Aires, intégrales et primitives dans les programmes de lycée

Le texte qui suit est une nouvelle version d'une intervention que j'ai faite le 2 avril 2005 devant la commission Inter-IREM second cycle. On trouvera cet exposé à l'adresse suivante :

http ://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/secondcycle /Actes_de_la_Commission_Inter_IREM_Second_Cycle.htm

C'est un sujet qui me tient à cœur. En effet, dans le travail effectué au sein de la commission Kahane, j'ai beaucoup réfléchi sur les aires d'un point de vue géométrique. J'ai d'ailleurs enseigné ces questions pendant sept ans en licence pluridisciplinaire, voir [Perrin] ou [Perrin-IPR]. Quant à l'intégrale et aux primitives, c'est l'un des thèmes essentiels de l'oral du CAPES dont je m'occupe depuis de nombreuses années.

Je vais commencer par une rapide analyse des contenus des programmes de lycée sur cette question, de 1902 à nos jours. Je m'appuie pour cela sur l'étude de J.-P. Daubelcour (cf. [Daubelcour2], IREM de Lille). Je discuterai surtout de celui de 2002, qui n'est pas le pire, mais dont la rédaction me semble maladroite. J'examinerai en particulier la question des sommes de Riemann (ou de Darboux). Je terminerai en me risquant à des propositions de programmes.

1 Analyse des programmes

J'étudie brièvement les programmes[1] de quatre époques : avant les maths modernes, les maths modernes, l'époque intermédiaire et le programme actuel.

1.1 Les programmes anciens

1.1.1 La préhistoire

Le programme de 1902 (celui de la réforme qui introduisait vraiment les sciences au lycée) est très sommaire sur le sujet :

[1]Il s'agit des programmes de terminale scientifique (Math.élem., TC, TS).

Dérivée de l'aire d'une courbe (sic) *regardée comme une fonction de l'abscisse (on admettra la notion d'aire).*

Les manuels de l'époque démontrent que l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ est une primitive de f (ils supposent implicitement que f est monotone). La situation reste finalement assez voisine jusque dans les années 60, voir l'extrait du Lespinard et Pernet de 1947 qui ne fait pas l'hypothèse de monotonie (mais suppose que la fonction admet maximum et minimum sur un intervalle).

1.1.2 Les maths modernes

À l'époque de la réforme des maths modernes, on n'avait pas peur ! On définit l'intégrale de Riemann, à partir des sommes de Riemann[2] (ou plutôt de Darboux), on montre l'existence de l'intégrale pour une fonction monotone. Tout de même, on admet que les fonctions continues sont intégrables puis on fait le lien avec les primitives. L'aire n'arrive qu'ensuite[3]. On donne d'autres applications du calcul intégral, notamment pour les calculs de volumes et de nombreuses grandeurs physiques.

Mon impression c'est qu'on parle le moins possible de Newton et Leibniz, c'est-à-dire de primitives, et le plus possible de sommes de Riemann, ce qui constitue un retour aux méthodes d'Eudoxe et d'Archimède[4].

Je reproche essentiellement au programme maths modernes, outre le fait qu'il est sans doute trop difficile, de ne pas utiliser suffisamment les notions d'aire et de primitive d'utiliser trop les sommes de Riemann.

1.1.3 Les programmes de 1982 à 2002

Dans tous ces programmes, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **définie** comme la différence $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f. L'existence d'une telle

[2]Dans le livre [QR] de Terminale C de Queysanne et Revuz on définit l'intégrale des fonctions en escalier, les fonctions intégrables, on montre qu'elles forment un espace vectoriel, que l'intégrale est une forme linéaire, etc.

[3]Dans [QR], l'aire sous la courbe est définie comme l'intégrale. On donne ensuite les propriétés des parties quarrables et de la mesure (de façon un peu formelle, mais assez conforme à ce que je préconise.)

[4]Il est intéressant de voir comment on procède dans [QR] pour le "calcul" du volume de la pyramide ou celui de la boule : cela ressemble très fort à Euclide, on utilise la méthode d'exhaustion, c'est-à-dire les sommes de Riemann ou Darboux, ou les fonctions en escalier et pas du tout la méthode qui consiste à voir l'aire comme dérivée du volume. De plus, et c'est vraiment absurde, faute d'accepter une définition axiomatique du volume, la formule avec l'intégrale est donnée comme **définition** du volume !

primitive est admise pour une fonction f continue (en 1997, le mot continu ayant disparu, seules les fonctions dérivables ont une primitive !)

Du côté des aires, voici ce que dit le programme 1997 :

Définition de $\int_a^b f(t)dt$ à partir d'une primitive F.

