

Lignes polygonales et isométries

Daniel PERRIN

L'objectif de ce texte est de clarifier¹, notamment en vue de l'oral du CAPES, la notion de ligne polygonale et ses liens avec les isométries du plan et les polygones réguliers. On utilisera librement les notions et les résultats qui sont dans mon livre Mathématiques d'École (cité [ME] dans ce qui suit) ou dans les polycopiés de géométrie du CAPES (David-Haglund-Perrin, cités [DHP]). C'est le cas, en particulier, pour tout ce qui concerne les polygones convexes et les polygones réguliers. On verra qu'en dépit de son apparence simplicité, le sujet recèle de nombreuses chausse-trapes², comme en témoignent les nombreux contre-exemples qui émaillent ce texte.

1 Sous-groupes finis du groupe affine

On utilise les notations de [DHP]. En particulier, on note X le plan affine réel, \vec{X} l'espace vectoriel associé, $GA(X)$ le groupe affine, $GL(\vec{X})$ le groupe linéaire.

1.1 Ensembles finis et sous-groupes finis

1.1 Proposition. *Soit $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ un ensemble fini de points du plan, non alignés. Alors, l'ensemble G des éléments $g \in GA(X)$ qui vérifient $g(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ est un sous-groupe fini de $GA(X)$.*

Démonstration. On notera que, comme \mathcal{A} est fini, la condition équivaut à $g(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ et qu'alors le fait que G soit un groupe est clair. Pour voir que G est fini il suffit de considérer l'application qui à $g \in G$ associe la permutation σ_g de $\{1, 2, \dots, n\}$ définie par $A_{\sigma_g(i)} = g(A_i)$. C'est un homomorphisme de groupes à valeurs dans $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{S}_n$ et il est injectif car \mathcal{A} contient trois points non alignés, donc un repère affine.

1.2 Remarque. Si \mathcal{A} est réduit à un point, il y a une infinité de bijections affines qui conservent \mathcal{A} (et même une infinité d'isométries). Si \mathcal{A} est formé

¹Vu la longueur de ce texte, je ne suis pas sûr que cet objectif soit atteint !

²Dont la première est l'orthographe de ce mot.

d'au moins deux points alignés sur une droite D , il y a une infinité de bijections affines qui le conservent (notamment toutes les symétries obliques d'axe D). En revanche, il y a seulement un nombre fini d'isométries qui conservent A (au moins deux : l'identité et la symétrie d'axe D et au plus quatre formant un groupe de Klein, voir ci-dessous la description des sous-groupes finis de $GA(X)$).

1.3 Exemple. Si P est un polygone convexe (plein) l'ensemble G des $g \in GA(X)$ qui vérifient $g(P) = P$ est un sous-groupe fini de $GA(X)$. En effet, on montre alors que g permute les sommets de P (voir [ME], ch. 5, lemme 2.6); nous reviendrons plus bas sur cette situation. Attention, l'exemple des homothéties de centre O et de rapport < 1 conservant un carré de centre O , montre qu'il ne suffit pas de supposer $g(P) \subset P$ (dans ce cas, l'ensemble G n'est ni un groupe, ni fini).

1.2 Points fixes des groupes finis

1.4 Proposition. Soit $G \subset GA(X)$ un sous-groupe fini. Alors, il existe un point $A \in X$ fixe par tous les éléments de G . On peut donc considérer G comme un sous-groupe du groupe linéaire $GL(\vec{X})$.

Démonstration. On choisit un point M quelconque, on appelle $M = M_1, \dots, M_n$ ses images par les éléments de G . Le groupe G permute les M_i , donc fixe leur isobarycentre.

1.3 Applications affines ou isométries ?

1.5 Proposition. Soit $G \subset GA(X)$ un sous-groupe fini. Il existe une forme q euclidienne sur \vec{X} (i.e. définie positive) telle que G soit contenu dans $O(q)$ (autrement dit, on peut toujours considérer G comme un groupe d'isométries pour une structure euclidienne convenable).

Démonstration. On a vu qu'on peut supposer que G est contenu dans $GL(\vec{X})$. On considère une forme euclidienne quelconque q_0 sur \vec{X} . On définit q par la formule :

$$q(\vec{x}) = \sum_{g \in G} q_0(g(\vec{x})).$$

Alors, si h est dans G , il est dans $O(q)$. En effet, on a $q(h(\vec{x})) = \sum_{g \in G} q_0(g(h(\vec{x})))$ et cette somme est égale à $q(\vec{x})$ car l'application $g \mapsto gh$ est une permutation de G .

1.4 Conserver un compact

On a vu, avec l'exemple des homothéties conservant un carré, qu'il ne suffit pas de supposer $g(K) \subset K$ pour en conclure $g(K) = K$. Un lemme élémentaire de topologie montre que c'est toutefois vrai lorsque K est compact et g une isométrie (et cela s'applique donc quand on a un sous-groupe fini de $GA(X)$ en vertu de la proposition précédente) :

1.6 Proposition. *Soit K un espace métrique compact et soit $g : K \rightarrow K$ une isométrie. Alors, on a $g(K) = K$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant $g(K) \neq K$. Soit $a \in K - g(K)$. On pose $\delta = d(a, K) = \inf_{x \in K} d(a, x)$. C'est un nombre > 0 . On considère la suite (a_n) de points de K définie par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = g(a_n)$. Comme g est une isométrie on a, pour $p < q$, $d(a_p, a_q) = d(a, a_{q-p})$. Comme a_{q-p} est dans $g(K)$ (c'est l'image de a_{q-p-1}), cette distance est $\geq \delta$. Les distances mutuelles des points de la suite sont donc $\geq \delta > 0$, ce qui rend impossible l'extraction d'une sous-suite convergente et contredit la compacité de K .

1.5 Les sous-groupes finis de $O(q)$

Dans le cas d'une forme euclidienne, on connaît parfaitement les sous-groupes finis du groupe orthogonal (donc aussi ceux du groupe affine en vertu de 1.5) :

1.7 Théorème. *Soit q une forme quadratique euclidienne sur un espace vectoriel \vec{X} de dimension 2 et soit $G \subset O(q)$ un sous-groupe fini. Alors, si G est contenu dans $O^+(q)$ il est cyclique. Précisément, si l'on a $|G| = n$, G est engendré par la rotation vectorielle d'angle $2\pi/n$. Si G n'est pas contenu dans $O^+(q)$ c'est un groupe diédral (donc de cardinal pair). Précisément, si l'on a $|G| = 2n$, le groupe G est engendré par la rotation d'angle $2\pi/n$ et par une symétrie axiale, ou encore, par deux symétries axiales dont les axes font un angle de π/n .*

Démonstration. On sait (cf. [DHP]) qu'on peut identifier $O^+(q)$ avec le groupe \mathbf{U} des complexes de module 1 et G s'identifie alors à un sous-groupe de \mathbf{U} , de cardinal n . Notons μ_n le sous-groupe (cyclique) de \mathbf{U} formé des racines n -ièmes de l'unité. Soit $z \in G$. On a $z^n = 1$ (car l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe), de sorte que z est dans μ_n . On a donc $G \subset \mu_n$, d'où l'égalité pour une raison de cardinal.

Dans le cas d'un sous-groupe $G \subset O(q)$, non contenu dans $O^+(q)$, on considère la restriction à G de l'homomorphisme $\det : O(q) \rightarrow \{\pm 1\}$. Son

noyau est le sous-groupe $G^+ = G \cap O^+(q)$, qui est un groupe cyclique d'ordre n , distingué dans G , et son image est ± 1 car G contient des isométries négatives. On voit que le cardinal de G est $2n$ et qu'il est engendré par G^+ et n'importe quelle réflexion contenue dans G .

1.6 Leurs orbites

Dans ce paragraphe, on précise ce que peuvent être des ensembles finis de points du plan qui admettent des isométries non triviales. Le résultat est donné par la proposition suivante :

1.8 Proposition. *Soit \mathcal{A} un ensemble fini de points non alignés du plan et soit G un sous-groupe du groupe $GA(X)$ formé de bijections affines du plan qui conservent \mathcal{A} . On suppose G non réduit à l'identité. Le groupe G fixe l'isobarycentre O des points de \mathcal{A} . Il est fini, donc contenu dans le groupe $O(q)$ pour une structure euclidienne convenable. Il est cyclique d'ordre n ou diédral d'ordre $2n$, cf 1.7.*

1) *On suppose le groupe G cyclique d'ordre n , formé des rotations de centre O et d'angles $2k\pi/n$, pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. Une orbite sous G , distincte de $\{O\}$, est l'ensemble des sommets d'un polygone convexe régulier à n côtés, de centre O . L'ensemble \mathcal{A} est réunion d'un nombre fini de tels polygones.*

2) *On suppose le groupe G diédral, formé des rotations de centre O et d'angles $2k\pi/n$ et de n symétries axiales dont les axes passent par O et font entre eux des angles de $k\pi/n$. Une orbite sous G , distincte de $\{O\}$, est soit la réunion de deux polygones réguliers à n côtés, de centre O , symétriques l'un de l'autre par les réflexions de G , soit un polygone régulier à n côtés, de centre O , invariant par les réflexions de G (ce qui signifie que les axes de ces réflexions passent par les sommets du polygone ou sont médiatrices de ses côtés). L'ensemble \mathcal{A} est réunion d'un nombre fini de telles orbites.*

Démonstration. Dans le cas cyclique, le fait que l'orbite soit formée des sommets d'un polygone régulier résulte d'une des formes de la définition 7.5.1 de [DHP]. Dans le cas diédral, il faut ajouter les symétriques de ces sommets par rapport à l'un des axes des symétries figurant dans G (les autres symétries étant conjuguées de la précédente par les rotations ne donnent rien de plus). On obtient deux polygones, sauf si les symétries en question conservent le polygone initial.

1.9 Remarque. Attention, si \mathcal{A} est invariant par G , il se peut que le groupe $G(\mathcal{A})$ des transformations affines conservant \mathcal{A} soit strictement plus grand que G . C'est le cas, par exemple, si \mathcal{A} est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à n côtés de centre O et si G est le groupe cyclique des

rotations de centre O et d'angles $2k\pi/n$ car alors $G(\mathcal{A})$ est le groupe diédral. On peut prendre aussi pour \mathcal{A} les sommets d'un polygone régulier P à $2n$ côtés et pour G le groupe diédral D_n conservant le polygone régulier à n côtés obtenu en prenant un sommet sur deux de P . On peut multiplier ces exemples en prenant un polygone à np côtés et le groupe $G = D_n$.

2 Lignes polygonales fermées

Rappelons que X désigne le plan affine et que, si A, B sont deux points de X , le segment $[A, B]$ est l'ensemble des barycentres à coefficients ≥ 0 de A et B . En particulier, on a $[A, B] = [B, A]$.

2.1 Définition

S'il est facile de concevoir ce qu'est une ligne polygonale fermée, en donner une définition précise demande un peu plus de soin qu'il n'y paraît. Il est vivement recommandé, dans tout ce qui suit, d'avoir en tête les jeux des petits enfants qui consistent à joindre des points numérotés pour faire apparaître un dessin. Voici la définition proposée :

2.1 Définition. Soit n un entier ≥ 2 . On appelle **ligne polygonale fermée, orientée et initialisée**³ une application $\mathcal{L} : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow X$ qui à un entier \bar{i} modulo n associe un point noté $\mathcal{L}(\bar{i})$, de telle sorte que, pour tout \bar{i} , les points $\mathcal{L}(\bar{i})$ et $\mathcal{L}(\overline{\bar{i}+1})$ soient distincts⁴. L'entier n est appelé **ordre** de la ligne.

2.2 Notation.

On notera souvent abusivement $\mathcal{L}(i)$, voire A_i , l'image de \bar{i} par \mathcal{L} et on notera $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ la ligne polygonale \mathcal{L} . Sur les figures, on notera le plus souvent, comme ci-contre, les points de la ligne uniquement par leur indice $0, 1, \dots, n-1$.

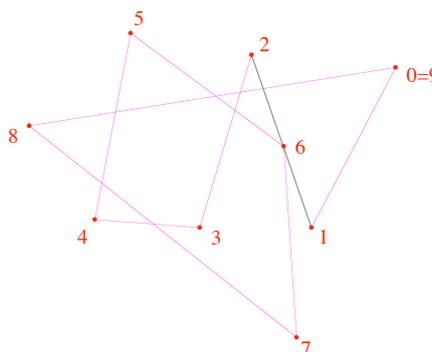


Figure 1

³On oubliera souvent de lui donner tous ces attributs.

⁴Il sera parfois utile de supprimer cette condition. On parlera alors de ligne polygonale **stationnaire**.

Dans la définition 2.1, le mot fermé indique que l'ensemble d'indices est $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (et non pas $\{0, 1, \dots, n-1\}$), et qu'on a donc entre autres $A_n = A_0$; le mot orienté fait référence à un sens de parcours : on passe, dans l'ordre, par l'image de 0, puis par celle de 1, puis par celle de 2, etc., enfin, l'initialisation fait référence au choix de l'origine $A_0 = \mathcal{L}(0)$.

2.3 Définition.

- 1) Soit $\mathcal{L} : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow X$ une ligne polygonale fermée. Les segments⁵ $[A_i, A_{i+1}]$ sont appelés les **côtés** de \mathcal{L} et les A_i ses **sommets**.
- 2) On appelle **support** de \mathcal{L} la réunion L des segments $[A_i, A_{i+1}]$ pour $i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
- 3) Deux sommets A, B de \mathcal{L} sont dits **consécutifs** (resp. **adjacents**) s'il existe $i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tel que l'on ait $A = \mathcal{L}(i)$ et $B = \mathcal{L}(i+1)$ (resp. $A = \mathcal{L}(i)$ et $B = \mathcal{L}(i+1)$ ou $B = \mathcal{L}(i)$ et $A = \mathcal{L}(i+1)$). Deux côtés $[A, B]$ et $[C, D]$ de \mathcal{L} sont dits **consécutifs** (resp. **adjacents**) s'il existe $i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tel que l'on ait $A = \mathcal{L}(i)$, $B = C = \mathcal{L}(i+1)$ et $D = \mathcal{L}(i+2)$ (resp. $A = \mathcal{L}(i)$, $B = C = \mathcal{L}(i+1)$ et $D = \mathcal{L}(i+2)$ ou $D = \mathcal{L}(i)$, $C = B = \mathcal{L}(i+1)$ et $A = \mathcal{L}(i+2)$).

2.4 Remarque. On notera la distinction entre les notions de côtés consécutifs et adjacents. Pour dire les choses brièvement, consécutif est une propriété d'un couple et adjacent d'une paire.

2.5 Remarque. On a donc choisi de donner le nom de ligne polygonale à la suite de points plutôt qu'à la suite des segments, même si on pense très fort à celle-ci. Cela revient à penser au squelette de la ligne plutôt qu'à la ligne elle-même. La raison de ce choix tient à la définition des segments donnée ci-dessus comme ensembles de points⁶, donc avec $[A, B] = [B, A]$. Une définition de ligne polygonale comme une suite de segments, même supposés adjacents, se heurterait à deux écueils :

- Elle ne définirait pas nécessairement la suite des sommets. Prenons l'exemple d'une configuration "en Y", c'est-à-dire de trois segments $[A, B]$, $[A, C]$, $[A, D]$ (un triangle BCD et son centre de gravité A , par exemple). La suite de segments $[A, B]$, $[A, C]$, $[A, D]$, pourtant deux à deux adjacents, ne définit pas une ligne polygonale. En effet, pour respecter la première adjacence il faudrait prendre comme sommets, dans l'ordre, B, A, C , mais il n'y a plus moyen d'avoir le segment $[A, D]$ ensuite.

