Droites et plans de l'espace

Daniel Perrin

1 Introduction

Le but de ce texte est de donner des éléments pour traiter l'exposé de CAPES numéro 28 (numérotation 2013). En vérité, les exposés 27 et 28 posent plusieurs problèmes, dont le principal est le programme. Comme on n'a que le programme des classes de collège et de lycée à notre disposition (le programme des BTS est vraiment inutilisable, surtout en géométrie), il est totalement impossible d'avoir un traitement un tant soit peu rigoureux des questions géométriques de base, sans s'écarter largement des rails du programme. Dans le système précédent, il y avait (implicitement) une approche par les espaces vectoriels et les espaces affines, voire par la géométrie analytique, celle de $\mathbf{R}^n$*, qui conduisait à utiliser le programme complémentaire. Ici, on ne sait vraiment plus sur quel pied danser.*

J'ai donc fait un choix, plus facile pour la leçon 28 que pour la 27, celui de partir d'une approche à la manière d'Euclide (ou plutôt d'Euclide revu par Hilbert), mais en essayant de donner aussi des éléments sur les approches vectorielle et analytique. On commence donc par étudier les propriétés affines, puis les propriétés métriques pour aborder ensuite les caractérisations par les vecteurs et les équations.

Attention, *il y a ici beaucoup trop de choses pour la leçon de CAPES et il faut faire des choix, voir à la fin.*

Pour certains points on renverra à Mathématiques d'École, cité [ME]. Une autre référence possible, mais épuisée, est le livre d'Annie Cousin-Fauconnet.

2 Les axiomes et les premiers résultats

2.1 Les axiomes

On postule l'existence d'un ensemble appelé **espace (affine) de dimension** 3 et noté $\mathcal{E}$. Les éléments de cet espace sont appelés **points** et il contient deux sortes de parties remarquables : les **droites** et les **plans**, supposées infinies, et soumises aux axiomes ci-dessous :

1) Par deux points a, b *distincts passe une droite et une seule notée* (ab).

2) Par trois points non alignés a, b, c passe un unique plan noté (abc) ; toute droite passant par deux points distincts d'un plan est strictement contenue dans ce plan.

3) Chaque droite D est munie d'une relation d'ordre total sans plus petit ni plus grand élément.

Cet axiome permet de définir le segment $[ab] = \{x \in (ab) \mid a \leq x \leq b\}$, ainsi que la demi-droite $[ab) = \{x \in (ab) \mid a \leq x\}$ (si $a < b$).

4) Une droite D contenue dans un plan P partage ce plan en trois parties non vides et disjointes : D et deux demi-plans ouverts notés P^+ et P^-. Deux points a, b de P sont dans le même demi-plan (on dit aussi "du même côté de D") si et seulement si $[ab]$ ne rencontre pas D.

5) Un plan P partage l'espace $\mathcal{E}$ en trois parties non vides et disjointes : P et deux demi-espaces ouverts notés $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$. Deux points a, b sont dans le même demi-espace (on dit aussi "du même côté de P") si et seulement si $[ab]$ ne rencontre pas P.

On peut aussi remplacer les axiomes 3,4,5 par l'axiome suivant (qui sera démontré en 3.3) :

3') Si deux plans distincts ont un point commun, leur intersection est une droite.

On peut aussi dire que l'on suppose que les propriétés de la géométrie plane sont satisfaites dans chaque plan, ce qui évite de se poser les questions de définition des notions qui existent déjà dans le cas du plan.

2.2 Quelques conséquences

2.1 Proposition. *1) Soient D une droite et a un point n'appartenant pas à D. Il existe un unique plan P contenant D et a. Il est noté (D, a)*

2) Soient D et Δ deux droites qui se coupent en a. Il existe un unique plan P contenant D et Δ. Il est noté (D, Δ).

Démonstration. Pour 1) il suffit de prendre deux points $b, c \in D$ et le plan $P = (abc)$ convient, pour 2) de choisir $b \in D$ et $c \in \Delta$ et le plan $P = (abc)$ répond à la question.

3 Positions relatives des droites et des plans

3.1 Une droite et un plan

3.1 Proposition-Définition. *Soient P un plan et D une droite. Il y a trois possibilités :*

1) L'intersection $P \cap D$ contient deux points distincts a, b. On a alors $D \subset P$.

2) L'intersection $P \cap D$ est réduite à un point a. On dit que P et D sont **sécants***.*

3) L'intersection $P \cap D$ est vide. On dit que D est **strictement**[1] **parallèle** *à P.*

Démonstration. Le point 1) vient de l'axiome 2 et le reste est évident.

3.2 Théorème. *1) Si D est parallèle à P et non contenue dans P elle est contenue dans l'un des demi-espaces limités par P.*

2) Si D coupe P en o, les deux demi-droites de D d'origine o sont contenues chacune dans un demi-espace limité par P.

Démonstration. 1) Si D contient des points a, b situés de part et d'autre de P, le segment $[ab]$ rencontre P, donc D rencontre P.

2) On choisit $a \in D$, $a \neq o$. Si, disons, on a $a \in \mathcal{E}^+$, il est clair que $]oa)$ est contenue dans $\mathcal{E}^+$ (car la droite ne coupe le plan qu'en o). Si b est dans la demi-droite opposée, $[ab]$ coupe P en o, donc b est dans $\mathcal{E}^-$.