Dans le cas d'une fonction positive, interprétation graphique de l'intégrale à l'aide d'une aire.

L'interprétation en question n'est pas évidente, sauf à refaire le chemin en sens inverse (partir de l'aire et montrer que l'aire sous la courbe est une primitive).

Le reste est standard, avec des petites variations (par exemple en 1982 la présence des changements de variables affines). Un point est à noter : la référence au calcul approché d'intégrales (en 1982, seulement les rectangles, mais avec majoration du reste, en 1997, sont citées les méthodes des rectangles, trapèzes et point milieu).

Je suis en désaccord avec cette façon de faire, essentiellement parce que l'introduction par les primitives est parachutée et déconnectée de la notion d'aire ! En contrepartie, il faut reconnaître que, là, on est capable de donner des démonstrations simples et correctes de toutes les propriétés.

En fait, si l'on regarde les manuels de l'époque, beaucoup présentent une introduction de l'intégrale et des primitives par les aires, mais avec mauvaise conscience. Deux exemples. Dans le Transmath TCE de 1987 on commence par une introduction sur les aires, on propose en travaux pratiques d'approche la preuve du fait que la dérivée de l'aire est égale à la fonction, mais on définit l'intégrale en se conformant au programme, i.e. comme $F(b) - F(a)$ (en admettant l'existence de F) et pour l'aire sous la courbe, on la **définit** comme l'intégrale ! Dans le Hachette TCE de la même année (par ailleurs très riche), on commence par donner les propriétés de l'aire (exactement comme je propose de le faire), mais on passe sous les fourches caudines du programme pour la définition de l'intégrale (même si l'existence de la primitive comme aire est prouvée plus loin).

1.2 Le programme de 2002

Le programme est présenté sur trois colonnes : 1. Contenus, 2. Modalités de mise en œuvre, 3. Commentaires.

1.2.1 Premier paragraphe

Le programme commence par la définition de $\int_a^b f(t)dt$, pour une fonction continue positive, comme l'aire sous la courbe (colonne 1).

Je voudrais dire, en préliminaire, que je suis en accord total avec cette définition. C'est un progrès essentiel par rapport aux programmes précédents, mais la suite est malheureusement moins convaincante. Pour éclairer le débat, j'annonce dès maintenant que ce que je propose c'est d'établir très vite après cette définition le lien avec les primitives.

Dans la colonne 2 on évoque les sommes de Darboux (du moins je suppose) :

On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.

Ici, en revanche, les choses me paraissent beaucoup plus discutables. Passons sur l'exemple des fonctions en escalier alors que la définition n'est donnée que pour des fonctions continues. Il y a dans la première phrase quelque chose d'ambigu : qu'a-t-on en tête exactement ? Une définition de la notion d'aire pour toutes les parties du plan ? C'est ce qu'indiquerait le mot quadrillage, car pour l'aire sous une courbe il suffit de prendre des rectangles. L'exemple de la parabole, au contraire, me semble aller dans le sens des rectangles : je suppose qu'on pense aux sommes de Darboux ici et à une méthode du style Eudoxe-Archimède. Je reviendrai largement sur ce point dans le paragraphe suivant. Disons tout de suite que je conteste fermement cette approche. Par ailleurs c'est vraiment dit de façon tellement floue que personne ne sait exactement ce qu'il faut en faire[5]. Les manuels ne sont pas tous sur la même longueur d'onde, certains comme le Transmath ont carrément interprété ce paragraphe comme le retour des sommes de Darboux, d'autres ont été bien plus modestes.

Dans la colonne 3 :

Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions : tout développement théorique est exclu.

[5]Voir par exemple [Dupuy-Lopez]

Ici on aperçoit un objectif plus ou moins avoué du programme : donner un aperçu de la *définition* de l'aire (et dans l'esprit des auteurs, il n'y a de définition qu'en construisant l'aire à l'aide de sommes de Riemann ou autres). Je dirai ce que j'en pense plus loin, mais il est clair que cela peut semer le trouble chez les enseignants, voir [Dupuy-Lopez]. Je trouve aussi pour le moins discutable la mention du calcul d'aire par cette méthode. S'il s'agit de calcul approché, je suis d'accord, mais l'exemple de la parabole et l'absence d'allusion aux méthodes des rectangles et autres semblent dire qu'il s'agit du calcul exact.

1.2.2 Deuxième paragraphe

Extension à l'intégrale d'une fonction de signe quelconque. (col. 1)

Dans la colonne 2 :

On indiquera la convention de signe sur un intervalle où f est négative et on déduira le cas général ; on pourra aussi ajouter une constante à f pour la rendre positive.