⁵On utilise ici l'abus de notation annoncé ci-dessus. Mais les indices sont bien pris modulo n .

⁶Si on les avait définis comme des segments orientés, c'est-à-dire des bipoints, ou des vecteurs liés, la difficulté n'existerait plus car un vecteur détermine son origine et son extrémité. Mais cette définition ne semble pas très bien adaptée aux côtés des polygones.

- Même si la suite de segments est bien associée à une ligne polygonale, celle-ci n'est pas nécessairement unique. Ainsi, la suite de segments $[A, B]$, $[B, A] = [A, B]$ correspond à deux lignes possibles : A, B, A et B, A, B .

2.2 Équivalence des lignes

2.2.1 Opérations de décalage et retournement sur les lignes

Pour parler de conservation d'une ligne par des transformations, il est nécessaire de considérer certaines lignes comme équivalentes (par exemple, toutes les lignes bordant un polygone convexe, quels que soient leur point de départ et leur sens de parcours). Pour cela, il faut d'abord étudier certaines transformations de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$:

2.6 Définition. Soit $\tau : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ une application. On dit⁷ que τ est un **décalage** (resp. un **retournement**) s'il existe $k \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tel que l'on ait, pour tout $i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\tau(i) = i + k$ (resp. $\tau(i) = k - i$). L'ensemble des décalages est un groupe noté T et isomorphe au groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$. L'ensemble des décalages et des retournements est un groupe noté⁸ TS et isomorphe au groupe diédral D_n .

La proposition suivante explicite la nature de τ vue comme permutation de l'ensemble $\{0, 1, \dots, n - 1\}$:

2.7 Proposition. On reprend les notations de 2.6. On pose $d = \text{pgcd}(n, k)$. On a donc $n = dn'$, $k = dk'$ avec n' et k' premiers entre eux.

1) Si τ est un décalage, τ est un produit de d cycles disjoints d'ordre n' . En particulier, elle n'a pas de point fixe dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (sauf dans le cas $k \equiv 0 \pmod{n}$ qui correspond à l'identité).

2) Si τ est un retournement, c'est un produit de transpositions disjointes. Précisément, si n est impair, τ est un produit de $[n/2]$ transpositions (et elle admet un unique point fixe). Si n est pair et k impair, τ est un produit de $n/2$ transpositions (et elle est sans point fixe), si n et k sont pairs, τ est produit de $(n/2) - 1$ transpositions et elle admet deux points fixes.

Démonstration. Dans le cas du décalage on a $\tau(i) = i + k$ et l'orbite de i est formée des indices $i, i + k, \dots, i + (n' - 1)k$. Dans le cas du retournement, on voit que l'orbite de i est réduite à i et $k - i$, ce qui montre que τ est un produit de transpositions. Il reste à préciser le cas d'égalité de i et $k - i$.

⁷On pourrait aussi parler de translation et de symétrie, mais, tout compte fait, je préfère garder ces mots pour les isométries du plan.

⁸Ici, on voit la trace de mon changement d'avis à propos des notations!

- Si n est impair, 2 est inversible modulo n et, pour tout $k \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ il existe un unique $i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $k = 2i$, donc $k - i = i$.

- Si n est pair, il n'y a pas de solution si k est impair. Si k est pair il y a deux solutions (on écrit $n = 2n''$, $k = 2k''$ et on a les solutions $i = k''$ et $i = k'' + n''$).

2.8 Exemples.

1) Pour $n = 10$, $k = 6$, le décalage qui à i associe $i + k$ s'écrit $\tau = (0, 6, 2, 8, 4)(1, 7, 3, 9, 5)$.

2) Pour $n = 9$, $k = 4$, le retournement $i \mapsto k - i$ est $\tau = (0, 4)(1, 3)(2)(5, 8)(6, 7)$. Pour $n = 10$, $k = 7$ on obtient $\tau = (0, 7)(1, 6)(2, 5)(3, 4)(8, 9)$. Enfin, pour $n = 10$, $k = 8$ on trouve $\tau = (0, 8)(1, 7)(2, 6)(3, 5)(4)(9)$.

2.2.2 Équivalence

2.9 Définition. On définit des opérations des groupes T et TS sur l'ensemble des lignes polygonales d'ordre n , fermées, orientées et initialisées en posant $\tau.\mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \tau$. L'opération de T sera dite par **décalage**, celle de $TS - T$ par **retournement**. On dit que τ fixe \mathcal{L} si on a $\mathcal{L} \circ \tau = \mathcal{L}$. L'ensemble des $\tau \in T$ (resp. $\in TS$) qui fixent \mathcal{L} est un sous-groupe appelé **fixateur** et noté $T_{\mathcal{L}}$ (resp. $TS_{\mathcal{L}}$).

La relation d'équivalence associée aux orbites de cette opération est la relation évoquée ci-dessus :

2.10 Définition. Soient \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 deux lignes polygonales fermées. On dit que \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont **directement équivalentes** (resp. **équivalentes**) si elles sont dans la même orbite pour l'opération de T (resp. TS) définie ci-dessus, i.e. s'il existe un décalage (resp. un décalage ou un retournement) $\tau : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ telle que l'on ait $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \circ \tau$.

2.11 Remarques.

1) Cette relation signifie qu'on considère comme égales (dans le cas de l'équivalence directe) les lignes obtenues à partir de A_0A_1, \dots, A_{n-1} par permutation circulaire comme $A_1 \dots A_{n-1}A_0$, $A_2 \dots A_{n-1}A_1A_0$, etc. ainsi, dans le cas de l'équivalence quelconque, que celles obtenues en changeant le sens de parcours des précédentes comme $A_{n-1} \dots A_1A_0$, etc.

2) Comme l'ensemble T (resp. TS) des décalages (resp. des décalages et des retournements) de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un groupe, on a ainsi défini des relations d'équivalence sur les applications $\mathcal{L} : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow X$. Une **ligne polygonale**

orientée⁹ (resp. non orientée) est alors une classe d'équivalence¹⁰ pour la relation d'équivalence directe (resp. d'équivalence, directe ou non).

3) Bien entendu, si deux lignes sont équivalentes, elles ont mêmes sommets et mêmes côtés, de sorte qu'on peut parler des sommets et des côtés de la classe $\overline{\mathcal{L}}$.

2.2.3 Fixateurs

On sait que la description des orbites nécessite de connaître aussi les fixateurs qui peuvent être non triviaux ici comme le montrent les exemples suivants.

2.12 Exemples.

1) On considère un triangle équilatéral $A_0A_1A_2$ et la ligne $A_0A_1A_2A_0A_1A_2$. Alors, l'application définie par $\tau(i) = i + 3$ fixe cette ligne (le décalage de 3 dans les indices laisse fixe chacun des sommets de \mathcal{L}).

2) On considère un triangle équilatéral $A_0A_1A_2$ et la ligne $A_0A_1A_2A_0A_2A_1$. Alors l'application définie par $\tau(i) = -i$ fixe cette ligne. En effet, on a $\tau(0) = 0$, $\tau(3) = 3$, $\tau(1) = 5$ et $\tau(2) = 4$ et, comme on a $A_0 = A_3$, $A_1 = A_5$, $A_2 = A_4$, les points sont bien fixes par τ .

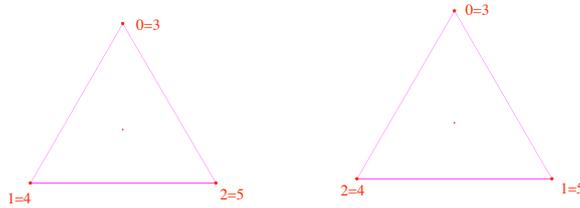


Figure 2

Pour préciser les lignes qui admettent un fixateur non trivial, on commence par donner une définition :

2.13 Définition. Soit \mathcal{L} une ligne polygonale. On dit que \mathcal{L} est **réduite** si, dans l'action de T , le fixateur $T_{\mathcal{L}}$ est trivial.

2.14 Proposition. Soit \mathcal{L} une ligne polygonale d'ordre n .

1) On suppose que \mathcal{L} est non réduite, c'est-à-dire que le fixateur $T_{\mathcal{L}}$ est non trivial. Le groupe $T_{\mathcal{L}}$ est un sous-groupe de $T \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Il est cyclique d'ordre s , avec $1 < s < n$ et s diviseur de n . On pose $n = sn'$. Le décalage τ défini par $\tau(i) = i + n'$ est un générateur de $T_{\mathcal{L}}$. On a, pour tout i , $\mathcal{L}(i) = \mathcal{L}(i + n')$, de sorte que l'application \mathcal{L} induit une application $\mathcal{L}' : \mathbf{Z}/n'\mathbf{Z} \rightarrow X$ qui définit

⁹Mais sans origine i.e. non initialisée.

¹⁰Quand on voudra vraiment être pointilleux, on la notera $\overline{\mathcal{L}}$.

une ligne polygonale, dite **ligne polygonale réduite associée à \mathcal{L}** . La ligne \mathcal{L} est obtenue en parcourant s fois la ligne réduite \mathcal{L}' . Le fixateur de \mathcal{L}' est trivial.

2) On suppose qu'il existe un retournement τ qui fixe \mathcal{L} et on pose $\tau(i) = k - i$. On a $\mathcal{L}(i) = \mathcal{L}(k - i)$ pour tout i . L'ordre de \mathcal{L} est nécessairement pair et k est alors pair lui aussi. Si on pose $n = 2p$ et $k = 2q$, la ligne \mathcal{L} s'obtient en parcourant la ligne (non nécessairement fermée) $A_q A_{q+1} \dots A_{q+p}$ dans un sens puis dans l'autre.

Démonstration. 1) Comme T est cyclique d'ordre n , $T_{\mathcal{L}}$ est cyclique d'ordre s diviseur de n avec comme générateur le décalage $i \mapsto i + n'$. On a $s > 1$, car le fixateur est non trivial et $s < n$, sinon $\tau \mapsto \tau + 1$ fixerait \mathcal{L} et cela contredit la définition d'une ligne polygonale dans laquelle on suppose $\mathcal{L}(i) \neq \mathcal{L}(i + 1)$. L'existence de \mathcal{L}' est claire.

2) Supposons $n = 2p + 1$. Si on a $k = 2q + 1$ on a $\mathcal{L}(q) = \mathcal{L}(q + 1)$, ce qui est exclu. Si on a $k = 2q$, on a $\mathcal{L}(q - p) = \mathcal{L}(q + p)$, mais comme on a $q + p \equiv q - p - 1 \pmod{n}$, on a finalement $\mathcal{L}(q - p) = \mathcal{L}(q - p - 1)$, ce qui est encore exclu. Supposons $n = 2p$. Si k est impair, $k = 2q + 1$, on a, comme ci-dessus, $\mathcal{L}(q) = \mathcal{L}(q + 1)$, ce qui est exclu. Si k est pair, $k = 2q$, on peut supposer qu'on a $q < p$ (quitte à remplacer q par le reste dans la division de q par p). On peut numéroter les points de la ligne de q à $q + 2p - 1$ et on a alors, pour $i = 0, 1, \dots, p$, $\mathcal{L}(q + i) = \mathcal{L}(q - i) = \mathcal{L}(q + 2p - i)$, ce qui est l'assertion ci-dessus¹¹.

2.15 Remarques.

1) On notera que, dans les deux cas, l'existence d'un fixateur non trivial impose que certains côtés de \mathcal{L} soient égaux. Autrement dit, si les côtés de \mathcal{L} sont tous distincts, seule l'identité fixe \mathcal{L} .

2) Si \mathcal{L}' est la ligne réduite associée à \mathcal{L} et si on désigne respectivement par \bar{i} et \hat{i} les classes de i modulo n et n' , on a, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $\mathcal{L}(\bar{i}) = \mathcal{L}'(\hat{i})$.

2.3 Une autre relation d'équivalence sur les lignes : la parenté

La problématique de ce paragraphe est proche de celle des polygones réguliers étoilés (ou croisés). Nous avons défini ci-dessus la relation d'équivalence des lignes, relation qui correspond à un décalage ou à un retournement des indices, *via* l'action du groupe TS . La relation de parenté est bâtie de manière analogue, mais elle utilise le groupe de toutes les applications affines de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

¹¹On ne passe qu'une fois en A_p et A_{q+p} .

2.16 Proposition-Définition. Soient $a, b \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. L'application affine $\psi = \psi_{a,b} : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ définie par $\psi(i) = ai + b$ est bijective si et seulement si a est inversible modulo n . L'ensemble des applications affines bijectives de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans lui-même est un groupe noté \mathbf{A} . Ce groupe est isomorphe au produit semi-direct $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rtimes (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$.

Démonstration. C'est un exercice pour le lecteur.

2.17 Définition. On définit une opération de \mathbf{A} sur l'ensemble des lignes polygonales (fermées, orientées et initialisées) d'ordre n en posant $\psi.\mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \psi$. Deux lignes polygonales qui sont dans la même orbite seront dites¹² **parentes**. Deux lignes équivalentes sont a fortiori parentes.

2.18 Exemple. Si \mathcal{L} est la suite des sommets d'un polygone régulier convexe, les lignes parentes sont les polygones réguliers étoilés obtenus à partir de \mathcal{L} . Voir [ME] chapitre 5 paragraphe 3. Un autre exemple est celui de la figure 3. On a $n = 9$ et la ligne rose \mathcal{L}' est obtenue à partir de la ligne noire \mathcal{L} par la formule $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \circ \psi$ avec $\psi(i) = 4i$.

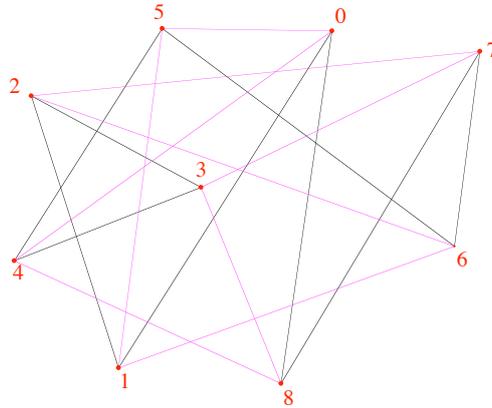


Figure 3

Attention, en général, la classe de parenté d'une ligne ne contient pas de polygone convexe (son bord), ni même de polygone (convexe ou concave), c'est-à-dire de ligne simple au sens de [ME]. Un exemple évident est celui d'un quadrilatère croisé.

2.19 Remarque. Comme TS est un sous-groupe distingué de \mathbf{A} , le quotient \mathbf{A}/TS , qui est isomorphe à $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*/\{\pm 1\}$ opère sur le quotient de l'ensemble des lignes par TS c'est-à-dire sur les lignes polygonales (ni orientées, ni initialisées). Pour déterminer les classes de parenté, en écartant le cas trivial

¹²Je veux évoquer l'idée qu'elles s'obtiennent par croisement mais je ne peux pas utiliser le mot "croisées" parce que la plupart des lignes que nous considérons le sont d'avance.

de l'équivalence, on peut donc se limiter à examiner les applications $n \mapsto an$ avec $a \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*/\{\pm 1\}$ (il y en a $\varphi(n)/2$ si φ désigne la fonction d'Euler).