3.2 Deux plans

3.3 Proposition-Définition. *Soient P_1 et P_2 deux plans distincts*[2]*. Il y a deux cas :*

1) L'intersection $P_1 \cap P_2$ est vide. On dit que les plans sont **parallèles***.*

2) L'intersection $P_1 \cap P_2$ est non vide. Alors, cette intersection est une droite et les plans sont dits **sécants***.*

Démonstration. Le point 1) est évident, mais 2) ne l'est pas tout à fait[3]. Supposons que $I = P_1 \cap P_2$ contient un point a. Si I contient un autre point a', la droite (aa') est contenue dans I(axiome 2) et I ne contient pas de point en dehors de (aa') (si elle contient a'' en dehors de (aa') l'intersection est le plan $(aa'a'')$ et les plans P_i sont égaux).

Pour montrer que I contient un second point on prend $b \in P_1$, $b \notin P_2$. Supposons que b est dans le demi-espace $\mathcal{E}^+$ limité par P_2. Alors, les points de la demi-droite opposée à $[ab]$ sont dans $\mathcal{E}^-$. On obtient ainsi un point $b' \in P_1$ qui est dans $\mathcal{E}^-$. On considère alors un point $c \in P_1$, $c \notin (ab)$. S'il est dans P_2 on a fini. Sinon, il est dans $\mathcal{E}^+$ ou $\mathcal{E}^-$. S'il est dans $\mathcal{E}^+$ la droite (cb') coupe P_2 en $a' \neq a$, s'il est dans $\mathcal{E}^-$, c'est la droite (cb).

1. Dans le cas $D \subset P$ on dit aussi que D est parallèle à P.
2. Deux plans égaux sont considérés comme parallèles.
3. C'est ici qu'on utilise de façon essentielle l'axiome des demi-espaces, et c'est à peu près le seul endroit. On pourrait donc éventuellement remplacer l'axiome des demi-espaces par le point 2) de la proposition.

3.3 Deux droites

3.4 Proposition-Définition. *Soient* D_1 *et* D_2 *deux droites distinctes*[4]. *Il y a trois cas :*

1) Si D_1 *et* D_2 *sont coplanaires, leur intersection est soit vide (on dit que les droites sont* **parallèles***), soit réduite à un point (on dit que les droites sont* **sécantes***).*

2) Si D_1 *et* D_2 *ne sont pas coplanaires, leur intersection est vide.*

Démonstration. Le point 1) vient de l'axiome 1. Pour 2) on utilise 2.1.2.

3.4 Le théorème de Desargues

Je pense que le théorème de Desargues est un bon thème de développement pour le jour du CAPES : c'est spectaculaire, et facile.

3.5 Théorème. (Théorème de Desargues dans l'espace) *On considère trois droites non coplanaires, concourantes en un point* o. *Sur chacune de ces droites on prend deux points* $a, a'; b, b'; c, c'$, *distincts de* o. *On suppose que les droites (coplanaires)* (bc) *et* $(b'c')$ *(resp.* (ca) *et* $(c'a')$, *resp.* (ab) *et* $(a'b')$*) se coupent en* u *(resp.* v, *resp.* w*). Alors,* u, v, w *sont alignés.*

Démonstration. On note que a, b, c ne sont pas alignés (sinon, ils seraient sur une droite D et le plan défini par o et D contiendrait les trois droites données). Ils définissent donc un plan P. Ce plan contient les droites (bc), (ca) et (ab), donc les points u, v, w. Le même raisonnement montre que le plan $P' = (a'b'c')$ contient u, v, w. Ces points sont donc alignés sur la droite $\Delta = P \cap P'$.

3.6 Corollaire. (Théorème de Desargues dans le plan) *On considère trois droites d'un plan* P, *concourantes en un point* o. *Sur chacune de ces droites on prend deux points* $a, a'; b, b'; c, c'$, *distincts de* o. *On suppose que les droites* (bc) *et* $(b'c')$ *(resp.* (ca) *et* $(c'a')$, *resp.* (ab) *et* $(a'b')$*) se coupent en* u *(resp.* v, *resp.* w*). Alors,* u, v, w *sont alignés.*

Démonstration. On choisit un point ω extérieur[5] à P. Dans le plan $(o\omega a')$ (qui contient a) on trace la parallèle à $(o\omega)$ passant par a. Elle coupe $(\omega a')$ en a''. On construit de même b'' et c''. Le théorème de Desargues de l'espace appliqué à a', b', c' ; a'', b'', c'' fournit trois points u', v', w' alignés. Je dis que

4. Là encore on englobe l'égalité dans le parallélisme.

5. On suppose que le plan est plongé dans l'espace. Si ce n'est pas vrai, le théorème de Desargues peut être en défaut dans certaines géométries planes.

