité

2.6 Proposition. *Soit $S = [\widehat{xOy}]$ un secteur saillant. Il existe une bissectrice de S et une seule.*

Démonstration. (Existence) On choisit un point A sur $[Ox)$, différent de O, et on considère le point B de $[Oy)$ défini par $OA = OB$. Soit M le milieu de

$[AB]$ et D la droite (OM). Alors, elle convient. Voici deux pistes de preuves possibles, selon les programmes :

• Les triangles OAM et OBM sont isométriques (trois côtés), donc on a $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$.

• La symétrie τ d'axe (OM) échange A et B (on regarde le cercle de centre O et de rayon OA, il est invariant, et le cercle de centre M et de rayon MA, il est invariant aussi. Ces cercles se coupent en A, B qui sont échangés car ils sont de part et d'autre de (OM)).

(Unicité) On prend A, B avec $OA = OB$ comme ci-dessus. La bissectrice coupe $[AB]$ en M (c'est 1.7). Alors, M est le milieu de $[AB]$. Là encore plusieurs voies : les triangles OAM et OBM isométriques, la formule d'Al-Kashi, la symétrie par rapport à (OM) (elle échange les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ donc A et B).

2.4 Propriété caractéristique

2.7 Proposition. *Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites distinctes, $[Oz)$ la demi-droite portée par la bissectrice D et située dans le secteur $S = [\widehat{xOy}]$. L'ensemble des points de S équidistants des droites (Ox) et (Oy) est la demi-droite $[Oz)$.*

Démonstration. On note τ la réflexion par rapport à D. Soit $M \in [Oz)$. Soient P, Q ses projetés sur les droites (Ox) et (Oy). On a $\tau(M) = M$, $\tau([Ox)) = [Oy)$, donc aussi $\tau((Ox)) = (Oy)$ donc la perpendiculaire à (Ox) passant par M est transformée en la perpendiculaire à (Oy) passant par M. Il en résulte qu'on a $\tau(P) = Q$, donc $MP = MQ$. Une autre voie consiste à montrer que les triangles OMQ et OMP sont isométriques.

Inversement, si M est un point du secteur, équidistant des droites (Ox) et (Oy), on appelle P, Q ses projetés sur ces droites et on a $MP = MQ$. On considère $D = (OM)$ et la symétrie τ par rapport à D. Le cercle Γ de diamètre $[OM]$ est invariant par τ et P et Q sont les intersections de Γ avec les droites (Ox) et (Oy), mais aussi avec le cercle de centre M et de rayon MP, cercle lui aussi invariant par τ. Il en résulte que la paire $\{P, Q\}$ est invariante par τ et on a $\tau(P) = Q$ (car les points P, Q sont de part et d'autre de D puisque M est dans le secteur). Là encore on peut montrer – et c'est bien plus simple – que les triangles OMQ et OMP sont isométriques.

3 Bissectrices de droites

3.1 Définition

3.1 Proposition-Définition. *Soient D_1, D_2 deux droites sécantes en O. Il existe deux droites (et deux seulement) Δ_1 et Δ_2, telles que les réflexions associées échangent les D_i. Ces droites sont perpendiculaires en O. On les appelle les* **bissectrices des droites** *D_1, D_2.*

Démonstration. On fixe deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ sur les D_i et on considère leur bissectrice Δ_1. La symétrie τ par rapport à Δ_1 échange donc les D_i. Comme la symétrie centrale σ_O les conserve, le produit $\sigma_O\tau$, qui est la symétrie par rapport à la droite Δ_2 perpendiculaire à Δ_1 en O, les échange.

Une preuve élémentaire peut se faire en utilisant la relation de Chasles géométrique et les angles complémentaires et opposés par le sommet.

Montrons que ce sont les seules. Sinon, on aurait une autre droite Δ, axe de symétrie des D_i, faisant avec Δ_i un angle $\theta \neq 0, \pi/2$. Mais alors le produit $\tau_{\Delta_i}\tau_\Delta$ serait une rotation d'angle 2θ autour de O qui laisserait stable chacune des droites D_i et hormis Id et σ_O qui sont d'angles 0 et π, aucune rotation ne laisse stable une droite passant par O.

3.2 Propriété caractéristique

3.2 Proposition. *Un point M est sur l'une des bissectrices des droites D_i si et seulement si il est équidistant des D_i.*

Démonstration. Le sens direct est évident. Pour la réciproque on utilise les demi-droites qui contiennent les projetés et on est ramené à 2.7.

4 Bissectrices d'un triangle

4.1 Définition. *Soient A, B, C trois points non alignés du plan. On appelle* **triangle plein** *de sommets A, B, C et on note $T = ABC$ l'intersection des trois secteurs $[\widehat{BAC}]$, $[\widehat{CBA}]$ et $[\widehat{ACB}]$. L'intérieur du triangle T° est égal à T privé des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.*

4.1 Définition et concours

4.2 Proposition-Définition. *Soit ABC un triangle, D la bissectrice des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$, D' la perpendiculaire à D passant par A. Alors, D, D' sont les bissectrices des droites (AB) et (AC). Seule la droite D coupe* *le segment $[BC]$ en A'. On l'appelle* **bissectrice intérieure** *de l'angle $\widehat{A}$ et D' en est la* **bissectrice extérieure**. *La bissectrice extérieure ne rencontre le secteur $[\widehat{BAC}]$ et le triangle plein qu'au point A.*

On a l'égalité d'angles orientés de vecteurs : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC})$.