Ce paragraphe me semble pour le moins vaseux. D'abord, on sait qu'il y a des fonctions continues qui changent souvent de signe (penser à $x \sin \frac{1}{x}$ ou d'autres pires encore), ce qui rend la définition délicate. Un autre point n'est pas évoqué, c'est la comparaison de $\int_a^b$ et de $\int_b^a$. Rien n'est dit là-dessus, ni dans ce paragraphe, ni dans le suivant. Enfin, l'idée d'ajouter une constante à f pour la rendre positive n'est pas très claire. La situation est la suivante. On a f qui prend des valeurs négatives sur $[a, b]$. On admet (je suis d'accord) qu'en lui ajoutant une constante $m > 0$, on obtient $g = f + m \geq 0$. On définit alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt - m(b-a)$. Je comprends bien le but de la méthode et je préconise aussi d'utiliser cette astuce pour établir l'existence de primitives, mais ici, c'est au moins prématuré puisque cela suppose la linéarité de l'intégrale qui n'a pas encore été énoncée, ou, au moins, l'invariance de l'aire par translation verticale[6].

1.2.3 Troisième paragraphe

Linéarité, positivité, ordre, relation de Chasles. Inégalité de la moyenne.

[6]Le lecteur attentif notera que, dans la preuve de la formule $\int_a^b (f(t)+c)dt = \int_a^b f(t)dt + c(b-a)$, il ne revient pas au même de considérer $f + c$ ou $c + f$. Il notera aussi que le programme évoque l'additivité des aires, mais pas leur invariance par isométrie.

Il est bien précisé dans la colonne 3 : Ces propriétés sont admises !

Comme je l'ai déjà écrit à de multiples endroits, je suis, par principe, hostile à cette façon d'admettre **toutes** les propriétés essentielles d'une notion.

Encore, si les choses étaient claires intuitivement, mais ce n'est pas vraiment le cas. La linéarité, en particulier, n'est pas du tout évidente, même pour les fonctions positives. Si l'on veut vraiment expliquer cela il faut faire tout le travail avec les rectangles de Darboux et autres, ou revenir aux indivisibles de Cavalieri. En revanche, si on a établi que l'aire est une primitive de f, le résultat devient évident et c'est l'un des multiples aspects qui fait que la primitive est un progrès !

Dans le cas de Chasles, on a facilement la relation en termes d'additivité de l'aire lorsque les points sont dans le bon ordre. J'ai déjà signalé que la convention pour $\int_b^a$ n'avait pas été évoquée. Là encore, la preuve est évidente avec les primitives.

Dans la colonne 2 :

On illustrera l'intérêt de l'intégrale par diverses situations, entre autres :

– expression intégrale de la distance parcourue sur une droite par un point mobile dont on connaît la vitesse instantanée ;

– expression intégrale du volume d'un solide dont on connaît les aires des sections avec les plans d'équation $z =$ *constante ;*

Dans la colonne 3 on explique que ces activités doivent *préparer le théorème liant intégrales et primitives, particulièrement frappant dans le cas du point mobile.*

Là, l'absence des primitives devient ridicule. Car pour être frappant, il l'est, ce lien, puisque la vitesse est **par définition** la dérivée de la distance ! On a donc exactement la situation des primitives. En revanche, dans ce cas, expliquer intuitivement le lien vitesse-distance en termes d'aires, ne me semble pas vraiment évident[7].

En ce qui concerne le calcul du volume, je me demande comment on peut imaginer de traiter ce paragraphe si l'on ne dispose pas, soit des sommes de Darboux (pour appliquer une méthode à la Euclide), soit des primitives (voir ci-dessous le dossier sur le volume du cône.). Tant qu'on n'a que l'interprétation par **l'aire**, les choses ne me paraissent pas évidentes.

[7]Il semble bien que Galilée et Descartes, pour exprimer la distance parcourue dans le cas où la vitesse est proportionnelle au temps, aient raisonné sur le graphe de la vitesse et qu'ils avaient (peut-être) conscience de la proportionnalité de cet espace avec l'aire sous la courbe de la vitesse. Mais il ne faut pas oublier qu'à la différence des lycéens d'aujourd'hui, ils ne disposaient pas de la dérivée !

1.2.4 Quatrième paragraphe

Notion de primitive. Théorème : si f est continue sur un intervalle I et si a est un point de I, la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Dans la colonne 2 on précise que ce théorème doit être prouvé dans le cas monotone et admis dans le cas général.

Je suis totalement d'accord avec ça, sauf que je pense que cela devrait être fait bien avant.