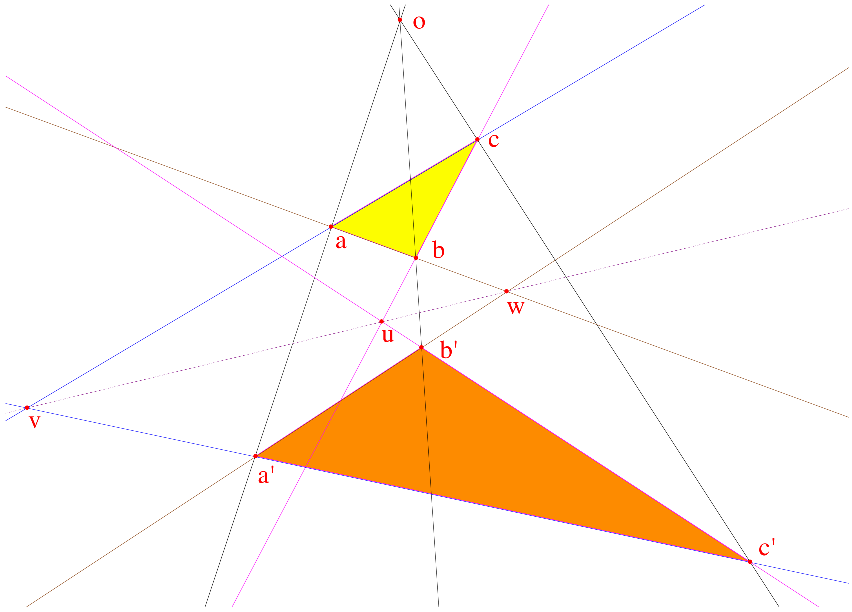

Figure 1 – Le théorème de Desargues

ce sont u, v, w. Montrons par exemple que le point d'intersection u' de $(b'c')$ et $(b''c'')$ est sur (bc) (il sera alors égal à u).

Déjà, le point u' étant sur $(b'c')$ est dans P. On considère ensuite les droites (bb'') et (cc''). Elles sont parallèles à $(o\omega)$ donc parallèles entre elles et déterminent ainsi un plan Q. Ce plan contient $(b''c'')$, donc aussi u'. Il contient (bc), ce qui montre qu'on a $P \cap Q = (bc)$. Comme u' est sur P et Q, il est sur (bc).

3.5 Applications

Une application de Desargues (voir par exemple [ME] Exercices 231 et 232 et leurs solutions) consiste à tracer la section d'un tétraèdre ou d'un cube par un plan donné par trois points. Il y a en général plusieurs méthodes et le fait qu'elle donnent le même plan résulte de Desargues. Un joli développement consiste à traiter le cas "difficile" du cube, c'est-à-dire le cas où il n'y a pas deux points dans une même face.

4 Étude du parallélisme

4.1 Le théorème du toit

4.1 Théorème. (Théorème du toit, version Bonaventure[6])

Soient P_1, P_2, Q trois plans sécants deux à deux. On pose $D = P_1 \cap P_2$, $D_1 = P_1 \cap Q$ et $D_2 = P_2 \cap Q$. On suppose que les droites D_1 et D_2 sont parallèles. Alors elles sont parallèles à D.

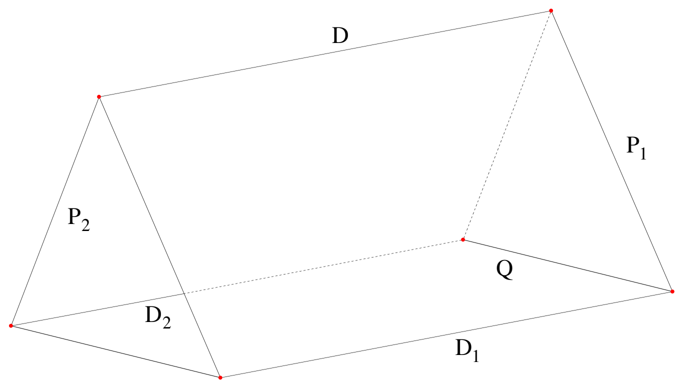

FIGURE 2 – Le théorème du toit

Démonstration. Si D_1 et D_2 sont égales, cette droite étant dans P_1 et P_2 est aussi égale à D et le résultat est évident. Supposons que ce n'est pas le cas et montrons par exemple que D et D_1 sont parallèles. Sinon, elles sont distinctes et, comme elles sont toutes deux dans le plan P_1, elle se coupent en un point a. Mais alors le point a est dans $P_1 \cap P_2 \cap Q \subset P_2 \cap Q = D_2$. On voit que a est commun à D_1 et D_2 ce qui contredit le fait qu'elles sont parallèles.

4.2 Corollaire. (Théorème du toit, version usuelle)

Soient P_1, P_2 deux plans sécants selon une droite D et soient D_1, D_2 des droites de P_1, P_2 respectivement. On suppose D_1 et D_2 parallèles. Alors ces droites sont parallèles à D.

Démonstration. Si D_1 et D_2 sont confondues, elles sont égales à $P_1 \cap P_2 = D$ et le résultat est évident. Sinon, comme elles sont parallèles, elles sont coplanaires et déterminent un plan Q et on a $D_1 = P_1 \cap Q$ et $D_2 = P_2 \cap Q$. Le résultat vient alors de 4.1.

6. Merci à Bonaventure Hounkpatin de m'avoir proposé cette version. Contrairement à ce que j'avais affirmé, le théorème du toit ne nécessite pas l'axiome d'Euclide.

4.2 L'axiome d'Euclide et quelques conséquences

Je rappelle ici l'axiome d'Euclide, très important sur le plan mathématique, mais peut-être pas indispensable à mettre en avant au CAPES. La conséquence la plus importante de cet axiome est sans doute la transitivité du parallélisme.