Démonstration. On sait que l'une des demi-droites portées par D, disons $[Ax)$, est dans le secteur $[\widehat{BAC}]$. En vertu de 1.7, cette demi-droite coupe $[BC]$. L'autre bissectrice ne rencontre le secteur qu'en A. Sinon, elle porterait une demi-droite $[Ay)$ contenue dans le secteur, donc dans l'un des secteurs $[\widehat{BAx}]$ ou $[\widehat{xAC}]$. Si elle est, disons, dans le premier, on a, par Chasles géométrique, $\widehat{BAx} = \widehat{BAy} + \widehat{yAx}$. Mais, comme $\widehat{yAx} = \pi/2$ et $\widehat{BAC} = 2\widehat{BAx}$, l'angle $\widehat{BAC}$ serait plus grand que π et c'est absurde.

4.3 Théorème. *Les bissectrices intérieures de ABC sont concourantes en un point I. Ce point est équidistant des côtés du triangle et centre de l'unique cercle inscrit dans le triangle. Il est intérieur au triangle. Les bissectrices extérieures en B, C et la bissectrice intérieure en A sont concourantes en un point J, centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle, mais à l'extérieur de celui-ci (cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$).*

Démonstration. On montre d'abord :

4.4 Lemme. *Les bissectrices intérieures issues de B et C se coupent en un point I.*

Démonstration. En effet, on a vu que la bissectrice intérieure issue de B (resp. C) coupe $]AC[$ en B' (resp. $]AB[$ en C'). Par rapport à (BB') les points A et C sont donc de part et d'autre, disons dans les demi-plans E^+ et E^-. Mais alors, en vertu de 1.3, la demi-droite $[BA)$ est tout entière dans E^+, en particulier C' est dans E^+. Il en résulte que $[CC']$ coupe (BB'). Le même raisonnement dans l'autre sens montre que $[BB']$ coupe (CC'), de sorte que les **segments** se coupent en I.

Revenons au théorème en montrant d'abord le concours des bissectrices intérieures. Le point I est équidistant des droites (BC) et (AB) d'une part et (CA) et (BC) d'autre part, donc aussi de (AB) et (CA). Il est donc situé sur l'une des bissectrices des droites (AB) et (AC). Il suffit alors de montrer que (AI) rencontre $[BC]$ et I sera sur la bissectrice intérieure. Pour cela on regarde les deux demi-plans limités par (AI). Comme les segments $[BB']$ et $[CC']$ se coupent en I, on voit que B, B' sont de part et d'autre de (AI). Mais alors, la demi-droite $[AC)$ est toute entière du même côté, donc B' et C sont du même côté. Il s'ensuit que B et C sont de part et d'autre et on a gagné.

Si P, Q, R sont les projetés orthogonaux de I sur les côtés, on a $IP = IQ = IR$ et le cercle de centre I passant par P, Q, R est tangent aux côtés (car la tangente en P est la droite perpendiculaire à (IP) passant par P).

Considérons alors la bissectrice intérieure (AI) de A et la bissectrice extérieure Δ de B. Elles ne sont pas parallèles, sinon (AI) serait perpendiculaire[2] à la bissectrice intérieure (BI), mais alors dans le triangle ABI, la somme des angles en A et B serait égale à $\pi/2$ et, leurs doubles, qui sont les angles en A et B de ABC auraient pour somme π, ce qui est absurde. Soit J le point d'intersection de (AI) et Δ. On montre comme ci-dessus qu'il est équidistant de (CA) et $(CB$, donc sur l'une des bissectrice de $\widehat{ACB}$. Si c'était la bissectrice intérieure on aurait $I = J$, ce qui est absurde car Δ ne rencontre le triangle qu'en B.

L'assertion sur le cercle exinscrit se montre comme dans le cas inscrit.

4.5 Commentaire. C'est sur la démonstration de 4.3 (et notamment de 4.4) qu'on voit l'intérêt des notions de position. Le raisonnement de 4.4 fonctionne d'ailleurs aussi dans le cas des médianes.