3 Applications affines conservant une ligne polygonale : la définition combinatoire

3.1 Conserver une ligne polygonale ?

Soit \mathcal{L} une ligne polygonale et soit L son support. Nous nous proposons d'étudier les applications affines qui conservent cette ligne (si la ligne n'est pas alignée, on verra qu'il s'agit toujours d'isométries pour une structure euclidienne convenablement choisie). Là encore, le plus difficile est peut-être de donner une définition convenable. En effet, il y a deux voies divergentes :

- On peut donner une définition dans laquelle toute la combinatoire de la ligne (sommets, côtés, adjacence, orientation éventuelle) est conservée. On dira que f conserve $\overline{\mathcal{L}}$ dans ce cas. Le problème est qu'il y a beaucoup de conditions à vérifier et qu'il peut être difficile de montrer qu'il existe des applications affines remplissant ces conditions.

- On peut donner une définition géométrique mettant seulement en jeu le support. On dira que f conserve L . La difficulté est alors de montrer la conservation des éléments (sommets, côtés, etc.). On verra au paragraphe suivant qu'on n'y parvient qu'en ajoutant des hypothèses.

3.2 La définition combinatoire

Je propose la définition combinatoire ("forte") suivante. Bien entendu, on veut que la locution " f conserve \mathcal{L} " signifie $f \circ \mathcal{L} = \mathcal{L}$, mais c'est seulement modulo la notion d'équivalence introduite ci-dessus.

3.1 Définition. Soit $\overline{\mathcal{L}}$ une ligne polygonale fermée orientée¹³ (resp. non orientée) et soit $\mathcal{L} : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow X$ une ligne polygonale fermée orientée et initialisée qui représente $\overline{\mathcal{L}}$. On dit qu'une application affine bijective f **conserve** la ligne polygonale $\overline{\mathcal{L}}$ si la ligne $f \circ \mathcal{L}$ est directement équivalente (resp. équivalente) à \mathcal{L} (c'est-à-dire s'il existe un décalage (resp. un décalage ou un retournement) $\tau : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ telle que l'on ait $f \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \tau$). Cela revient à dire que f agit par décalage sur les sommets de $\mathcal{L} = A_0A_1 \dots A_{n-1}$ (cf. 2.1) : $f(A_i) = A_{k+i}$ (resp. par décalage ou retournement $f(A_i) = A_{k-i}$).

¹³Mais non initialisée.

3.2 Remarque. Il est clair que la définition ne dépend pas du choix du représentant \mathcal{L} de $\overline{\mathcal{L}}$. Si le fixateur de \mathcal{L} est réduit à l'identité, l'application τ est uniquement déterminée par f et on la note τ_f . On dit alors que f est de signe $+$ ou de signe $-$ selon que τ_f est un décalage ou un retournement. Dans le cas général, si τ convient, il en est de même des $\sigma\tau$ où σ est dans le fixateur de \mathcal{L} .

Attention, si le fixateur de \mathcal{L} contient un retournement, la même application f conservant \mathcal{L} agit à la fois sur les sommets de \mathcal{L} par décalage et retournement. On ne peut donc pas définir le signe d'une application conservant \mathcal{L} dans ce cas. Par exemple, reprenons le cas d'un triangle équilatéral $A_0A_1A_2$ et de la ligne $\mathcal{L} = A_0A_1A_2A_0A_2A_1$ (voir fig. 2). La symétrie par rapport à la médiatrice de $[A_1, A_2]$ fixe A_0 et échange A_1 et A_2 . Elle transforme donc la ligne \mathcal{L} en $\mathcal{L}' = A_0A_2A_1A_0A_1A_2$. Cette ligne est équivalente à \mathcal{L} par le décalage de 3 crans : $i \mapsto i + 3$. Mais, comme le retournement $i \mapsto -i$ fixe \mathcal{L} , la ligne \mathcal{L}' est aussi équivalente à \mathcal{L} par le retournement $i \mapsto 3 - i$.

3.3 Propriétés des applications conservant une ligne

La proposition suivante énumère les propriétés géométriques des applications affines qui conservent \mathcal{L} :

3.3 Proposition. Soit $\overline{\mathcal{L}}$ une ligne polygonale (resp. une ligne polygonale orientée) et soit f une application affine bijective f qui conserve $\overline{\mathcal{L}}$. On a les propriétés suivantes :

- 1) L'image par f d'un sommet de \mathcal{L} est un sommet de \mathcal{L} .
- 2) L'image par f d'un côté de \mathcal{L} est un côté de \mathcal{L} .
- 3) L'application f transforme deux sommets adjacents (resp. consécutifs) en deux sommets jouissant de la même propriété.
- 4) L'application f transforme deux côtés adjacents (resp. consécutifs) en deux côtés jouissant de la même propriété.

Précisément, si f opère par décalage, l'image du côté $[A_i, A_{i+1}]$ est le côté $[A_{i+k}, A_{i+k+1}]$, tandis que c'est $[A_{k-i}, A_{k-i-1}]$ si f opère par retournement. En particulier on a $f(L) = L$.

Démonstration. Il est clair qu'une application affine qui conserve \mathcal{L} vérifie les conditions 1), 2) (car l'application affine f transforme le segment $[A, B]$ en $[f(A), f(B)]$). Elle vérifie aussi 3) et 4) sous la forme plus précise donnée ci-dessus.

3.4 Corollaire. Soit $\overline{\mathcal{L}}$ une ligne polygonale **non alignée** et soit G (ou $G(\overline{\mathcal{L}})$) l'ensemble des éléments de $GA(X)$ qui conservent $\overline{\mathcal{L}}$. Alors G est un sous-groupe fini de $GA(X)$. En vertu de 1.4, les éléments de G admettent un

point fixe commun et en vertu de 1.5 on peut supposer qu'il s'agit d'un groupe d'isométries pour une forme euclidienne convenable et c'est donc un groupe cyclique ou un groupe diédral en vertu de 1.7. Si le fixateur de \mathcal{L} est réduit à l'identité, l'application $\tau : f \mapsto \tau_f$ est un homomorphisme de groupes injectif de $G(\mathcal{L})$ dans TS .

Démonstration. Le fait que G est un groupe vient de ce que l'ensemble des décalages et retournements de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ en est un. Comme les éléments de G permutent les sommets de \mathcal{L} , le groupe est fini en vertu de 1.1.

À partir du moment où τ_f a un sens, c'est bien un homomorphisme. En effet, on a $f\mathcal{L} = \mathcal{L}\tau_f$, $g\mathcal{L} = \mathcal{L}\tau_g$, d'où $g(f\mathcal{L}) = g(\mathcal{L}\tau_f) = (g\mathcal{L})\tau_f = \mathcal{L}(\tau_g\tau_f)$.

3.5 Remarque. Attention, même si l'on suppose que la ligne \mathcal{L} n'est pas alignée et que son fixateur est trivial, le signe d'une application f conservant \mathcal{L} (au sens de 3.2) ne correspond pas forcément à la nature (positive ou négative) de l'isométrie f . Cependant, si f est une rotation d'ordre ≥ 3 , τ_f est nécessairement un décalage. En effet, si f était un retournement, on aurait, pour tout i , $f(A_i) = A_{k-i}$, donc $f^2(A_i) = A_i$. Comme les A_i ne sont pas alignés, cela impliquerait $f^2 = \text{Id}$, ce qui est absurde.

En revanche, si f est une symétrie centrale ou une symétrie axiale, τ_f peut-être un décalage ou un retournement indépendamment de la nature de f . Ainsi, si l'on considère un carré de centre O , la même symétrie de centre O (resp. la symétrie axiale par rapport à une médiane) va correspondre à la permutation (02)(13) ($i \mapsto i + 2$) du carré numéroté de manière convexe (resp. croisée), mais à la permutation (01)(23) ($i \mapsto 1 - i$) du même carré numéroté de manière croisée (resp. convexe), voir fig. 4.

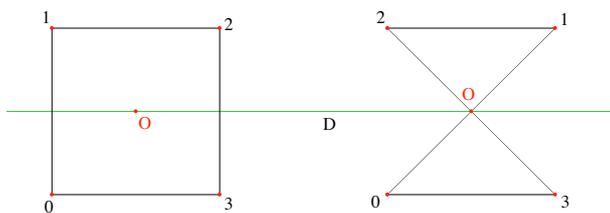


Figure 4

3.4 Quelques contre-exemples

Dans le cas d'une ligne polygonale générale, les conditions géométriques énoncées dans la proposition 3.3, si elles fournissent des conditions nécessaires

pour qu'une application affine conserve une ligne, ne donnent pas de conditions suffisantes comme en témoignent les exemples ci-dessous.

3.6 Exemples.

1) La conservation des sommets ne suffit évidemment pas à assurer la conservation de la ligne. L'exemple le plus simple est sans doute le fer de lance, c'est-à-dire la ligne polygonale $(ABCD)$ formée à partir d'un triangle équilatéral ABC et de son centre D , avec comme application f la symétrie par rapport à la droite (CD) . Cette application permute les sommets $f(A) = B$, $f(B) = A$, $f(C) = C$, $f(D) = D$, mais elle ne conserve pas la ligne $ABCD$ (elle la transforme en $BACD$ qui n'a pas les mêmes côtés).

2) Il est clair que la condition 2) implique la condition 1). En revanche, même avec 2), l'adjacence n'est pas nécessairement acquise comme le montre l'exemple de la figure 5 :

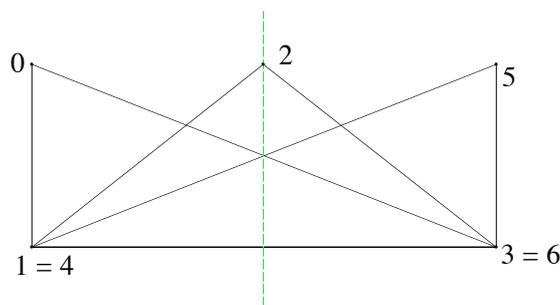


Figure 5

En effet, dans cet exemple, la symétrie par rapport à la droite pointillée transforme les côtés consécutifs $[0, 1]$ et $[1, 2]$ en $[5, 6]$ et $[2, 3]$ qui ne sont pas même adjacents.

3) En fait, même la conjonction des quatre conditions de 3.3 ne suffit pas à assurer qu'une transformation conserve la ligne. L'exemple ci-dessous mérite d'être médité.

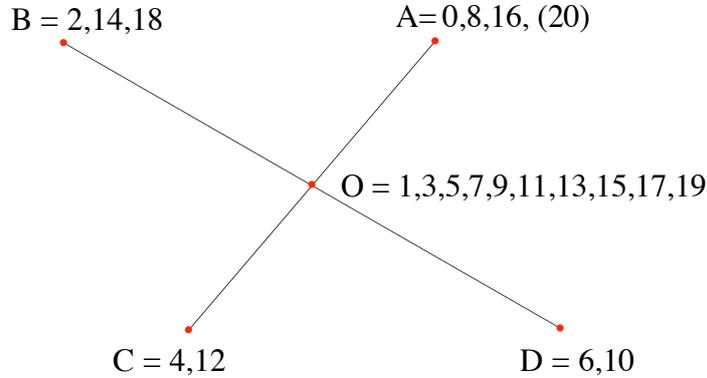


Figure 6

Les points A, C et B, D sont symétriques par rapport à O . La ligne \mathcal{L} est la suivante : $AOBOCODOAODOCOBOAOBO(A)$ (numérotation de 0 à 19 sur la figure). On considère la symétrie σ_O de centre O . Il est clair qu'elle envoie un sommet sur un sommet, un côté sur un côté, deux sommets consécutifs sur deux sommets consécutifs, mais aussi deux côtés consécutifs sur deux côtés consécutifs. Cependant, elle ne conserve pas \mathcal{L} ! En effet, si elle agissait par décalage, comme σ_O envoie A sur C , elle devrait être donnée par la formule $i \mapsto i + k$ avec $k = 4$ ou $k = 12$. Dans les deux cas on a une contradiction. Si $k = 12$ on aurait $2 \mapsto 14$, i.e. $B \mapsto B$ et c'est absurde, si $k = 4$, on aurait $6 \mapsto 10$ donc $D \mapsto D$ et c'est absurde. On vérifie de même que la symétrie n'induit pas un retournement $i \mapsto k - i$ de \mathcal{L} .

3.5 Une réciproque partielle

Dans l'exemple précédent, de nombreux côtés de la ligne sont égaux. Le théorème suivant fournit une réciproque partielle de 3.3 lorsqu'on écarte cette situation :

3.7 Théorème. *Soit $\overline{\mathcal{L}}$ une ligne polygonale fermée (resp. orientée). On suppose que tous les côtés de $\overline{\mathcal{L}}$ sont distincts. Alors, une application affine bijective f "conserve" $\overline{\mathcal{L}}$ si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :*

- 1) *L'image par f d'un côté de \mathcal{L} est un côté de \mathcal{L} .*
- 2) *L'application f transforme deux côtés adjacents (resp. consécutifs) en deux côtés jouissant de la même propriété.*

Démonstration. Notons déjà que l'hypothèse implique que l'ordre n de la ligne est ≥ 3 . Supposons d'abord la ligne \mathcal{L} orientée. Si f vérifie les conditions, les images par f des côtés $[A_0, A_1]$ et $[A_1, A_2]$ sont deux côtés consécutifs

de \mathcal{L} . Il existe donc $k \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tel que l'on ait $f(A_0) = A_k$, $f(A_1) = A_{k+1}$ et $f(A_2) = A_{k+2}$. Montrons par récurrence sur $i = 0, 1, \dots, n-1$ la formule $f(A_i) = A_{i+k}$. Elle vaut pour $i = 0, 1, 2$. Supposons qu'elle soit vraie jusqu'à un $i \geq 2$ et passons à $i+1$. On sait que les images des côtés $[A_{i-1}, A_i]$ et $[A_i, A_{i+1}]$ sont des côtés consécutifs. Or, l'image du côté $[A_{i-1}, A_i]$ est le côté $[A_{i+k-1}, A_{i+k}]$, et comme il n'y a pas d'autre côté égal à celui-là¹⁴, l'image de $[A_i, A_{i+1}]$ est le côté $[A_{i+k}, A_{i+k+1}]$, et on en déduit $f(A_{i+1}) = A_{i+k+1}$.

Supposons maintenant la ligne non orientée. Les images par f des côtés $[A_0, A_1]$ et $[A_1, A_2]$ sont deux côtés adjacents. Supposons que l'on ait $f(A_0) = A_k$, $f(A_1) = A_{k+1}$ et $f(A_2) = A_{k+2}$. On montre alors par récurrence qu'on a $f(A_i) = A_{i+k}$ pour tout $i \geq 2$. En effet, on sait que les images des côtés $[A_{i-1}, A_i]$ et $[A_i, A_{i+1}]$ sont des côtés adjacents. Or, l'image du côté $[A_{i-1}, A_i]$ est le côté $[A_{i+k-1}, A_{i+k}]$, donc l'image de $[A_i, A_{i+1}]$ est soit le côté $[A_{i+k-2}, A_{i+k-1}]$, soit le côté $[A_{i+k}, A_{i+k+1}]$. Montrons que la première éventualité est impossible. Comme $i \geq 2$, le côté $[A_{i+k-2}, A_{i+k-1}]$ est l'image de $[A_{i-2}, A_{i-1}]$ par f , de sorte que ce côté est égal à $[A_i, A_{i+1}]$, puisque f est bijective. Comme les indices i et $i-2$ sont différents (car on a $n \geq 3$), c'est impossible puisque les côtés de \mathcal{L} sont distincts. On conclut alors comme ci-dessus.