4.3 Axiome. *Par tout point il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.*

4.4 *Remarque.* Soit P un plan, D une droite de P et a un point de P. Alors, la parallèle D' à D passant par a est contenue dans P. En effet, c'est évident si a est sur D car on a alors $D' = D$ et sinon, le plan (D, D') contient D et a donc est égal à P.

4.5 Théorème. *Soient D, D' deux droites parallèles.*

1) Tout plan sécant à l'une est sécant à l'autre.

2) Tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

Démonstration. 1) Soit P un plan sécant à D (donc coupant D en un point a). Si on a $D' = D$ le résultat est évident. Sinon, soit Q le plan contenant D, D'. Il coupe P et n'est pas égal à P (car P ne contient pas D). L'intersection $P \cap Q$ est donc une droite Δ qui contient a, est différente de D (car D n'est pas contenue dans P) et de D' (car a n'est pas dans D'). Cette droite coupe D' en b (sinon, comme D' et Δ sont coplanaires, elles seraient parallèles et il y aurait deux parallèles à D' passant par a). Le point b est dans $P \cap D'$. Comme D' n'est pas contenue dans P (sinon elle serait égale à $P \cap Q = \Delta$), D' et P sont sécants et on a gagné.

Le point 2) est conséquence de 1).

4.6 Corollaire. *Soient P, Q deux plans parallèles, D une droite de P, a un point de Q. La parallèle à D passant par a est contenue dans Q.*

Démonstration. Soit D' la parallèle à D passant par a. Comme D' coupe Q en a elle est soit contenue dans Q, soit sécante. Si elle était sécante à Q, il en serait de même de D en vertu du théorème précédent. Mais P et Q sont parallèles et D est contenue dans P. Si on a $P = Q$, D est aussi contenue dans Q et c'est absurde, si $P \cap Q = \emptyset$ c'est absurde également.

4.7 Corollaire. *Soient D, Δ deux droites parallèles. On suppose Δ contenue dans le plan P. Alors D est parallèle à P.*

Démonstration. Cela résulte du point 2 de 4.5.

4.8 Théorème. (Transitivité du parallélisme des droites) *Soient D, D', D'' trois droites. On suppose D parallèle à D' et D' parallèle à D''. Alors D est parallèle à D''.*

Démonstration. Soit a un point de D'' et P le plan (D,a). Il contient D, donc est parallèle à D' (4.5) donc à D'' (idem), donc il contient D''. Les droites D, D'' sont donc coplanaires. De plus, si elles sont distinctes, elles ne se coupent pas, sinon par leur point de rencontre passeraient deux parallèles à D'.

4.9 Corollaire. *Soient P, Q deux plans. Alors P, Q sont parallèles si et seulement si il existe deux droites sécantes D_1, D_2 (resp. Δ_1, Δ_2) de P (resp. Q) avec D_i parallèle à Δ_i pour $i = 1, 2$.*

Démonstration. Si les plans sont parallèles, on choisit deux droites sécantes D_1, D_2 de P et un point α de Q. Les parallèles à D_1, D_2 passant par α sont contenues dans Q en vertu de 4.4 et conviennent.

Inversement, on suppose qu'on a les droites D_i, Δ_i comme ci-dessus. Si P, Q ne sont pas parallèles, on appelle D la droite intersection. Par le théorème du toit elle est parallèle à la fois aux D_i et aux Δ_i, donc D_1, D_2 sont parallèles, ce qui est absurde.

4.10 Corollaire. (Euclide pour les plans) *Soit P un plan et a un point. Il existe un unique plan parallèle à P passant par a.*

Démonstration. **Existence** : on considère deux droites D_1, D_2 sécantes de P et les parallèles Δ_1, Δ_2 à ces droites passant par a. Le plan $Q = (\Delta_1, \Delta_2)$ convient en vertu de 4.9.

Unicité : on suppose qu'on a deux plans distincts Q_1, Q_2 parallèles à P et passant par a. Ils sont donc sécants selon une droite D. On choisit deux droites D_1, D_2 sécantes de P et on considère les parallèles à D_1, D_2 passant par a. Chacune est contenue dans Q_1 et Q_2 par 4.6 et donc toutes deux sont égales à D, ce qui implique que D_1, D_2 sont parallèles et c'est absurde.

4.11 Corollaire. (Transitivité du parallélisme des plans) *Soient P, P', P'' trois plans ; on suppose P parallèle à P' et P' parallèle à P'', alors P est parallèle à P''.*

Démonstration. Cela résulte de l'assertion d'unicité de 4.10.

4.12 Proposition. *Soient P, Q deux plans parallèles et R un plan quelconque. Alors, si R est sécant à P il est aussi sécant à Q et les droites $P \cap R$ et $Q \cap R$ sont parallèles.*

Démonstration. La première assertion vient de 4.11, la seconde de la définition du parallélisme des droites.