4.2 Les propriétés de barycentres

4.2.1 Rappels

4.6 Proposition. *Soit ABC un triangle (i.e. trois points non alignés) et I un point du plan, barycentre de A, α ; B, β ; C, γ. On suppose que les droites (AI), (BI), (CI) coupent respectivement (BC), (CA), (AB) en A', B', C'. Alors, A' est barycentre de B, β et C, γ et de même pour les autres par permutation circulaire.*

Démonstration. On écrit $\alpha\overrightarrow{AI} + \beta\overrightarrow{BI} + \gamma\overrightarrow{CI} = \vec{0}$ et on introduit A' :

$$\alpha\overrightarrow{AI} + \beta(\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'I}) + \gamma(\overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'I}) = \vec{0}$$

$$\text{ou encore} \quad (\alpha\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{A'I} + \overrightarrow{A'I}) + (\beta\overrightarrow{BA'} + \gamma\overrightarrow{CA'}) = \vec{0}.$$

Le premier terme est colinéaire à $\overrightarrow{AI}$ et le second à $\overrightarrow{BC}$ et comme ces vecteurs sont indépendants (sinon (AI) ne coupe pas (BC)), on a $\beta\overrightarrow{BA'} + \gamma\overrightarrow{CA'} = \vec{0}$ et le résultat.

Le résultat suivant est un cas particulier du théorème de Céva :

2. On utilise le postulat d'Euclide ici.

4.7 Proposition. (Céva) *Soit ABC un triangle et A', B', C' des points situés respectivement sur les segments ouverts $]BC[$, $]CA[$, $]AB[$. On suppose qu'on a la relation :* $\dfrac{A'B}{A'C} \times \dfrac{B'C}{B'A} \times \dfrac{C'A}{C'B} = 1$. *Alors, les droites (AA'), $BB')$, (CC') concourent en I.*

Démonstration. Les droites (BB') et (CC') sont sécantes en I (car B, B' sont de part et d'autre de (CC')). De même, les droites (AI) et (BC) sont sécantes en $A'' \in [BC]$ (on montre, avec les lemmes habituels, que B et C sont de part et d'autre de (AI)). On écrit I comme barycentre de A, B, C avec les coefficients α, β, γ. On en déduit que A'' est barycentre de B, C avec les coefficients β, γ et on a donc $\dfrac{A''B}{A''C} = \dfrac{\beta}{\gamma}$ et de même pour les autres : $\dfrac{B'C}{B'A} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ et $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot$ Avec l'hypothèse il s'ensuit qu'on a $\dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{A''B}{A''C}$ et, comme A' et A'' sont tous deux dans $[BC]$, on en déduit $A' = A''$ et le résultat.

4.8 Corollaire. *Soit ABC un triangle et A', B', C' des points situés respectivement sur les segments ouverts $]BC[$, $]CA[$, $]AB[$. On suppose qu'il existe α, β, γ positifs tels que A', B' et C' sont barycentres de B, C ; C, A ; A, B avec les coefficients β, γ ; γ, α et α, β. Alors, les droites (AA'), $BB')$, (CC') concourent en I et I est barycentre de A, B, C avec les coefficients α, β, γ.*

Démonstration. Que les droites soient concourantes résulte de Céva. Si I est barycentre avec les coefficients λ, μ, ν, les calculs ci-dessus donnent $\dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ et $\dfrac{\mu}{\nu} = \dfrac{\beta}{\gamma}$ et on en déduit $\dfrac{\lambda}{\alpha} = \dfrac{\mu}{\beta} = \dfrac{\nu}{\gamma}\cdot$

4.2.2 Les bissectrices

On obtient une autre preuve du concours des bissectrices en utilisant Céva :

4.9 Proposition. *Soit ABC un triangle, A', B', C' les points d'intersection des bissectrices intérieures de ABC avec les côtés opposés. On pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. On a la formule :* $\dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{AB}{AC}\cdot$ *Le point A' est barycentre des points B, C munis des coefficients b, c. Les bissectrices intérieures sont concourantes en I, qui est barycentre de A, B, C munis des coefficients a, b, c.*

Démonstration. Pour l'égalité des rapports, le plus simple est d'utiliser les aires. On a $\mathcal{A}(ABA') = \frac{1}{2}AB.AA' \sin \frac{\widehat{A}}{2}$ et de même pour ACA'. Le lemme des proportions (voir [ME] Ch. 7) conclut. La propriété de barycentre de A' en découle et on en déduit le concours des bissectrices avec le théorème de Céva. On applique le corollaire précédent pour avoir la propriété de I.

4.2.3 Une autre voie

Voici une autre preuve, à la fois du concours des bissectrices et de la relation barycentrique. Avec une intuition fulgurante, on définit I comme le barycentre de A, a ; B, b et C, c, puis M comme le barycentre de $A, a+c$ et B, b et enfin N comme le barycentre de $A, a+b$ et C, c. On montre que $AMIN$ est un parallélogramme. En effet, on a $(a+b+c)\overrightarrow{IM} = (a+c)\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB}$ et avec $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ on en déduit $(a+b+c)\overrightarrow{IM} = c\overrightarrow{CA}$. Cela montre que (IM) et (CA) sont parallèles, donc aussi (IM) et (AN). Le raisonnement est identique pour les autres côtés.

En fait, le parallélogramme est un losange. En effet, on a $(a+b+c)\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB}$, donc $(a+b+c)AM = b \times c$ et de même pour AN. Il en résulte que la diagonale (AI) est bissectrice de $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$. On fait le même travail avec B, C à la place de A et on a gagné.

Je ne dirai pas ce que je pense de cette preuve ...

5 Référence

[ME] PERRIN Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.