Si les images de $[A_0, A_1]$ et $[A_1, A_2]$ sont des côtés adjacents dans l'autre sens, disons $[A_k, A_{k-1}]$ et $[A_{k-1}, A_{k-2}]$, il s'agit maintenant de montrer par récurrence pour tout $i \geq 2$, la formule $f(A_i) = A_{k-i}$. On sait que les images des côtés $[A_{i-1}, A_i]$ et $[A_i, A_{i+1}]$ sont des côtés adjacents. Or, l'image du côté $[A_{i-1}, A_i]$ est le côté $[A_{k-i}, A_{k-i+1}]$, donc l'image de $[A_i, A_{i+1}]$ est soit le côté $[A_{k-i-1}, A_{k-i}]$, soit le côté $[A_{k-i+1}, A_{k-i+2}]$. Mais ce dernier est déjà l'image du côté $[A_{i-2}, A_{i-1}]$ et on a encore une contradiction avec le fait que les côtés sont distincts.

3.6 Conservation et parenté

3.8 Proposition. *Si une application affine conserve une ligne \mathcal{L} elle conserve toutes les lignes parentes à \mathcal{L} .*

Démonstration. Dire que \mathcal{L}' est parente de \mathcal{L} c'est dire qu'il existe $\psi \in \mathbf{A}$ avec $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \circ \psi$. Dire que f conserve \mathcal{L} c'est dire qu'il existe $\tau \in TS$ avec $f \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \tau$. Mettant ensemble ces éléments on obtient $f \circ \mathcal{L}' = f \circ \mathcal{L} \circ \psi = \mathcal{L} \circ \tau \circ \psi$. Mais, le groupe TS est un sous-groupe distingué de \mathbf{A} et on a donc $\psi^{-1}\tau\psi = \tau'$ avec $\tau' \in TS$, ou encore $\tau\psi = \psi\tau'$. On a donc $f \circ \mathcal{L}' = \mathcal{L} \circ \psi \circ \tau' = \mathcal{L}' \circ \tau'$ ce qui signifie que \mathcal{L}' est conservée par f .

¹⁴C'est l'hypothèse décisive, voir le contre-exemple 3.6.3.

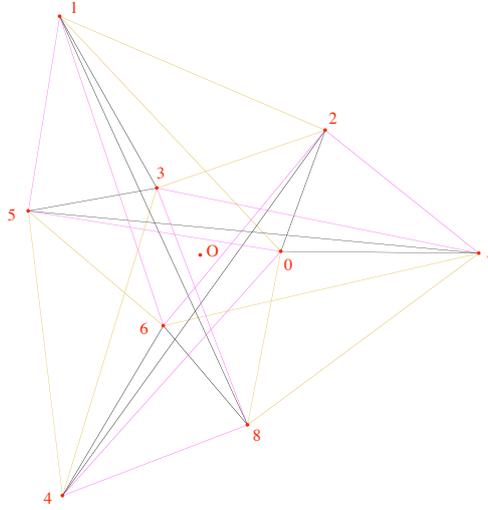


Figure 7

3.9 Exemple. On peut se demander, avec un brin d'optimisme, si, lorsqu'une ligne admet des isométries non triviales, il y a toujours des lignes simples dans sa parentèle. Il n'en est rien comme le montre l'exemple de la figure 7. Dans cet exemple, la ligne orange, d'ordre 9, numérotée de 0 à 8, est invariante par les rotations de centre O et d'angle $\pm 2\pi/3$. Les lignes parentes non équivalentes (invariantes elles aussi par ces rotations) sont obtenues en multipliant les indices modulo 9 par 2 (ligne noire) ou 4 (ligne rose). On voit que ces trois lignes sont croisées.

4 Applications affines conservant une ligne polygonale : la définition géométrique

Ce paragraphe reprend la problématique évoquée au début du précédent. La situation est la suivante. On a une ligne polygonale \mathcal{L} , de support L et une application affine f qui conserve L et il s'agit de voir à quelles conditions on peut en déduire que f conserve \mathcal{L} au sens de 3.1. La première étape, nécessaire, cf. 3.3, mais pas suffisante, cf. 3.6 et 3.7, consiste à donner des conditions qui assurent que la conservation du support implique celle de ses éléments (sommets, côtés) et le premier point consiste à caractériser géométriquement les sommets d'une ligne polygonale.

4.1 Les bouts

4.1 Définition. Soit \mathcal{L} une ligne polygonale et soit A un point de son support. On dit que A est un **bout** de \mathcal{L} (ou de L) s'il existe un segment $[B, C]$ avec $A \in]B, C[$, $[A, C] \subset L$ et $]B, A[\cap L = \emptyset$.

4.2 Proposition. Soit $\mathcal{L} = A_0 \dots A_{n-1}$ une ligne polygonale. Les bouts de \mathcal{L} sont des sommets de \mathcal{L} .

Démonstration. Soit A un bout de \mathcal{L} et posons, avec les notations de la définition, $F_i = [A, C] \cap [A_i, A_{i+1}]$ (s'il est non vide, c'est un segment). Comme $[A, C]$ est contenu dans L , la réunion des F_i est égale à $[A, C]$. Il y a deux sortes de F_i : ceux qui contiennent A et ceux qui ne le contiennent pas. La réunion des premiers ne peut pas être réduite à A , sinon $[A, C]$ serait réunion de deux fermés disjoints ($\{A\}$ et les autres F_i) ce qui contredit sa connexité. Il y a donc un des F_i qui contient A et d'autres points de $[A, C]$. Quitte à remplacer $[A, C]$ par F_i (qui est aussi un segment d'origine A), on peut donc supposer $[A, C] \subset [A_i, A_{i+1}]$, donc les points A, B, C, A_i, A_{i+1} alignés. Alors, on a nécessairement $A = A_i$ ou A_{i+1} . En effet, si A était intérieur au côté, $]B, A[$ rencontrerait L , contrairement à l'hypothèse.

4.3 Remarque. Attention, la réciproque est fautive, comme le montrent les exemples ci-dessous. Dans chacun des cas, le sommet numéro 0 de la ligne n'est pas un bout.

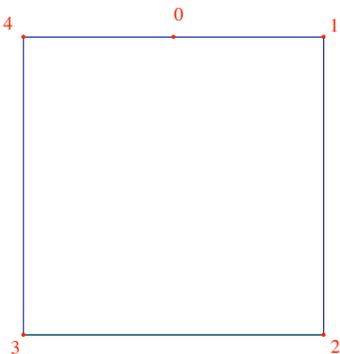


Figure 8

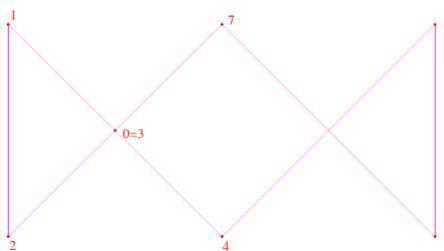


Figure 9

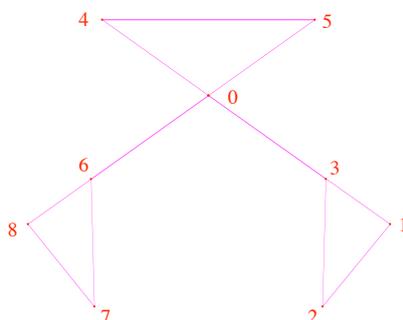


Figure 10

4.2 Définition géométrique : l'image des sommets

Lorsque les sommets sont tous des bouts on a le résultat attendu :

4.4 Théorème. *Soit \mathcal{L} une ligne polygonale et soit L son support. Soit f une application affine bijective du plan qui conserve $L : f(L) = L$. Alors, l'image par f d'un bout de \mathcal{L} est un bout de \mathcal{L} . Si tous les sommets sont des bouts, l'image d'un sommet de \mathcal{L} est un sommet de \mathcal{L} .*

Démonstration. Soit A un bout de L . Cela signifie qu'il existe B, C tels que $A \in]B, C[$, $[A, C] \subset L$ et $]B, A[\cap L = \emptyset$. Si on applique f et si on note A', B', C' les images de A, B, C respectivement, comme f est affine elle conserve l'alignement et on a donc $A' \in]B', C'[[$. Comme $f(L)$ est contenu dans L on a aussi $[A', C'] \subset L$. Enfin, on a $]B', A'[\cap L = \emptyset$. En effet, si M' était dans cet ensemble, comme on a $f(L) = L$, il existerait $M \in L$ avec $M' = f(M)$ et $M \in]B, A[$, ce qui est absurde.

4.5 Remarque. On notera qu'on a vraiment utilisé dans cette preuve l'hypothèse $f(L) = L$ (et pas seulement $f(L) \subset L$). D'ailleurs, l'hypothèse $f(L) \subset L$ est insuffisante comme le montre l'exemple de l'équerre : on prend un repère orthogonal O, I, J et on considère la ligne \mathcal{L} dont les sommets sont, dans l'ordre, I, O, J, O, I . Alors, toute homothétie h de centre O et de rapport λ avec $0 < \lambda < 1$ vérifie $h(L) \subset L$, mais pas $h(L) = L$ et, bien que tous les sommets de la ligne soient des bouts, h ne transforme pas les sommets I, J en des sommets. De plus, l'ensemble des applications affines f qui vérifient $f(L) \subset L$ n'est pas un groupe.

Bien entendu, si l'on suppose que f est une isométrie, l'hypothèse $f(L) \subset L$ implique $f(L) = L$ en vertu de 1.6.

4.3 Discussion

4.6 Proposition. Soit \mathcal{L} une ligne polygonale fermée. On suppose que la ligne \mathcal{L} vérifie les deux conditions suivantes :

(*) Un sommet A_i de \mathcal{L} n'est contenu dans aucun autre côté¹⁵ que les deux côtés $[A_{i-1}, A_i]$ et $[A_i, A_{i+1}]$.

(**) Trois sommets consécutifs A_{i-1}, A_i, A_{i+1} ne sont jamais alignés.

Alors, tous les sommets de \mathcal{L} sont distincts et sont des bouts.

Démonstration. Montrons que les sommets sont distincts. En effet, le sommet A_i n'est pas égal à A_k avec $k \neq i$ (si $k = i - 1$ ou $i + 1$ cela contredit (**), sinon, cela contredit (*)). Supposons que \mathcal{L} ait un sommet A_i qui ne soit pas un bout. Comme le côté $[A_i, A_{i+1}]$ est dans L , cela signifie qu'il existe des points M_n , arbitrairement voisins de A sur la demi-droite opposée, et distincts, qui sont dans L . Comme les côtés sont en nombre fini, on peut supposer que les M_n sont tous dans le même côté $[A_k, A_{k+1}]$. Comme les côtés sont fermés, le point A_i y est aussi. La condition (*) impose que le côté soit $[A_{i-1}, A_i]$ ou $[A_i, A_{i+1}]$. Ce dernier cas est impossible car les points M_n sont dans la demi-droite opposée. Si les points M_n sont dans $[A_{i-1}, A_i]$, on voit que les trois points A_{i-1}, A_i et A_{i+1} sont alignés, ce qui contredit la condition (**).

4.7 Proposition. Soit \mathcal{L} une ligne polygonale fermée.

1) On suppose que la ligne $\mathcal{L} = (A_1 \cdots A_n)$ est **simple**¹⁶ (i.e. qu'elle vérifie la condition : si deux côtés de \mathcal{L} se coupent, alors ce sont deux côtés consécutifs, $[A_{i-1}, A_i]$ et $[A_i, A_{i+1}]$, et leur intersection est réduite au sommet A_i). Alors \mathcal{L} vérifie la condition (*).

2) On suppose que la ligne polygonale \mathcal{L} est convexe (i.e. pour tout côté $[A_i, A_{i+1}]$, les sommets autres que A_i et A_{i+1} sont dans le même demi-plan ouvert limité par $(A_i A_{i+1})$ (voir [ME])). Alors \mathcal{L} vérifie les conditions (*) et (**).

Démonstration. Le point 1) est clair. Pour 2), considérons le côté $[A_i, A_{i+1}]$. Tous les sommets de L autres que A_i et A_{i+1} sont dans le même demi-plan ouvert P limité par la droite $(A_i A_{i+1})$. Cela montre déjà que A_{i-1} n'est pas sur cette droite (condition (**)), mais aussi que A_i n'est pas sur un côté $[A_k, A_{k+1}]$ autre que ses voisins (condition (*)) car les sommets A_k et A_{k+1} sont dans le demi-plan P , donc aussi le segment qui les joint.

¹⁵Précisément, si on a $A_i \in [A_k, A_{k+1}]$, c'est que k est égal à i ou $i - 1$.

¹⁶On sait alors (par le théorème de Jordan, voir [ME]), que \mathcal{L} définit un polygone \mathcal{P} (plein : l'intérieur de \mathcal{L}) dont la frontière est L . On ne fait pas cette hypothèse ici pour se garder la possibilité des lignes croisées.

4.8 Remarques.

1) La figure 8 montre un exemple de ligne qui ne vérifie pas la condition (**) et pour laquelle la conclusion du théorème 4.4 est fausse (par une rotation de $\pi/2$ le carré est conservé, mais le sommet 0 ne s'envoie pas sur un sommet).

2) La figure 9 montre un exemple de ligne qui ne vérifie pas la condition (*) et pour laquelle la conclusion du théorème 4.4 est fausse (par la symétrie d'axe (47), l'image du sommet 0 n'est pas un sommet).

3) Les conditions (*) et (**) ne sont pas nécessaires pour la validité de 4.4 (voir figure 10). On peut se demander si la condition plus faible suivante ne suffirait pas :

(***) Il n'existe pas deux côtés de \mathcal{L} ayant à la fois les deux propriétés suivantes :

- leurs supports sont portés par la même droite,
- ils ont un sommet en commun.

Il n'en est rien comme le montre le contre-exemple de la figure ci-dessous :

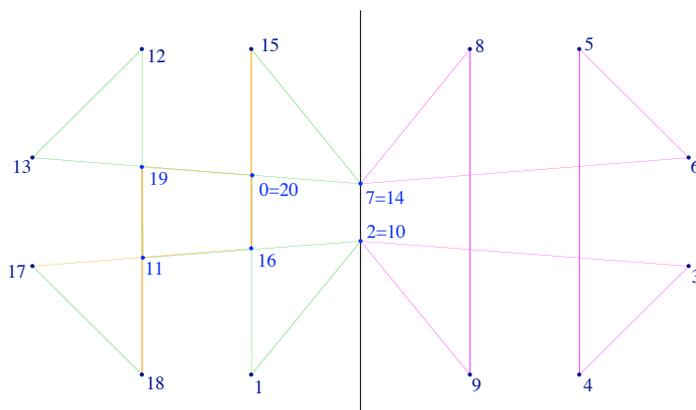


Figure 11

Cette ligne vérifie la condition (***) mais, dans la symétrie d'axe la droite noire (27), l'image du sommet 0 n'est pas un sommet.

4.4 Définition géométrique : l'image des côtés

4.4.1 Quelques contre-exemples pour modérer notre enthousiasme

L'exemple suivant montre que la condition sur les bouts, qui permet d'assurer que l'image d'un sommet est un sommet ne suffit pas pour assurer que l'image d'un côté en est un.