4.3 Intersection de trois plans

4.13 Théorème. *Soient P_1, P_2, P_3 trois plans distincts. On suppose que deux quelconques des plans ne sont pas parallèles. On note $D_{i,j}$ la droite intersection de P_i et P_j. Il y a trois cas possibles pour l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$:*

1) Si la droite $D_{1,2}$ n'est pas parallèle à P_3, l'intersection est réduite à un point (cas du **trièdre***).*

2) Si la droite $D_{1,2}$ est strictement parallèle à P_3, l'intersection est vide et les trois droites $D_{i,j}$ sont parallèles (cas du **prisme***).*

3) Si la droite $D_{1,2}$ est contenue dans P_3, l'intersection est égale à $D_{1,2} = D_{2,3} = D_{3,1}$ (cas du **pinceau***).*

Démonstration. On a $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = D_{1,2} \cap P_3$ et on est ainsi ramené à un problème connu et les résultats concernant l'intersection sont clairs. Pour le point supplémentaire du 2), les droites $D_{1,2}$ et $D_{1,3}$ sont toutes deux dans P_1 et ne se coupent pas (sinon $D_{1,2}$ couperait P_3), donc elles sont parallèles.

4.14 *Remarque.* Si deux des plans coïncident on est ramené à l'intersection de deux plans, si deux sont parallèles, l'intersection est vide.

5 La géométrie métrique

On passe maintenant à la géométrie métrique. Il s'agit de donner un sens aux notions de longueur, angle, orthogonalité. Je propose une approche élémentaire, puis une entrée par le produit scalaire. Tout ce qui suit est dans [ME].

5.1 Mesure des longueurs, angles

On postule l'existence d'une **distance** sur $\mathcal{E}$ avec les axiomes usuels et notamment l'inégalité triangulaire. On note ab la distance de a à b (ou longueur du segment $[ab]$). Cela permet de définir les notions qui accompagnent celle de distance : milieux, isométries, sphères, boules, etc. On a une enfin une notion d'**angle** (et donc d'orthogonalité) qui coïncide avec la notion usuelle dans chaque plan, de sorte qu'on a les théorèmes usuels (Pythagore, Thalès, etc.).

5.2 Orthogonalité dans l'espace

La notion d'orthogonalité (dans chaque plan) permet de définir plusieurs notions dans l'espace.

5.1 Définition. *Deux droites D_1 et D_2 sont dites* **perpendiculaires** *si elles sont coplanaires et si, dans le plan qu'elles déterminent, elles sont perpendiculaires au sens du plan. On note $D_1 \perp D_2$.*

On a aussi une notion plus faible :

5.2 Définition. *Deux droites D_1 et D_2 sont dites* **orthogonales** *s'il existe des parallèles D'_1 et D'_2 à D_1 et D_2 qui sont perpendiculaires.*

5.3 *Remarques.* 1) Si D est orthogonale à Δ et D' parallèle à D, D' est orthogonale à Δ.
2) Deux droites D et D' sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et coplanaires (donc sécantes). En effet, par hypothèse, D est parallèle à une droite Δ qui est perpendiculaire à D' en a. On se place dans le plan $P = (D, D')$. Comme Δ est l'unique parallèle à D passant par a, elle est dans ce plan. Mais dans un plan on sait que si D est parallèle à Δ, elle-même perpendiculaire à D', D est perpendiculaire à D'.

5.4 Définition. *On dit qu'une droite D est* **perpendiculaire** *à un plan P si D coupe P en un point a et si D est perpendiculaire à toutes les droites de P qui passent par a. On note alors $D \perp P$.*

On notera que la définition précédente présente un avantage et un inconvénient. L'avantage c'est que, lorsque l'on sait que D est perpendiculaire à P, on en déduit aussitôt qu'elle est perpendiculaire à **toutes** les droites qui passent par le point d'intersection a, ce qui est un atout puissant. L'inconvénient, c'est la même chose (comme la langue de Diogène) : si l'on veut montrer que D est perpendiculaire à P il faut montrer qu'elle est perpendiculaire à toutes les droites de P passant par a, ce qui n'est pas facile. Le théorème suivant remédie à cet inconvénient :

5.5 Théorème. *Soient D une droite et P un plan. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) D est perpendiculaire à P,
2) D n'est pas contenue dans P et il existe deux droites distinctes D_1, D_2 de P telles que D soit perpendiculaire à D_1 et D_2,
3) D est orthogonale à deux droites non parallèles de P,
4) D est orthogonale à toutes les droites de P.

Démonstration. Il est clair qu'on a $1 \implies 4 \implies 3$. Montrons $3 \implies 2$. On suppose D orthogonale à D_1 et D_2, deux droites non parallèles de P. On montre d'abord que D n'est pas contenue dans P. Sinon, par 5.3, D serait perpendiculaire à D_1 et D_2, dans P et ces droites seraient parallèles. Montrons ensuite que D coupe P en a. Sinon, D serait parallèle à P, donc à une droite D_3 de P et cela impliquerait encore D_1 parallèle à D_2. Il en résulte que D est perpendiculaire aux droites parallèles à D_1, D_2 passant par a.

Il reste $2 \Longrightarrow 1$. Nous en donnerons une preuve un peu plus loin.

Voici quelques conséquences de ce résultat :

5.6 Corollaire. *1) Deux points distincts de $\mathcal{E}$ admettent un plan médiateur.*

2) Soit P un plan. Par tout point a de $\mathcal{E}$ passe une unique droite perpendiculaire à P.

3) Deux droites sont perpendiculaires au même plan si et seulement si elles sont parallèles.