On notera qu'il n'y a pratiquement plus d'allusion aux méthodes de calcul approché. On comparera au programme précédent qui disait :

On pourra, sur des exemples simples, décrire et appliquer quelques méthodes usuelles (rectangles, point milieu, trapèzes).

Cela me semble doublement incohérent, d'abord avec l'accent mis sur l'utilisation de la calculatrice dans le préambule, et ensuite, avec les multiples allusions aux sommes de Riemann ou Darboux que nous avons vues ci-dessus.

1.2.5 Conclusion

Le programme 2002 a le mérite essentiel de remettre la notion d'aire au cœur de la notion d'intégrale. Je suis d'accord avec son point de départ et je m'en félicite. Mais je trouve qu'il est rédigé en dépit du bon sens, au moins sur deux points.

D'abord, ce programme a voulu se démarquer du programme précédent qui définissait l'intégrale comme différence de deux valeurs d'une primitive et c'était justifié à mon avis. Mais comme c'est souvent le cas, la réaction a été trop brutale et la notion de primitive a été indûment rejetée à la fin.

Ensuite, on a vraiment l'impression en lisant ce programme, que les auteurs sont en permanence le cul entre deux chaises, partagés qu'ils sont entre des soucis contradictoires :

• l'idée que sans les "sommes de Riemann" il n'est pas de théorie rigoureuse de l'intégrale,

• la crainte (justifiée) que cette théorie soit trop difficile pour des élèves de terminale.

Le résultat est un programme mal fichu, où l'on ne démontre rien, où le lien primitive-intégrale arrive trop tard et où l'aspect numérique est absent. Mais nous verrons plus loin qu'il est facile de remédier à ces inconvénients, avec des modifications somme toute mineures.

2 Les sommes de Riemann ou de Darboux

Je discute dans ce paragraphe le rôle mathématique des sommes de Riemann et j'englobe sous ce nom aussi bien les vraies sommes de Riemann que celles de Darboux[8] voire une approche équivalente par les fonctions en escalier. Ce qui motive cette étude c'est la prise en compte du dilemme des auteurs du programme évoqué ci-dessus. Je partage l'idée que cette théorie n'est pas évidente, surtout à ce niveau, notamment en raison de difficultés techniques (on a besoin de la notion de borne supérieure, il y a des difficultés liées aux subdivisions[9], pour montrer l'intégrabilité d'une fonction continue on a besoin de l'uniforme continuité, etc.). Ce que je veux discuter ici c'est l'idée que cette théorie doit, sinon être enseignée au niveau du lycée, du moins être sous-jacente dans les programmes. Je ne suis pas le seul à poser ces questions, voilà ce qu'en disait Poincaré en 1904 dans une conférence au musée pédagogique :

Tout cela a sa place dans l'enseignement des facultés, tout cela serait détestable dans les lycées.

2.1 À quoi ça sert ?

Au travers de leurs apparitions dans la littérature, on peut attribuer aux sommes de Riemann quatre fonctions essentielles :

• Elles permettent de **définir** l'aire ou l'intégrale et de montrer leur existence.

• Elles permettent de les **calculer**.

• Elles permettent de les **approcher**.

• Elles permettent de **modéliser** des situations physiques.

À mon avis, en terminale, les deux premiers points sont inutiles, voire nocifs. En revanche, le troisième est important (mais il a malheureusement disparu dans le programme). Enfin le quatrième est essentiel aussi mais mérite au moins discussion.

---

[8]En vérité, si l'on avait deux sous de reconnaissance, ces sommes devraient s'appeler sommes d'Eudoxe, d'Euclide ou d'Archimède.

[9]À cause de Chasles, on ne peut pas se limiter aux subdivisions régulières.

2.2 Montrer l'existence de l'aire ?

Entendons-nous bien. Je suis fondamentalement d'accord avec mes collègues sur la nécessité de donner des définitions précises des objets dont on s'occupe[10]. Mais, lorsqu'il s'agit comme ici avec les aires, de notions complètement intuitives, avec lesquelles les élèves travaillent à l'école primaire, au collège (pas assez à mon goût), la nécessité d'une **construction** me semble totalement inutile. J'explicite ci-dessous plusieurs arguments qui vont dans ce sens.

Je préciserai plus loin ce que je propose. En un mot, il s'agit d'avoir en tête une définition **axiomatique** de l'aire.