Il existe des lignes polygonales, dont tous les sommets sont des bouts, mais où pourtant une application affine qui conserve L ne transforme pas nécessairement un côté en un côté. C'est le cas de la ligne de la figure 12, dont tous les sommets sont des bouts, mais où la symétrie par rapport à la droite verte pointillée transforme le côté $[0, 1]$ en $[0, 2]$ qui n'est pas un côté.

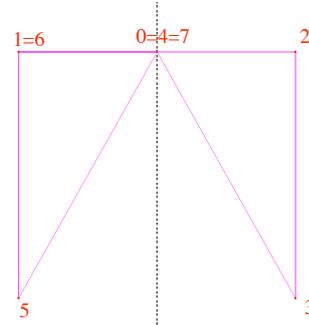


Figure 12

Il ne suffit pas non plus d'ajouter la condition (***) comme le montre l'exemple ci-dessous, dans lequel tous les sommets sont des bouts et où la condition (***) est satisfaite, mais où l'image du côté $[0, 1]$ dans la symétrie par rapport à la droite pointillée n'est pas un côté :

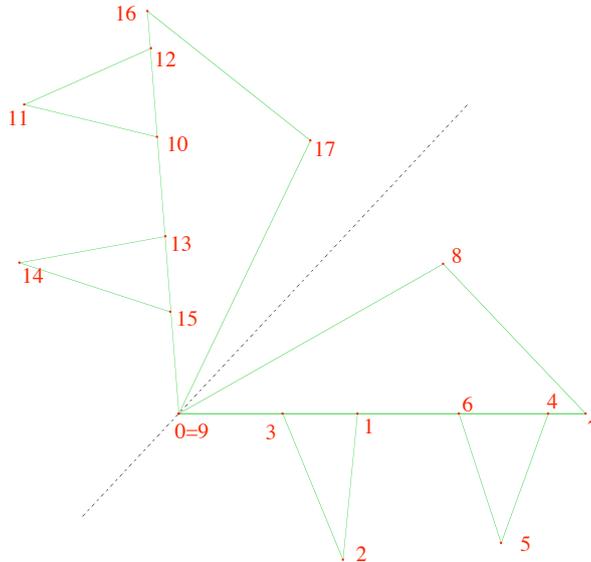


Figure 13

4.4.2 Faute de grives on mange des merles

Nous allons nous rabattre sur les conditions plus fortes vues ci-dessus :

4.9 Théorème. *Soit \mathcal{L} une ligne polygonale (non orientée) vérifiant les conditions (*) et (**) de 4.6 et soit L son support. Soit f une application affine bijective du plan qui conserve $L : f(L) = L$. Alors, l'image par f d'un côté de \mathcal{L} est un côté de \mathcal{L} . De plus, f conserve l'adjacence des côtés.*

Avec 3.7 on obtient une condition suffisante de conservation d'une ligne :

4.10 Corollaire. Soit \mathcal{L} une ligne polygonale (non orientée) vérifiant les conditions (*) et (**) de 4.6 et soit L son support. Soit f une application affine bijective du plan qui conserve $L : f(L) = L$, alors f conserve la ligne \mathcal{L} au sens combinatoire de 3.1.

Démonstration. (du corollaire) Il suffit de noter que les conditions (*) et (**) impliquent que les côtés de \mathcal{L} sont distincts. En effet, si on a $[A_i, A_{i+1}] = [A_k, A_{k+1}]$ avec $i \neq k$, de deux choses l'une :

- Si $k = i - 1$, les points A_{i-1}, A_i et A_{i+1} sont alignés et cela contredit (**).
- Sinon, le point A_i est dans $[A_k, A_{k+1}]$ avec $k \neq i, i - 1$ et cela contredit (*).

Démonstration. (de 4.9) On utilise le lemme suivant :

4.11 Lemme. Soit $\mathcal{L} = (A_1 \cdots A_n)$ une ligne polygonale vérifiant les conditions (*) et (**).

1) Si un segment $[A, B]$, non réduit à un point, est inclus dans L , il est inclus dans un côté et un seul.

2) Les côtés de \mathcal{L} sont exactement les segments $[A, B]$ limités par des sommets distincts et tels que $[A, B]$ soit inclus dans L .

3) Deux côtés distincts sont adjacents si et seulement s'ils ont un sommet commun.

Démonstration. (de 4.11)

1) Montrons d'abord l'unicité. Supposons $[A, B]$ inclus dans deux côtés distincts $[A_i, A_{i+1}]$ et $[A_j, A_{j+1}]$. On a $i \neq j$, donc $A_i \neq A_j$ en vertu de 4.6. Les points $A_i, A_{i+1}, A_j, A_{j+1}$ sont alignés sur (AB) . Nécessairement l'un des sommets d'un côté est inclus dans l'autre côté. (C'est un petit lemme : deux segments d'une droite tels qu'aucun sommet ne soit contenu dans l'autre sont disjoints.) Supposons $A_i \in [A_j, A_{j+1}]$ pour fixer les idées. Cela contredit (*) si A_i est intérieur ou (**) s'il est égal à A_{j+1} (car on a alors $i = j + 1$).

Pour l'existence, on considère une suite de points (M_n) de $[A, B]$, distincts de A et convergeant vers A . Les M_n sont dans L , donc dans la réunion des côtés, et, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les M_n sont tous dans le même côté $C = [A_i, A_{i+1}]$ (car il n'y a qu'un nombre fini de côtés). Comme les côtés sont fermés, cela implique que A est aussi dans C , donc, par convexité, le segment $[A, M_1]$ est dans C . On peut supposer, par exemple, que les points sont dans l'ordre A_i, A, M_1, A_{i+1} sur la droite (AB) . Si B est dans C on a fini. Sinon, B est au-delà de A_{i+1} , le segment $[A_{i+1}, B]$ est contenu dans L et le raisonnement ci-dessus montre qu'il y a un segment $[A_{i+1}, B']$ non trivial qui est contenu dans un côté C' . Vu l'hypothèse (*), C' ne peut être que l'un des segments $[A_i, A_{i+1}]$ ou $[A_{i+1}, A_{i+2}]$. Par construction,

ce n'est pas $[A_i, A_{i+1}]$, donc c'est l'autre. Mais alors les points A_i, A_{i+1}, A_{i+2} sont alignés ce qui contredit (**).

2) Il est clair que les côtés vérifient la condition. Réciproquement, si $[A, B]$ est contenu dans L il est contenu dans un côté $[A_i, A_{i+1}]$ en vertu de 1). Mais, comme A et B sont des sommets, ce sont nécessairement A_i et A_{i+1} (ou l'inverse) en vertu de la condition (*).

3) Il est clair que deux côtés adjacents ont un sommet commun. Réciproquement, si deux côtés ont un sommet commun, la condition (*) assure qu'ils sont adjacents.

On peut alors prouver 4.9. On a vu que les conditions (*) et (**) assurent que les sommets sont des bouts, donc qu'ils sont conservés par f . Avec la propriété 2) du lemme on voit que les côtés sont transformés en côtés, avec l'assertion 3) on a la conservation de l'adjacence.

5 Catalogue des lignes polygonales admettant des symétries

Le but de ce paragraphe est de décrire toutes les lignes polygonales fermées qui admettent des symétries. On va voir qu'elles s'obtiennent essentiellement à partir des polygones réguliers (même si elles peuvent être assez compliquées). Nous distinguons les deux cas de sous-groupes possibles.

5.1 Description des lignes polygonales admettant un groupe cyclique d'isométries

5.1.1 Un lemme

5.1 Lemme. *Soit \mathcal{L} une ligne polygonale orientée d'ordre n , non alignée. On suppose que le groupe $G(\mathcal{L})$ contient un groupe cyclique d'ordre d . Alors n est multiple de d .*

Démonstration. Soit \mathcal{L}' la ligne polygonale réduite associée à \mathcal{L} , cf. 2.14. Elle est d'ordre n' diviseur de n . Il est clair qu'on a $G(\mathcal{L}) = G(\mathcal{L}')$ (à cause de la formule $\mathcal{L}(\hat{i}) = \mathcal{L}'(\hat{i})$). Comme le fixateur de \mathcal{L}' est trivial, l'application $f \mapsto \tau_f$ est un homomorphisme de $G(\mathcal{L}')$ dans $\mathbf{Z}/n'\mathbf{Z}$, injectif car la ligne n'est pas alignée, de sorte que $G(\mathcal{L}')$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathbf{Z}/n'\mathbf{Z}$. Son ordre divise donc n' , donc *a fortiori* n .

5.1.2 Construction d'une ligne admettant un groupe cyclique d'isométries

Dans ce paragraphe on étudie les lignes admettant comme groupes d'isométries des sous-groupes finis (cycliques) du groupe des rotations.

5.2 Convention. Dans ce qui suit, on convient d'appeler polygone régulier à 2 côtés un segment $[A, B]$ avec $A \neq B$. Les côtés de ce polygone sont $[A, B]$ et $[B, A]$ et son centre est le milieu de $[A, B]$. Son groupe d'isométries est formé de l'identité, de la symétrie de centre O et des réflexions d'axes (AB) et la médiatrice de $[A, B]$.

5.3 Proposition. On suppose le plan orienté et on considère les données suivantes :

- Un entier $d > 1$.
 - Un entier e premier avec d vérifiant $1 \leq e \leq d$.
 - Un point O du plan. On note ρ la rotation de centre O et d'angle $+2\pi/d$ et G le groupe (cyclique d'ordre d) engendré par ρ .
 - Un entier $k \geq 1$ et k polygones réguliers (convexes) S_0, \dots, S_{k-1} , de centre O , à d côtés.
 - Un sommet A_i du polygone S_i pour chaque $i = 0, \dots, k-1$, vérifiant¹⁷ $A_i \neq A_{i+1}$ pour $i = 0, \dots, k-2$ et $A_{k-1} \neq \rho(A_0)$.
- On définit une ligne polygonale $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, e, O, S_0, \dots, S_{k-1}, A_0, \dots, A_{k-1})$ d'ordre $n = kd$ en posant, pour $j \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ et $i = 0, \dots, k-1$, $A_{jk+i} = \rho^j(A_i)$. On parlera de ces lignes comme des **lignes du premier type**.

1) La ligne \mathcal{L} admet G comme groupe d'isométries, autrement dit on a $G \subset G(\mathcal{L})$.

2) On suppose que les polygones S_i vérifient les deux conditions suivantes :

- Il existe deux des polygones S_i qui ne sont pas coaxiaux¹⁸, c'est-à-dire qui n'admettent pas les mêmes axes de symétrie.
- Les polygones S_i ont des rayons distincts.

Alors, on a $G = G(\mathcal{L})$.

Démonstration. 1) Comme ρ est d'ordre d , $\rho^j(A_i)$ ne dépend que de la classe de j modulo d et, si on change $jk+i$ en $jk+i+rkd$, on ne change pas $\mathcal{L}(jk+i) = A_{jk+i}$, de sorte qu'on a bien défini une application $\mathcal{L} : \mathbf{Z}/kd\mathbf{Z} \rightarrow X$. Pour voir qu'il s'agit d'une ligne polygonale, il faut voir qu'elle n'est pas stationnaire, c'est-à-dire qu'on a $A_{jk+i} \neq A_{jk+i+1}$ pour tout $i = 0, \dots, k-1$ et tout $j \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$. Dans le cas $i \leq k-2$, on a¹⁹ $A_{jk+i} = \rho^j(A_i)$ et $A_{jk+i+1} =$

¹⁷La condition est réalisée, en particulier, si les polygones S_i sont distincts.

¹⁸Voir ci-dessous 5.11 pour des précisions.

¹⁹On a $A_{jk+i} = \rho^j(A_i)$ si i est le reste dans la division de $jk+i$ par k .

$\rho^j(A_{i+1})$ et ces points sont distincts car on a supposé $A_i \neq A_{i+1}$. Dans le cas $i = k - 1$, on a $A_{jk+k-1} = \rho^j(A_{k-1})$ et $A_{(j+1)k} = \rho^{j+1}(A_0)$, et la conclusion résulte de l'hypothèse $A_{k-1} \neq \rho(A_0)$.

Montrons que \mathcal{L} admet G comme groupe d'isométries. Il suffit de montrer que l'action de ρ sur les sommets de \mathcal{L} est une action de décalage. Or, on a $\rho(A_{jk+i}) = \rho(\rho^j(A_i)) = \rho^{j+1}(A_i) = A_{(j+1)k+i} = A_{(jk+i)+k}$. On a donc $\rho \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \tau$ avec $\tau(i) = i + k$.

2) Si $G(\mathcal{L})$ est strictement plus grand que G il contient soit une symétrie axiale σ , soit une autre rotation. Dans le premier cas, cela contredit la première hypothèse : il y a deux polygones non coaxiaux. En effet, comme les rayons des polygones sont distincts, l'image d'un des sommets de S_i par σ est un autre sommet de S_i , de sorte que σ est une symétrie qui conserve S_i . Comme cela vaut pour tous les S_i , cela montre qu'ils sont tous coaxiaux.

Dans le second cas cela contredit la seconde hypothèse. En effet, $G(\mathcal{L})$ contiendrait alors une rotation d'ordre q multiple strict de d , donc le transformé de S_1 par cette rotation, qui serait un polygone à d côtés de même rayon que S_1 : c'est impossible par hypothèse.

5.4 Remarque. Une ligne polygonale du type de 5.3 n'est pas nécessairement réduite. Par exemple, avec $d = 3$, on considère un triangle équilatéral de centre O , parcouru deux fois (dans le sens trigonométrique). On note ses sommets $A_0 = A_3$, $A_1 = A_4$, $A_2 = A_5$. On a donc $A_1 = r(A_0)$ où r est la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$. Si on prend $e = 2$ et donc $\rho = r^2$, $k = 2$, $S_0 = S_1 = A_0A_1A_2$ on vérifie qu'on a bien $A_{2j+i} = \rho^j(A_i)$ pour $i = 0, 1$ et $j = 0, 1, 2$.

5.2 Quelques exemples

Voici un premier exemple avec $d = 3$, $e = 1$, $k = 3$:

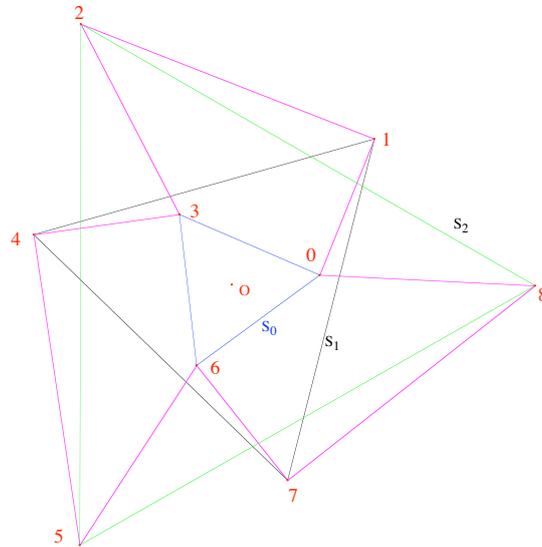


Figure 14

Voici un autre exemple avec $d = 5$, $e = 2$, $k = 2$. Dans cet exemple, le groupe d'isométries est le groupe diédral.