Démonstration. 1) Soient a, b les points. On considère deux plans Q, Q' distincts contenant a, b. Dans Q (resp. Q'), a, b ont une médiatrice D (resp. D') qui est perpendiculaire à $[ab]$ en son milieu m. Alors le plan P défini par D, D' est un plan médiateur de a, b, ce qui signifie que, pour tout $p \in P$ on a $pa = pb$. Notons d'abord que (ab), qui est perpendiculaire à D, D', est perpendiculaire à P en m. Si p est dans P, la droite (pm) est donc perpendiculaire à (ab) et on a, par Pythagore, $pa^2 = pm^2 + ma^2 = pm^2 + mb^2 = pb^2$.

Si D, D' sont parallèles et si D est perpendiculaire à P, il résulte de 4.5 et 5.5 que D' aussi ce qui montre une moitié de 3).

Montrons 2). Il suffit de traiter le cas $a \notin P$ (si a est dans P, on conclut en traçant une parallèle à n'importe quelle perpendiculaire à P). On considère une sphère de centre a et de rayon assez grand pour couper P. On prend trois points b, c, d dans l'intersection[7] et on considère les plans médiateurs Q, R de b, c et b, d et leur intersection D. Elle contient a par construction. De plus, comme Q est perpendiculaire à (bc) et R à (bd), D est perpendiculaire aux deux, donc à P et c'est la droite cherchée.

Pour l'unicité, si D, D' contiennent a et sont perpendiculaires à P en b, c, le triangle abc a deux angles droits, ce qui est absurde.

Il reste la dernière moitié de 3). On suppose D, D' perpendiculaires à P en a, a'. Soit Δ la parallèle à D par a'. Alors elle est perpendiculaire à P en a' par le sens direct de 3) et on conclut par l'unicité de 2).

5.7 Définition. *On dit que deux plans sont* **perpendiculaires** *si chacun contient une droite perpendiculaire à l'autre. Il suffit pour cela que l'un d'eux contienne une droite perpendiculaire à l'autre.*

7. Il y a des axiomes cachés ici.

Sur le cube de la figure ci-contre, les droites (ab) et (ad) sont perpendiculaires, mais (ab) et $(a'd)$ sont seulement orthogonales. La droite (aa') est perpendiculaire au plan (abc). Les plans (abc) et (abb') sont perpendiculaires.

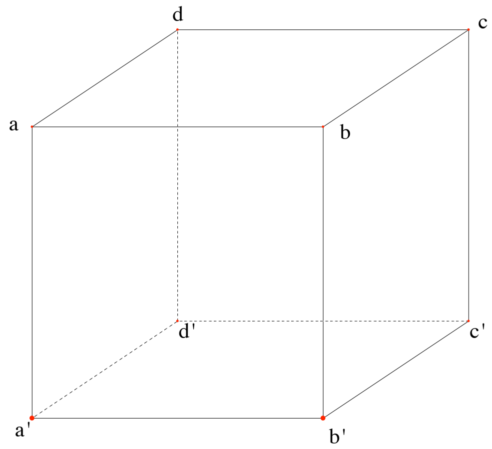

FIGURE 3 – Orthogonalité dans l'espace

6 Vecteurs et coordonnées

La notion de **vecteur** et les propriétés afférentes (égalité, produit par un scalaire, addition, orthogonalité) se définissent comme dans le plan. On pourra supposer qu'on connaît les propriétés des vecteurs, du produit scalaire et de la norme et la notion de repère orthonormé. Dans un repère orthonormé, points et vecteurs ont trois coordonnées (x, y, z). Cela permet de mettre en bijection l'espace $\mathcal{E}$ avec $\mathbf{R}^3$.

6.1 Vecteurs droites et plans

On a d'abord la caractérisation vectorielle des droites, qui résulte de la définition de $\lambda\vec{v}$:

6.1 Proposition. *Soit D une droite définie par deux points distincts a et b. On pose $\vec{v} = \overrightarrow{ab}$. Alors, D est l'ensemble des points m tels que $\overrightarrow{am} = \lambda\vec{v}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. On note $D = D(a, \vec{v})$.*

6.2 Définition. *Une* **droite** *D est définie par un point $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et un vecteur non nul $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$:*

$$D = \{m_0 + \lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbf{R}\} = \{(x_0 + \lambda\alpha, y_0 + \lambda\beta, z_0 + \lambda\gamma) \mid \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

On note $D = D(m_0, \vec{v})$.

6.3 Lemme. *Soit D une droite définie par deux points distincts a et b. On pose $\vec{v} = \overrightarrow{ab}$. Si k est un réel non nul, on a :*

$$D = D(a, \vec{v}) = D(a, k\vec{v}) = D(b, \vec{v}).$$

Pour les plans, on a la proposition suivante :

6.4 Proposition. *Soit P un plan défini par les trois points a, b, c. On pose $\overrightarrow{ab} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{ac} = \vec{w}$. Alors P est l'ensemble des points m tels que $\overrightarrow{am} = \lambda\vec{v}+\mu\vec{w}$. On le note $P = P(a, \vec{v}, \vec{w})$.*

Démonstration. Si m est un point du plan, on note p, q ses projetés sur (ab) et (ac) parallèlement à (ac) et (ab). On a alors $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{ap} + \overrightarrow{aq}$ par définition de la somme vectorielle et on conclut grâce à la définition du produit par un scalaire.

6.5 *Remarque.* Les propositions précédentes permettent une autre définition des droites et des plans à partir de l'espace affine $\mathcal{E}$ (donc des points et des vecteurs) et de retrouver les axiomes d'Euclide.