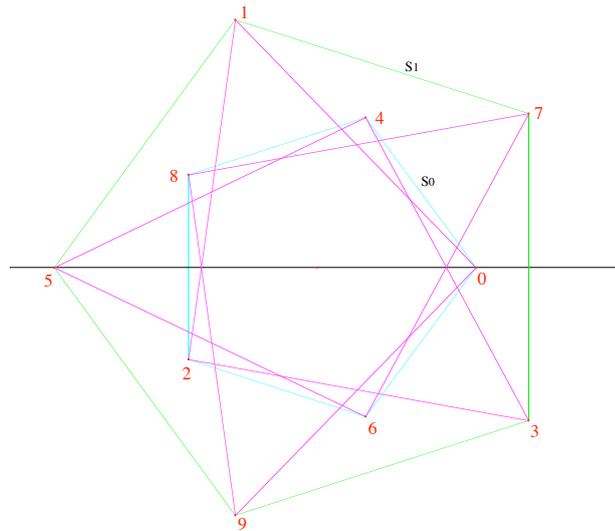


Figure 15

5.2.1 Réciproque : le cas $d \geq 3$

Attention, la réciproque de 5.3 n'est vraie que pour $d \geq 3$. La raison tient à la remarque 5.1 : pour $d \geq 3$, une rotation d'ordre d agit obligatoirement par décalage sur les sommets de la ligne, mais pour $d = 2$, cela peut être faux.

5.5 Théorème. Soit d un entier ≥ 3 et soit \mathcal{L} une ligne polygonale réduite dont le groupe $G(\mathcal{L})$ contient un groupe cyclique d'ordre d . Alors, \mathcal{L} est une

ligne du premier type (voir 5.3).

Démonstration. Soit \mathcal{L} une ligne polygonale d'ordre n , réduite. On suppose que $G(\mathcal{L})$ contient le groupe G des rotations d'ordre d et de centre O . Les images d'un sommet de \mathcal{L} par les éléments de G (qui sont des sommets de \mathcal{L}) sont les sommets d'un polygone régulier à d côtés. Comme on a $d \geq 3$, ces points ne sont pas alignés, de sorte que \mathcal{L} n'est pas alignée.

On a donc $n = kd$ en vertu de 5.1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $2\pi/d$. En vertu de la définition de $G(\mathcal{L})$ et de la remarque 3.5, r opère sur les sommets de \mathcal{L} par décalage, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que l'on ait, pour tout i , $r(A_i) = A_{i+p}$.

5.6 Lemme. *Il existe un entier e , avec $1 \leq e \leq d$, premier avec d , tel que, si $\rho = r^e$, on ait, pour tout i , $\rho(A_i) = A_{i+k}$.*

Démonstration. (du lemme) Comme \mathcal{L} est réduite, on a un homomorphisme ψ de $G \subset G(\mathcal{L})$ dans le groupe des décalages T_n de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ qui à une rotation associe le décalage qu'elle définit sur les indices. Comme la ligne \mathcal{L} n'est pas alignée, cet homomorphisme est injectif. Comme G est cyclique d'ordre d , $\psi(G)$ est l'unique sous-groupe cyclique d'ordre d de $T_n \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, qui est engendré par k puisqu'on a $n = kd$. Comme $\psi(G)$ est engendré par p cela prouve que p est multiple de k : $p = kp'$, avec de surcroît p' inversible modulo d .

Soit alors e l'inverse de p' modulo d situé entre 1 et d . On a $p'e \equiv 1 \pmod{d}$, donc aussi $pe \equiv k \pmod{n}$ et, pour tout i , $i + pe \equiv i + k \pmod{n}$. Si on pose $\rho = r^e$, on a bien $\rho(A_i) = r^e(A_i) = A_{i+pe} = A_{i+k}$ pour tout i .

On peut alors finir la preuve de 5.5. Comme e est premier avec d , la rotation ρ est un générateur de G . Comme ρ agit par décalage de k sur les indices, pour $i = 1, 2, \dots, k$, l'orbite S_i du point A_i sous l'action de G est formée des points A_{i+kj} avec $j = 0, 1, \dots, n-1$ et c'est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à d côtés. On retrouve bien la situation de 5.3.

5.7 Remarque. Le théorème 5.5 est inexact²⁰ si la ligne n'est pas supposée réduite. Ainsi, si on prend pour ligne \mathcal{L} un carré parcouru deux fois $A_0 = A_4$, $A_1 = A_5$, $A_2 = A_6$, $A_3 = A_7$, le groupe $G(\mathcal{L})$ contient $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, mais on vérifie que \mathcal{L} n'est pas de la forme de 5.3 (on aurait $d = 4$, $k = 2$, $e = 1$ ou $e = 3$ et on devrait avoir $A_2 = A_{1 \times 2 + 0} = \rho(A_0)$, ce qui n'est pas le cas).

²⁰Le nombre de conneries qu'on peut dire sur ces putains de lignes polygonales est impressionnant.

5.2.2 Le cas $d = 2$: les lignes du deuxième type

5.8 Proposition. *On considère les données suivantes :*

- *Un point O du plan. On note s la symétrie de centre O .*
- *Un entier $k \geq 1$ et un entier $p \in [0, 2k[$. On pose $n = 2k$. On note τ le retournement de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ défini par $\tau(i) = p - i$. On rappelle (cf. 2.7) que, si p est impair, τ , vu comme permutation de $\{0, 1, \dots, 2k - 1\}$, est un produit de k transpositions disjointes : $\tau = (i_1, p - i_1) \dots (i_k, p - i_k)$ et que, si p est pair, $p = 2p'$, c'est un produit de $k - 1$ transpositions disjointes :*

$$\tau = (p')(p' + k)(i_1, p - i_1) \dots (i_{k-1}, p - i_{k-1}).$$

On définit alors une ligne polygonale \mathcal{L} de la façon suivante :

1) *Si p est impair, on choisit k segments de milieu O et on appelle A_i et A_{p-i} leurs extrémités pour $i = i_1, \dots, i_k$.*

2) *Si $p = 2p'$ est pair, on pose $A_{p'} = A_{p'+k} = O$ et on choisit $k - 1$ segments de milieu O et on appelle A_i et A_{p-i} leurs extrémités, pour $i = i_1, \dots, i_{k-1}$.*

Alors, la ligne $\mathcal{L} = (A_0 \dots A_{2k-1})$ est une ligne polygonale et le groupe $G(\mathcal{L})$ contient le groupe à deux éléments $\{\text{Id}, s\}$.

5.9 Remarque. Attention, si l'on ne fait pas d'hypothèse, cette ligne peut être stationnaire. Je ne vois pas comment dire qu'elle ne l'est pas, sauf de deux façons dont aucune n'est satisfaisante :

- La manière tautologique qui consiste à ne garder que les lignes non stationnaires.

- En faisant l'hypothèse que les segments sont distincts, mais cette hypothèse est trop forte, voir figure 16 un exemple de ligne non stationnaire, avec cependant des côtés égaux et admettant une symétrie centrale qui opère par le retournement $i \mapsto 5 - i$.

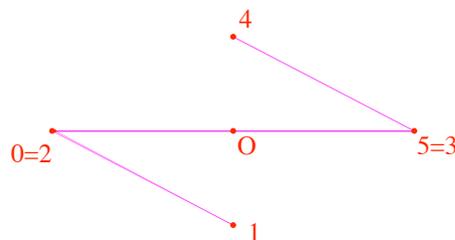


Figure 16

Démonstration. Si on ne demande pas à la ligne d'être non stationnaire, il n'y a rien à vérifier. Par construction, il est clair que s conserve \mathcal{L} en agissant sur les indices par le retournement τ .

5.10 Proposition. *Soit \mathcal{L} une ligne polygonale dont le groupe $G(\mathcal{L})$ contient la symétrie s de centre O . Alors \mathcal{L} est de l'un des types vus en 5.3 ou en 5.8 selon que s opère par décalage ou par retournement.*

On trouvera ci-dessous les lignes du deuxième type avec $k = 3$ et tous les p possibles.

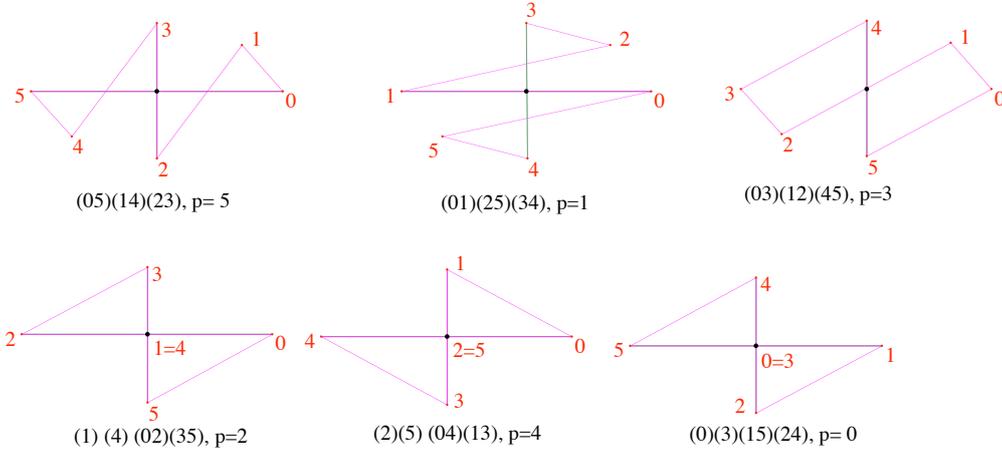


Figure 17

La figure suivante montre quelques lignes du premier type avec les mêmes sommets que les précédentes. Ici, la symétrie centrale agit par décalage $i \mapsto i + 3$.

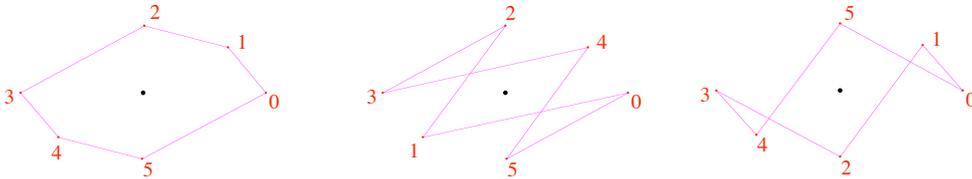


Figure 18

5.3 Le cas diédral

Cette fois, il s'agit de répertorier les lignes qui admettent un groupe diédral comme groupe de symétries.

5.3.1 Polygones coaxiaux

On commence par une définition déjà évoquée en 5.3 :

5.11 Proposition-Définition. *Soient S_1, \dots, S_k des polygones réguliers de même centre O et avec le même nombre d de côtés. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) Il existe une symétrie axiale qui conserve tous les polygones S_i .
 1') Il existe une droite passant par O et qui, pour chaque i , passe soit par un sommet, soit par le milieu d'un côté de S_i .
 2) Les groupes d'isométries des polygones S_i sont identiques.
 On dit alors que les polygones S_i sont **coaxiaux**.

Démonstration. Notons d'abord que le groupe des rotations de centre O et d'angles $2k\pi/n$ conserve tous les polygones S_i . Il en résulte que les propriétés 1) et 2) sont équivalentes. En effet, il est clair que 2) implique 1) et la réciproque vient du fait que le groupe diédral est engendré par le groupe des rotations et par une symétrie. L'équivalence de 1) et 1') résulte de la description des axes de symétrie d'un polygone régulier. En effet, ce sont soit les droites passant par un sommet et par le centre (les diagonales), soit les médiatrices des côtés, cf. [Perrin], les deux cas étant incompatibles si d est pair, mais identiques si d est impair.

5.12 Remarque. Comme on vient de le rappeler, les axes de symétrie d'un polygone régulier à un nombre pair de côtés sont de deux types : diagonales ou médiatrices. Il en résulte que deux polygones coaxiaux à un nombre pair de côtés peuvent occuper deux positions : soit être **en phase**, soit être **déphasés** selon que leurs axes de symétrie communs sont de même type ou de types différents, voir figure 19.

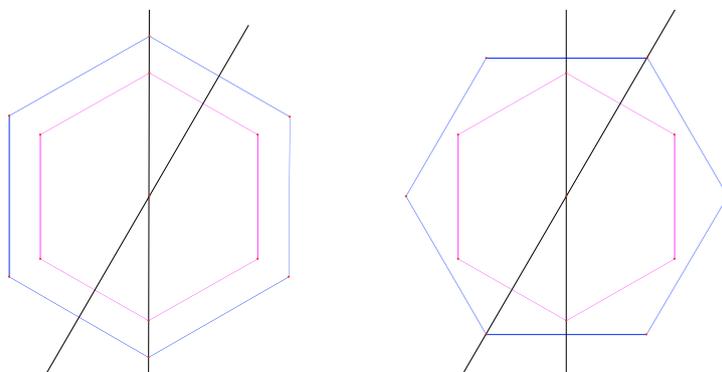


Figure 19

5.3.2 S'ils n'ont pas de pain qu'ils mangent de la brioche

Il s'agit donc de répertorier les lignes polygonales qui admettent un groupe diédral d'isométries. J'ai fini par me convaincre qu'il valait mieux faire quelques concessions, c'est-à-dire ajouter quelques hypothèses, plutôt que de dire des bêtises. Voici donc ce que je sais faire.

5.3.3 Deux lemmes

Le premier lemme est un résultat général sur les opérations.

5.13 Lemme. *Si un groupe G opère sur un ensemble X et si N est un sous-groupe distingué de G , les éléments de G permutent les orbites de X sous N .*

Démonstration. C'est à peu près évident. Soit $\omega(x)$ l'orbite de x sous N et soit $g \in G$. Je dis qu'on a $g(\omega(x)) = \omega(g(x))$. En effet, si y est dans $\omega(x)$ on a $y = n.x$ avec $n \in N$, d'où $g(y) = gn(x)$. Mais, comme N est distingué, on a $gng^{-1} = n' \in N$, d'où $gn = n'g$ et $g(y) = gn(x) = n'g(x)$ est dans l'orbite de $g(x)$. L'autre inclusion se lit en revenant en arrière.

Le second lemme précise l'opération d'une réflexion :

5.14 Lemme. *Soit \mathcal{L} une ligne non alignée admettant le groupe diédral d'ordre $2d$ comme groupe d'isométries. On suppose $d \geq 3$. Alors, les réflexions opèrent par retournement.*

Démonstration. La rotation ρ d'ordre $d \geq 3$ opère par décalage $\rho(A_i) = A_{i+k}$ en vertu de 3.5. Si la réflexion f opère aussi par décalage : $f(A_i) = A_{i+p}$, on voit qu'on a $f\rho(A_i) = \rho f(A_i)$. Comme les points ne sont pas alignés, cela montre que f et ρ commutent, ce qui est absurde car on a $f\rho f^{-1} = \rho^{-1}$.

5.3.4 Une situation favorable

La proposition suivante est cruciale et c'est elle qui va permettre de décrire les lignes à symétrie diédrale :

5.15 Proposition. *Soit \mathcal{L} une ligne polygonale non alignée admettant le groupe diédral \mathbf{D}_d d'ordre $2d$ comme groupe d'isométries. On suppose $d \geq 3$. En vertu de 5.5, on a $\mathcal{L} = \mathcal{L}(d, e, O, S_0, \dots, S_{k-1}, A_0, \dots, A_{k-1})$ (les notations sont celles de 5.3, en particulier, \mathcal{L} est d'ordre $n = kd$).*

Alors, si f est une réflexion de \mathbf{D}_d , les S_i sont permutés par f . De façon précise, si on suppose de plus que tous les polygones S_i sont distincts, on a les cas suivants :

- *Si k est impair il y a exactement un polygone S_i invariant par f (et donc par \mathbf{D}_d). Quitte à renuméroter les S_i on peut supposer qu'il s'agit de S_0 . Les autres polygones sont échangés deux à deux selon la formule²¹ $f(S_p) = S_{k-p}$.*
- *Si $k = 2h$ est pair, il y a zéro ou deux polygones invariants par f parmi les S_i et les autres sont échangés deux à deux par f . Si S_0 est invariant, il*

²¹Formule valable aussi pour S_0 si on prend les indices p modulo k .

en est de même de S_h et on a $f(S_p) = S_{k-p}$ pour tout²² p . Si aucun polygone n'est invariant, il existe un entier impair r tel que l'on ait $f(S_i) = S_j$ où $j \in [0, k-1]$ est le reste dans la division euclidienne de $r-i$ par k .

Démonstration. Notons d'abord que, comme les polygones sont distincts, les $n = dk$ points de la ligne \mathcal{L} sont tous distincts.

Le fait que les S_i soient permutés par f vient de 5.13. Comme f est d'ordre 2, les orbites de f dans l'ensemble des S_i sont de cardinal 1 ou 2 et si k est impair, l'un au moins des polygones est invariant.

Supposons que l'un des polygones S_i soit invariant par \mathbf{D}_d , disons S_0 . Il existe alors une réflexion f qui fixe un sommet de S_0 et, quitte à renuméroter \mathcal{L} , on peut supposer $f(A_0) = A_0$. On a vu que f agit par retournement (cf. 5.14). On a donc, pour tout entier s compris entre 0 et $n-1$, $f(A_s) = A_{r-s}$, pour un r vérifiant $0 \leq r < n = dk$. On en déduit $A_r = A_0$ et, comme tous les sommets de \mathcal{L} sont distincts, cela n'est possible que si r est nul. On a donc $f(A_s) = A_{-s}$ pour tout s (avec des indices pris modulo n , comme d'habitude).

Considérons alors un polygone S_p avec $1 \leq p \leq k-1$ et supposons que l'on ait $f(S_p) = S_q$. On a donc $f(A_p) = A_{-p} \in S_q$, donc $A_{-p} = A_{q+ki}$. Comme les sommets sont distincts, cela impose $-p \equiv q+ki \pmod{n}$ et, comme on a $n = dk$, cela implique que k divise $p+q$. Comme on a $0 < p, q < k$, la seule possibilité est $p+q = k$, soit $q = k-p$. On voit déjà que le polygone S_p ne peut être invariant que si k est pair, avec $k = 2p$. De plus :

- Si k est impair le seul polygone invariant est S_0 et on a $f(S_p) = S_{k-p}$ pour $p \geq 1$.
- Si k est pair, $k = 2h$, et si le polygone S_0 est invariant, il en est de même de S_h et les autres polygones sont échangés par la formule $f(S_p) = S_{k-p}$.

Si k est pair et si aucun des S_i n'est invariant, on écrit encore f sous la forme $f(A_i) = A_{r-i}$ et, comme l'application f n'a aucun point fixe, r est impair. Pour $i = 0, \dots, p-1$, $f(S_i)$ est le polygone qui contient A_{r-i} , c'est-à-dire celui dont l'indice est le reste dans la division de $r-i$ par k .

5.16 Remarque. Dans le cas $k = 2h$, lorsqu'il y a deux polygones invariants, on a supposé que f fixe le point A_0 de S_0 . La question est d'étudier le comportement de f vis à vis de S_h . Les points de S_h sont les A_{h+kj} avec $j = 0, 1, \dots, d-1$. Comme on a $f(A_i) = A_{-i}$, on voit que l'image par f de A_{h+jk} est A_{h+lk} avec $j+l+1 \equiv 0 \pmod{d}$ et $0 \leq l \leq d-1$. Mais, les conditions sur j et l donnent $1 \leq j+l+1 \leq 2d-1$, ce qui impose $j+l+1 = d$, donc $l = d-j-1$. On a ainsi décrit l'action de f sur les sommets du polygone S_h . Bien entendu, si d est impair, f fixe un unique

²²Même remarque.

sommet de S_h , mais, en revanche, si d est pair, il n'en fixe aucun. Autrement dit, les polygones S_0 et S_h sont coaxiaux, mais déphasés (cf. 5.12). On voit ainsi que, si d est pair, il n'existe pas de ligne polygonale à symétrie diédrale admettant deux polygones invariants coaxiaux en phase.

5.3.5 Construction de lignes à symétrie diédrale : le cas k impair et $d \geq 3$

5.17 Proposition. *Soit d un entier ≥ 3 , e un entier premier avec d , ρ la rotation de centre O de d'angle $2e\pi/d$. Soit $k = 2h + 1$ un entier impair. On choisit arbitrairement des polygones réguliers S_0, S_1, \dots, S_h , à d côtés, de centre O et, sur chacun d'entre eux, un point A_i . On considère un axe de symétrie D de S_0 , on note f la symétrie par rapport à D et on pose $S_{k-i} = f(S_i)$ ($i = 1, \dots, h$). Pour $i = 1, \dots, h$, on pose $A_{h+i} = \rho f(A_{k-h-i})$. Enfin, on pose, pour $j \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ et $i = 0, \dots, k-1$, $A_{j+k+i} = \rho^j(A_i)$.*

On définit ainsi une ligne $\mathcal{L}(d, e, O, S_0, \dots, S_{k-1}, A_0, \dots, A_{k-1})$ (les notations sont celles de 5.3) qui admet le groupe \mathbf{D}_d comme groupe d'isométries. Réciproquement, si une ligne \mathcal{L} d'ordre dk avec k impair admet le groupe d'isométries \mathbf{D}_d et si, toujours avec les notations de 5.3, les polygones S_i sont distincts, elle est obtenue par le procédé ci-dessus.

Démonstration. C'est essentiellement 5.15, la seule chose restant à prouver est la formule donnant A_{h+i} . On a vu que la symétrie f est donnée par $f(A_j) = A_{-j}$. Comme par ailleurs la rotation ρ agit par $\rho(A_s) = A_{k+s}$ on a $\rho f(A_j) = A_{k-j}$. Avec $j = k - h - i$ on obtient la formule voulue.

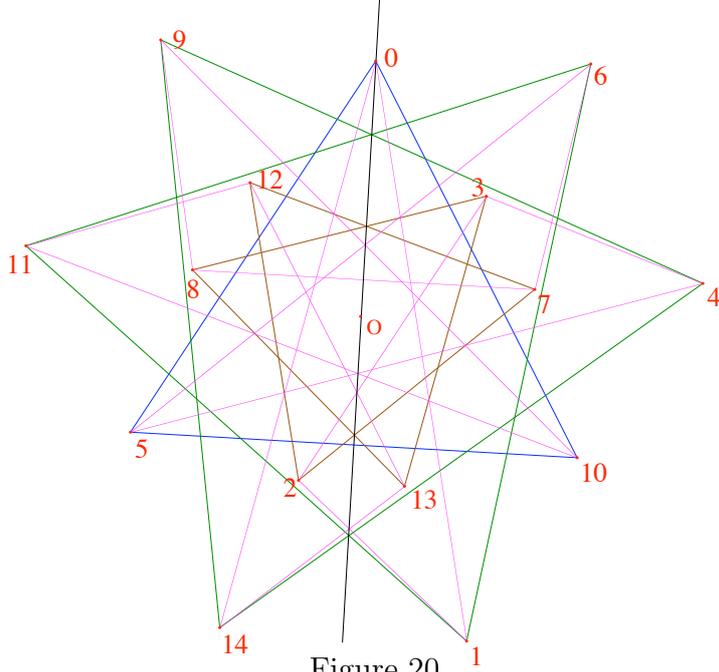


Figure 20

5.18 Remarque. Le résultat permet de construire des lignes polygonales à symétrie diédrale. Dans l'exemple ci-dessus on a pris $d = 3$, $e = 1$, $k = 5$ (donc $h = 2$). On se donne les triangles contenant les points 0,1,2 (et les points en question) et on prend leurs symétriques par rapport à la droite joignant le centre au point 0. On construit alors $A_3 = \rho f(A_2)$ et $A_4 = \rho f(A_1)$ et on termine en appliquant la rotation ρ .

5.3.6 Construction de lignes à symétrie diédrale : le cas k pair, $d \geq 3$ sans polygone invariant

5.19 Proposition. Soit d un entier ≥ 3 , e un entier premier avec d , ρ la rotation de centre O de d'angle $2e\pi/d$. Soit $k = 2h$ un entier pair et r un entier impair. On note \bar{r} la classe de r modulo k . L'application $i \mapsto \bar{r} - i$ de $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ dans lui-même admet h orbites à 2 éléments : $\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_h, j_h\}$. On choisit arbitrairement des polygones réguliers S_{i_1}, \dots, S_{i_h} , à d côtés, de centre O et, sur chaque S_{i_q} , un point A_{i_q} . On se donne une droite D passant par O et on note S_{j_q} le symétrique de S_{i_q} ($q = 1, \dots, h$) par rapport à D . Pour $q = 1, \dots, h$, on pose $A_{r-i_q} = f(A_{i_q})$. Enfin, on pose, pour $j \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ et $i = i_1, \dots, i_h, r - i_1, \dots, r - i_h$, $A_{jk+i} = \rho^j(A_i)$.

On définit ainsi une ligne $\mathcal{L}(d, e, O, S_0, \dots, S_{k-1}, A_0, \dots, A_{k-1})$ (notations de 5.3) qui admet le groupe \mathbf{D}_d comme groupe d'isométries. Réciproquement, si une ligne \mathcal{L} d'ordre dk admet le groupe d'isométries \mathbf{D}_d et si, toujours avec

les notations de 5.3, les polygones S_i sont distincts, en nombre pair et ne sont pas invariants, elle est obtenue par le procédé ci-dessus.

Démonstration. C'est encore 5.15.

5.20 Remarque. Là encore le résultat donne une méthode de construction. Ici on a pris $d = 3$, $e = 1$, $k = 6$, donc $h = 3$, $r = 9$, $i_1 = 0$, $i_2 = 1$, $i_3 = 4$, donc $j_1 = 3$, $j_2 = 2$, $j_3 = 5$.

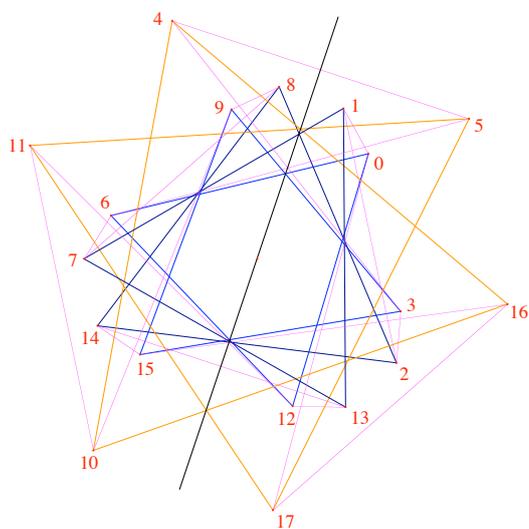


Figure 21

5.3.7 Construction de lignes à symétrie diédrale : le cas k pair, $d \geq 3$ avec deux polygones invariants

5.21 Proposition. Soit d un entier ≥ 3 , e un entier premier avec d , ρ la rotation de centre O de d'angle $2e\pi/d$. Soit $k = 2h$ un entier pair. On choisit arbitrairement des polygones réguliers S_0, S_1, \dots, S_{h-1} de centre O , à d côtés et un polygone régulier S_h coaxial avec S_0 , mais déphasé par rapport à S_0 . Soit D un axe de symétrie de S_0 fixant un sommet A_0 de S_0 et f la symétrie d'axe D . On choisit arbitrairement des sommets A_1, \dots, A_{h-1} des polygones S_1, \dots, S_{h-1} . On choisit²³ le sommet A_h de S_h de telle sorte que l'on ait $\rho f(A_h) = A_h$. On pose $S_{k-i} = f(S_i)$, pour $i = 1, \dots, h-1$. Pour

²³Il y a deux choix possibles, symétriques par rapport à O . En effet, comme ρ est un générateur du groupe des rotations, si f est une symétrie "médiatrice" ρf est une symétrie diagonale et inversement.

$i = 1, \dots, h - 1$, on pose $A_{k-i} = \rho(f(A_i))$. Enfin, on pose pour $j \in \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ et $i = 0, \dots, k - 1$, $A_{jk+i} = \rho^j(A_i)$.

On définit ainsi une ligne $\mathcal{L}(d, e, O, S_0, \dots, S_{k-1}, A_0, \dots, A_{k-1})$, avec les notations de 5.3, qui admet le groupe \mathbf{D}_d comme groupe d'isométries. Réciproquement, si une ligne \mathcal{L} d'ordre dk admet le groupe d'isométries \mathbf{D}_d si, avec les notations de 5.3, **les polygones S_i sont distincts**, et si deux d'entre eux sont invariants par \mathbf{D}_d , elle est obtenue par le procédé ci-dessus.

Démonstration. C'est toujours 5.15. Dans la figure ci-dessous on a pris $d = 4$, $k = 4$, $e = 1$ et les polygones invariants déphasés sont S_0 et S_2 .

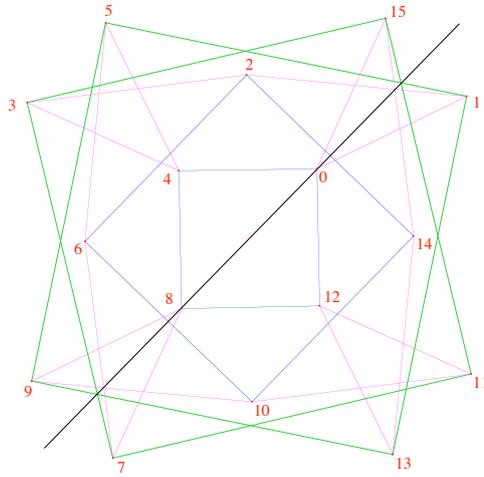


Figure 22

5.3.8 Le cas $d = 2$

Si une ligne admet comme groupe d'isométries le groupe de Klein (une symétrie centrale et deux symétries axiales d'axes perpendiculaires en le centre de symétrie), il faut encore distinguer deux cas selon que les lignes, vis à vis de la symétrie centrale, sont de l'un ou l'autre type. Dans ce qui suit, je me contente d'énoncer les résultats et de donner des exemples, laissant au lecteur le soin de faire les démonstrations²⁴.

Les lignes du deuxième type

Je commence, un peu par hasard, par les lignes du deuxième type. En vérité, il n'y a pas grand chose à changer pour obtenir les lignes du premier type comme on le verra.

²⁴C'est vrai, quoi, y en a marre qu'il n'y ait que moi qui bosse!

5.22 Lemme. *Si une ligne admet le groupe de Klein comme groupe d'isométries et si la symétrie centrale opère par retournement, l'une des deux symétries axiales opère par décalage.*

Démonstration. Sinon, la symétrie centrale, qui est le produit des deux symétries axiales, opérerait comme un produit de deux retournements, donc par décalage.