6.2 Vecteur normal à un plan

Le produit scalaire permet de définir le vecteur normal à un plan :

6.6 Proposition. *Soit P un plan défini par un point m_0 et deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non colinéaires. On pose $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.*

1) Le vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ avec $a = v_2w_3 - v_3w_2$, $b = v_3w_1 - v_1w_3$ et $b = v_1w_2 - v_2w_1$ est non nul et orthogonal au plan P (c'est-à-dire à tous les vecteurs du plan).

2) Les points m de P sont caractérisés par la relation $(\overrightarrow{m_0m}|\vec{n}) = 0$.

Démonstration. 1) Le vecteur $\vec{n}$ est non nul car $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires. On montre que les produits scalaires $(\vec{n}|\vec{v})$ et $(\vec{n}|\vec{w})$ sont nuls : c'est un petit calcul (qui n'est autre que le développement d'un déterminant).

2) Si m est dans le plan on a $\overrightarrow{m_0m} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$ et ce vecteur est bien orthogonal à $\vec{n}$. Pour la réciproque, il faut savoir un petit quelque chose sur la dimension, par exemple que si $\vec{n}$ n'est pas dans le plan engendré par $\vec{v}, \vec{w}$, tout vecteur de $\mathbf{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{n}, \vec{v}, \vec{w}$.

6.3 Application des vecteurs : fin de la preuve de 5.5.

Il s'agit de montrer $2 \Longrightarrow 1$. On se reportera à la figure 3 ci-dessous. Soit a le point d'intersection de D et P. On suppose D perpendiculaire à deux droites D_1 et D_2 de P, passant par a. Il faut voir que D est perpendiculaire à toute droite D' de P passant par a. On choisit des points m, m_1, m_2, m' respectivement sur D, D_1, D_2, D' et différents de a. Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{am}$ et $\overrightarrow{am'}$ sont orthogonaux, donc que leur produit scalaire est nul. Or, on a la relation vectorielle $\overrightarrow{am'} = \lambda \overrightarrow{am_1} + \mu \overrightarrow{am_2}$ qui donne, par bilinéarité

$$(\overrightarrow{am} | \overrightarrow{am'}) = (\overrightarrow{am} | \lambda \overrightarrow{am_1} + \mu \overrightarrow{am_2}) = \lambda(\overrightarrow{am} | \overrightarrow{am_1}) + \mu(\overrightarrow{am} | \overrightarrow{am_2}) = 0.$$

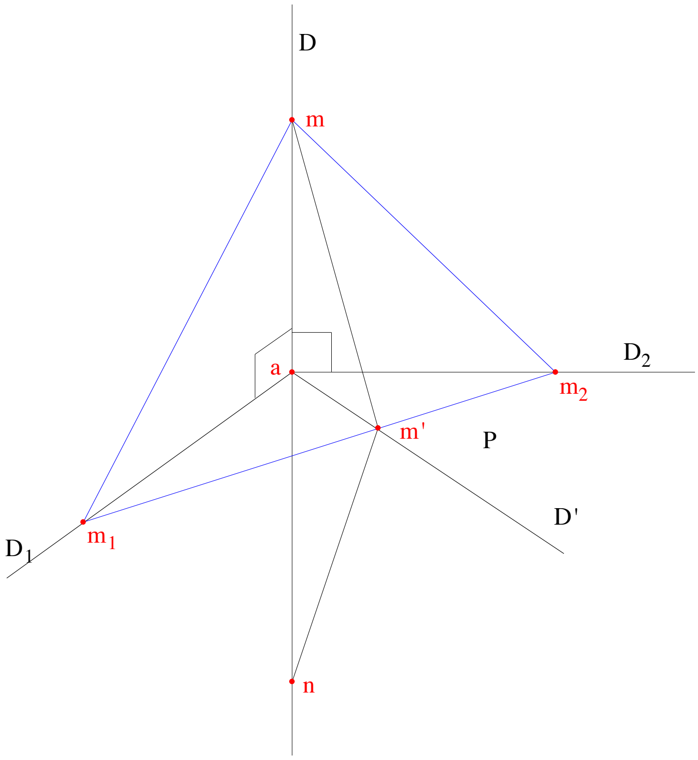

FIGURE 4 – La preuve de 5.5

6.7 *Remarque.* Avec les cas d'isométrie on peut donner une autre preuve de ce résultat, voir [ME].

6.4 Tétraèdre orthocentrique

Une application classique du produit scalaire est la caractérisation des tétraèdres orthocentriques :

6.8 Théorème. *Soit $T = ABCD$ un tétraèdre. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) T est orthocentrique (i.e. les hauteurs de T, c'est-à-dire les droites issues d'un sommet et perpendiculaires à la face opposée) sont concourantes en un point H appelé orthocentre de T.

2) Les arêtes opposées ((AB) et (CD), (AC) et (BD), (AD) et (BC)) sont orthogonales.

Démonstration. Montrons que 1) implique 2), par exemple que (AB) est orthogonale à (CD). On sait que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{CD}$. On en déduit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CD}$.

Pour la réciproque, le plus simple est de parachuter le point H. On considère l'isobarycentre G de A, B, C, D et le centre de la sphère circonscrite O et on pose $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$. On va montrer, par exemple, que $\overrightarrow{HC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

6.9 Lemme. *On a* $(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD}) = 0$.

Admettons un instant ce lemme. On sait que $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HD} - \overrightarrow{HC}$. Avec le lemme, on voit qu'il est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HD}$ comme souhaité.

Pour prouver le lemme, on écrit $\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. Mais, on a $2\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ par définition de l'isobarycentre. On en déduit $\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. Mais on a aussi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ et il reste à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux. Comme leur produit scalaire vaut $OB^2 - OA^2$, c'est le fait que O est le centre de la sphère circonscrite.

6.5 Le tétraèdre orthocentrique : preuve sans le produit scalaire

Montrons 1) implique 2). On considère les droites (AH) et (BH) respectivement perpendiculaires aux plans (BCD) et (ACD). La droite (CD) est donc orthogonale à (AH) et (BH), donc à deux droites non parallèles du plan (ABH), donc à toutes les droites de ce plan, particulièrement à (AB).

Montrons 2) implique 1). Appelons A' le projeté orthogonal de A sur (BCD). La droite (CD) est orthogonale à la fois à (AB) par hypothèse, et à (AA'), donc elle est perpendiculaire au plan (ABA'). Comme (BA') est dans le plan (BCD), elle coupe (CD) et lui est donc perpendiculaire en E. Dans le plan $(ABA') = (ABE)$ on considère la perpendiculaire (BB') à (AE). Comme elle est aussi orthogonale à (CD), c'est la hauteur du tétraèdre issue de B. Mais alors, les hauteurs (AA') et (BB') se coupent en H, orthocentre du triangle ABE.

Le même argument montre que les hauteurs (AA') et (CC') se coupent et de même pour (BB') et (CC'). Mais les droites (AA'), (BB') et (CC') ne sont pas coplanaires. En effet, sinon, toutes seraient dans le plan $P = (ABE)$ qui contiendrait C et E, donc[8] (CE), donc D et A, B, C, D seraient coplanaires. Donc, c'est que (CC') coupe le plan (ABA') en le point d'intersection H de (AA') et (BB'). Comme le même argument s'applique aussi à (DD'), on voit que les quatre hauteurs concourent en H.

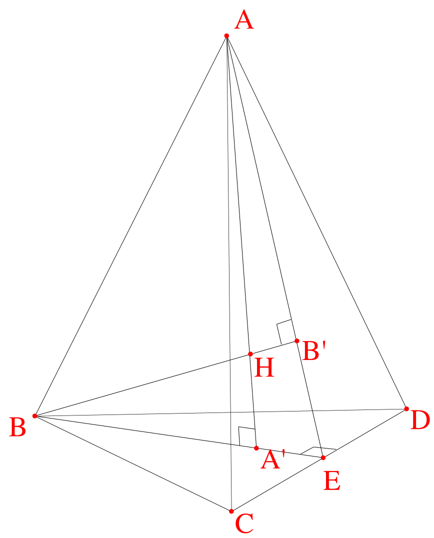

FIGURE 5 – Tétraèdre orthocentrique

7 L'approche analytique

On s'appuie sur l'approche précédente (vectorielle) dans $\mathbf{R}^3$. Les points de l'espace s'écrivent donc (x, y, z).

7.1 Équations de plans

7.1 Théorème. *Soit P un plan défini par un point $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non colinéaires. Alors, il existe des réels a, b, c, d avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tels que P est l'ensemble des points (x, y, z) qui vérifient l'équation $ax + by + cz + d = 0$.*

Démonstration. Il suffit de prendre le vecteur normal $\vec{n} = (a, b, c)$ et de poser $-d = ax_0 + by_0 + cz_0$. Le résultat est la traduction de la relation $(\overrightarrow{m_0m}|\vec{n}) = 0$.

8. Si $C = E$, le lecteur montrera que les droites (BC), (CA) et (CD) sont deux à deux perpendiculaires en C et que les hauteurs concourent en C.

7.2 Équations de droites

Les choses se compliquent car une droite admet plusieurs équations, correspondant au fait qu'elle est contenue dans plusieurs plans. On peut se contenter du résultat suivant :

7.2 Proposition. *1) Une droite D de l'espace est définie par deux équations non proportionnelles de la forme $f := ax + by + cz + d = 0$ et $f' := a'x + b'y + c'z + d' = 0$ avec a, b, c (resp. a', b', c') non tous nuls.*

2) Toutes les équations de D sont de la forme $\lambda f + \lambda' f'$ avec $\lambda, \lambda' \in \mathbf{R}$, non tous deux nuls.

8 Et pour le CAPES ?

Il est évidemment hors de question de raconter tout cela le jour du CAPES. Voilà ce que je propose.

1) On ne parle pas d'axiomes, mais on signale en prérequis qu'on utilisera les propriétés d'incidence (par deux points distincts passe une droite et une seule, par trois points non alignés passe un plan et un seul).

2) Comme applications des propriétés d'incidence, on énonce Desargues, et on propose des exercices sur les sections de tétraèdres et de cubes, voir [ME].

3) On énonce le théorème du toit (les deux variantes).

4) On donne la définition d'une droite perpendiculaire à un plan et les propriétés équivalentes (la preuve peut se faire avec le produit scalaire).

5) On traite rapidement les deux aspects vectoriel (surtout le produit scalaire, avec par exemple l'application au tétraèdre orthocentrique) et analytique.

9 Références

[CF] COUSIN-FAUCONNET Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995.

[ME] PERRIN Daniel, *Mathématiques d'École*, Cassini (2005).