5.23 Proposition. *On reprend les données de 5.8 : un entier $k \geq 1$ et un entier $p \in [0, 2k[$. On pose $n = 2k$. On note τ le retournement de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ défini par $\tau(i) = p - i$ et σ le décalage (d'ordre 2) défini par $\sigma(i) = k + i$. On rappelle (cf. 2.7) que, si p est impair, τ , vu comme permutation de $\{0, 1, \dots, 2k - 1\}$, est un produit de k transpositions disjointes : $\tau = (i_1, p - i_1) \dots (i_k, p - i_k)$ et que, si p est pair, c'est un produit de $k - 1$ transpositions disjointes : si $p = 2p'$ on a :*

$$\tau = (p')(p' + k)(i_1, p - i_1) \dots (i_{k-1}, p - i_{k-1}).$$

On note que τ et σ commutent, de sorte que σ permute les orbites de τ .

On se donne un point O du plan et une droite D passant par O . On appelle D' la perpendiculaire à D passant par O . On note s la symétrie de centre O et t la symétrie d'axe D .

1) *On suppose p impair et k pair, $k = 2k'$. La permutation σ permute l'ensemble $\Omega = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$ des orbites de τ et n'en laisse stable aucune. On choisit k' indices $j_1, \dots, j_{k'}$ parmi i_1, \dots, i_k , de telle sorte que Ω soit l'ensemble de toutes les orbites ω_{j_α} et $\omega_{\sigma(j_\alpha)}$ pour $\alpha = 1, \dots, k'$. L'ensemble $\{0, \dots, n - 1\}$ est constitué des indices j_α , des $k + j_\alpha$, des $p - j_\alpha$ et des $p - k - j_\alpha$.*

On choisit arbitrairement k' points A_i du plan correspondant aux indices j_α et on pose $A_{k+j_\alpha} = t(A_{j_\alpha})$, $A_{p-j_\alpha} = s(A_{j_\alpha})$ et $A_{p-k-j_\alpha} = st(A_{j_\alpha})$. Voir ci-dessous, figure 23, avec $k = 4$, $p = 5$, $k' = 2$, $j_1 = 0$ et $j_2 = 2$.

2) *On suppose p et k impairs : $p = 2p' + 1$ et $k = 2k' + 1$. La permutation σ permute Ω et laisse stable $\omega_{p'-k'} = \omega_{p'+k'+1}$. On choisit comme ci-dessus k' indices j_α représentant les autres orbites, puis k' points A_i arbitraires du plan correspondant aux indices j_α et un point $A_{p'-k'}$ situé sur D' . On définit alors les autres points comme ci-dessus. On notera qu'on a, à la fois, $A_{p'+k'+1} = t(A_{p'-k'}) = s(A_{p'-k'})$. Voir ci-dessous figure 24, avec $k = 5$, $p = 7$, $k' = 2$, $p' = 3$, $p' - k' = 1$, $j_1 = 0$, $j_2 = 3$.*

3) *On suppose p pair, $p = 2p'$ et k impair, $k = 2k' + 1$. La permutation σ échange les points fixes p' et $p' + k$ de τ et permute les autres orbites sans en laisser stable aucune. On choisit k' indices j_α représentant les orbites à deux éléments, puis k' points arbitraires A_{j_α} du plan. On pose $A_{p'} = A_{p'+k} = O$ et on définit les autres points comme ci-dessus. Voir ci-dessous figure 25, avec $k = 5$, $p = 6$, $k' = 2$, $p' = 3$, $j_1 = 0$, $j_2 = 2$.*

4) On suppose p et k pairs, $p = 2p'$, $k = 2k'$. La permutation σ échange les points fixes p' et $p' + k$ de τ et permute les autres orbites en laissant stable l'orbite $(p' - k', p' + k')$. On choisit $k' - 1$ indices j_α représentant les autres orbites à deux éléments, puis k' points arbitraires A_{j_α} du plan. On pose $A_{p'} = A_{p'+k} = O$ et on choisit un point $A_{p'-k'}$ sur D' . On définit les autres points comme ci-dessus. Voir ci-dessous, figure 26, avec $k = 6$, $p = 4$, $k' = 3$, $p' = 2$, $j_1 = 0$, $j_2 = 1$.

Alors, dans tous les cas répertoriés ci-dessus, la ligne $\mathcal{L} = (A_0 \dots A_{n-1})$ est une ligne polygonale dont le groupe $G(\mathcal{L})$ contient le groupe de Klein $\{\text{Id}, s, t, st\}$. De plus, toutes les lignes admettant ce groupe d'isométries avec une symétrie centrale qui agit par retournement sont de cette forme.

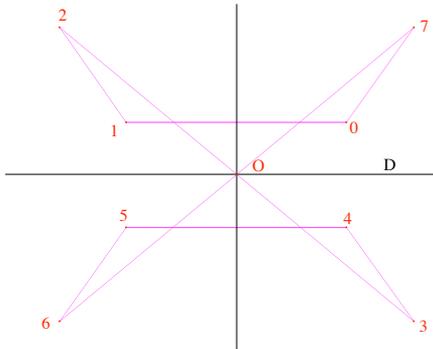


Figure 23

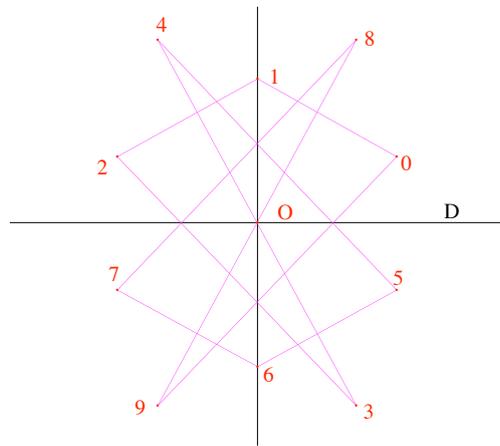


Figure 24

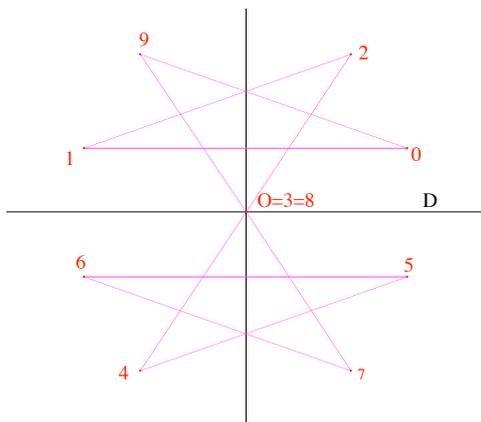


Figure 25

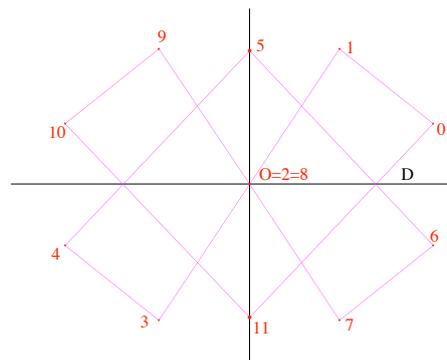


Figure 26

Les lignes du premier type

La situation est quasiment identique à celle de 5.23. Le lecteur recopiera soigneusement cette proposition en échangeant les rôles de s et t . Dans les

points 1) et 2), il n'y a pas d'autre modification Dans le point 3), les points $A_{p'}$ et $A_{p'+k}$ qui sont fixes par t sont maintenant situés sur D . Il suffit de choisir le point $A_{p'}$ et de prendre $A_{p'+k} = s(A_{p'})$. Le reste est identique. De même, dans le point 4), les points $A_{p'}$ et $A_{p'+k}$ doivent être choisis sur D , symétriques par rapport à O , et non plus en O . Les figures 27-30 reprennent les données des figures précédentes, en incorporant ces modifications.

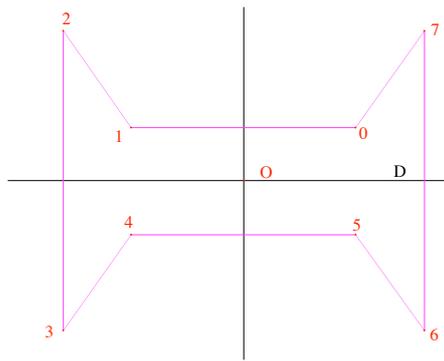


Figure 27

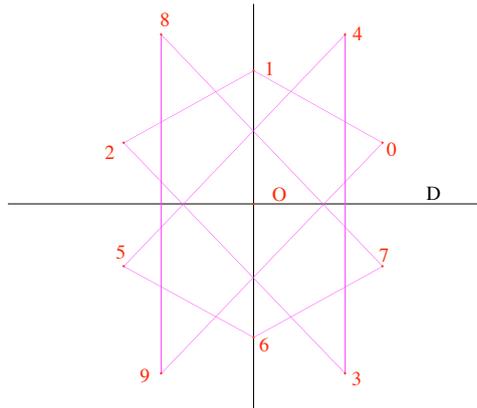


Figure 28

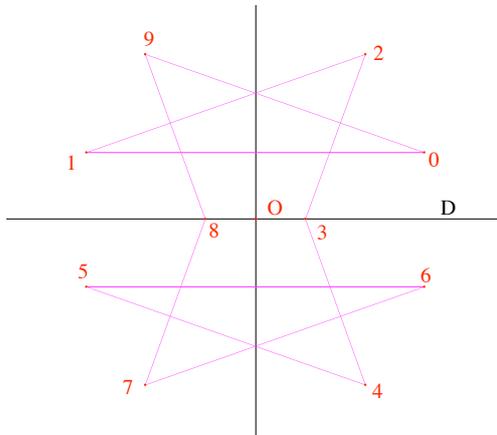


Figure 29

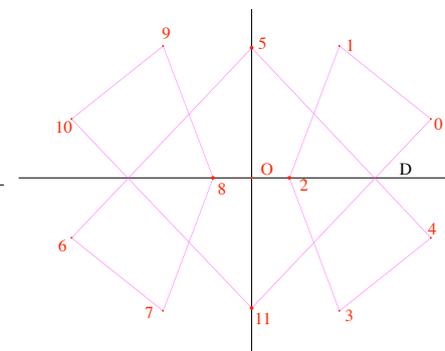


Figure 30

5.3.9 Le cas $d = 1$

Le groupe cyclique d'ordre 2 constitué d'une symétrie axiale et de l'identité sera considéré comme un groupe diédral dégénéré. Voici comment construire des lignes admettant ce groupe comme groupe d'isométries.

5.24 Proposition. Soit n un entier, k un entier compris entre 0 et $n - 1$ et $\tau : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ l'application définie par $\tau(i) = k - i$. Rappelons les résultats de 2.7 :

- Si n est impair, τ est un produit de $\lfloor n/2 \rfloor$ transpositions (et elle admet un unique point fixe).

- Si n est pair et k impair, τ est un produit de $n/2$ transpositions (et elle est sans point fixe).

- Si n et k sont pairs, τ est produit de $(n/2) - 1$ transpositions et elle admet deux points fixes.

On considère une droite D . Dans chaque orbite de τ on choisit un indice i et pour cet indice on se donne un point A_i du plan, situé sur D si on a $\tau(i) = i$. On définit A_{k-i} comme le symétrique de A_i par rapport à D . On obtient ainsi une ligne polygonale invariante par la symétrie d'axe D . On dira qu'elle est du type "retournée".

5.25 Proposition. Soit $n = 2k$ un entier pair et $\tau : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ l'application définie par $\tau(i) = k + i$. Soit D une droite et A_0, \dots, A_{k-1} des points quelconques du plan. On définit A_{k+i} pour $i = 0, \dots, k - 1$ comme le symétrique de A_i par rapport à D . On obtient ainsi une ligne invariante par la symétrie d'axe D . On dira que cette ligne est du type "décalée".

5.26 Proposition. Toute ligne polygonale invariante par une symétrie axiale est de l'un des deux types précédents.

5.27 Remarque. Dans la figure ci-dessous la ligne de gauche est du type décalée, celle de droite du type retournée. On identifie au premier coup d'œil les deux types de lignes, au moins dans le cas où les sommets de la ligne sont distincts : une ligne retournée a un sommet fixe et/ou un côté invariant par la symétrie, tandis qu'une ligne décalée n'a ni sommet fixe, ni côté invariant.

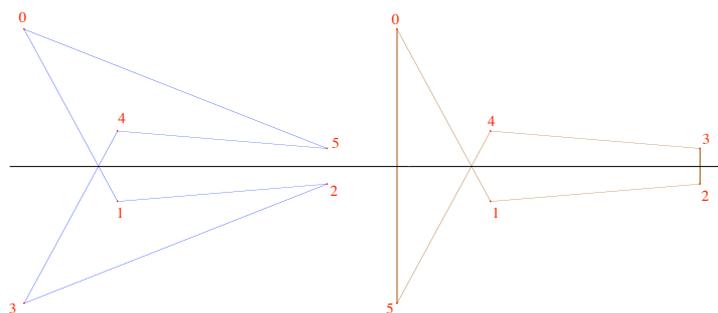


Figure 31

5.3.10 Quelques contre-exemples

La figure 32 montre un exemple de ligne \mathcal{L} dont le support L est invariant par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$, dont les sommets sont transformés en sommets, les côtés en côtés, mais où l'adjacence n'est pas conservée. Les côtés adjacents $[5, 6]$ et $[6, 7]$ sont en effet transformés en $[0, 1]$ et $[8, 9]$ qui ne sont pas adjacents.

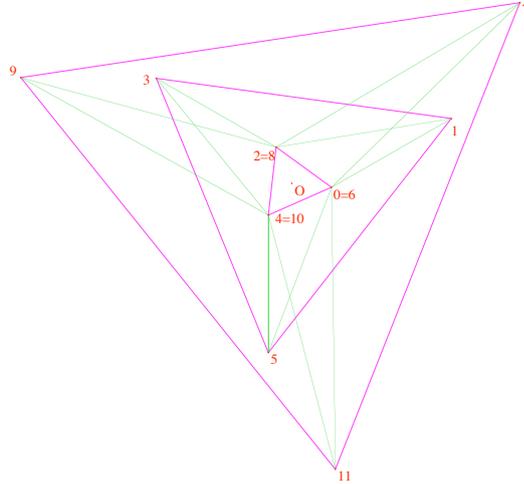


Figure 32

La figure suivante propose un contre-exemple à 5.15 lorsque les polygones S_i ne sont pas distincts. Ici, on a $d = 3$, $k = 5$ et, la symétrie f par rapport à la droite noire ne vérifie pas la formule $f(S_i) = S_{k-i}$ (en effet, on a $f(S_1) = S_3$ et $f(S_2) = S_4$).

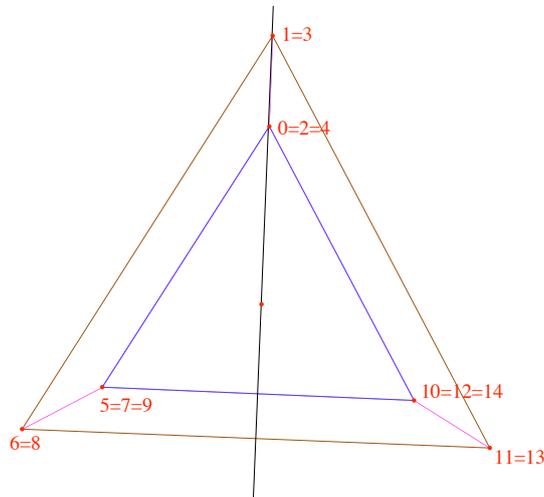


Figure 33