Ce que je conteste dans le programme, c'est qu'après avoir suggéré d'introduire l'intégrale par les aires, il jette aussitôt une sorte de suspicion sur cette notion dans la phrase : *Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions : tout développement théorique est exclu.* J'ai été conforté dans la crainte que j'avais que cette lecture du programme n'induise une dérive par la lecture de l'article [Dupuy-Lopez]. En effet, les auteurs, soucieux de se conformer à la rédaction du programme, répercutent dans cet article cette nécessité[11] de la définition de l'aire *via* l'intégrale. Je cite, en vrac :

Or (est-il besoin de le rappeler), le calcul intégral ... montre (et on pourrait rajouter "surtout") que l'on peut définir l'aire de ces surfaces.

Le calcul intégral n'est pas un calcul d'aire parce que sans le calcul intégral, les aires n'existent pas.

C'est le calcul intégral qui va permettre de parler de la notion d'aire.

Le calcul intégral devient *un calcul d'aire car on dira que "l'aire sous la courbe" est définie par l'intégrale de la fonction ...*

2.2.1 Un premier argument : l'histoire

Les anciens ne se posaient pas la question de l'existence des aires planes, considérée comme allant de soi et on a fait des mathématiques jusqu'au XIX-ème siècle sans s'inquiéter de ça et sans rencontrer de difficulté essentielle.

[10]Et dans le programme 2002, je conteste le flou qui règne sur certains points : les intégrales des fonctions de signe quelconque, l'intégrale de b à a, etc.

[11]J'ai pris contact avec eux et il semble que cette position n'est que le reflet du programme, notamment du paragraphe cité. C'est un argument supplémentaire pour contester la rédaction du programme.

Comme le niveau des classes de lycée ne dépasse guère le début du XIX-ème siècle, on doit pouvoir aussi y admettre cette existence. C'est, je pense, ce que Poincaré avait en tête, et je partage son point de vue. C'est d'autant plus vrai que cette notion est familière aux élèves qui la manipulent depuis l'école primaire[12]. Ce qui est important, en revanche, c'est d'expliciter les propriétés de l'aire : additivité (au sens fort, i.e. en tolérant des segments dans les intersections), invariance par isométrie, éventuellement homogénéité, voir par exemple [Perrin]. Je signale que cela n'a rien de bien nouveau : les deux premiers axiomes sont énoncés dans Euclide !

2.2.2 Un second argument : les mathématiques

En vérité, ce n'est que lorsqu'on a commencé à manipuler des fonctions un peu bizarres qu'est apparue la nécessité d'une formalisation. C'est dans cette perspective que le travail de Riemann et celui de Lebesgue s'inscrivent. N'oublions pas que l'exemple le plus simple d'ensemble non quarrable c'est l'ensemble des points à coordonnées rationnelles du carré : ce n'est pas du tout une question qui se pose pour des élèves de lycée.

J'ajoute qu'il y a une arnaque manifeste à prétendre que les sommes de Riemann définissent les aires. Ce qu'elles montrent, c'est seulement l'existence de l'aire de l'hypographe d'une fonction. Si l'on veut être complet, il reste à voir l'existence de l'aire des parties du plan qui ne sont pas de ce type. C'est essentiel du point de vue géométrique. Déjà, il n'est pas évident avec cette définition de dire ce qu'est l'aire d'un rectangle de côtés non parallèles aux axes, et pourquoi elle est égale au produit de ses dimensions. De mêmes, quand dans les manuels on calcule l'aire du segment de parabole, on effectue un changement d'axes, qui n'est justifié que si l'on admet l'invariance de l'aire par isométrie. Or ce point n'est pas abordé dans le point de vue fonctionnel (sauf pour les translations horizontales et verticales).

Ce qui précède montre que, si l'on veut vraiment définir les aires planes, on ne peut pas faire l'économie d'une approche du type de celle de [Lebesgue]. Cette définition, quand on a compris les propriétés de l'aire fournies par les axiomes, est tout à fait naturelle. On choisit un repère, qui donne un quadrillage du plan, que l'on raffine ensuite en divisant en 10, 100, 10^n, etc. On sait déjà mesurer les aires délimitées par le quadrillage. Pour les autres

[12] À ce compte là, il faudrait aussi donner une construction de la géométrie élémentaire : à moi les espaces vectoriels et affines des maths modernes !

on compte les carreaux qui sont à l'intérieur d'une partie et ceux qui la rencontrent et on a une mesure intérieure et une mesure extérieure, qui doivent encadrer la mesure cherchée (à cause des axiomes). La définition s'impose alors : il suffit de prendre la limite commune quand n tend vers l'infini (si elle existe). Ce qui est moins évident c'est de montrer que la construction ainsi produite vérifie bien les axiomes voulus (voir [Lebesgue]).

2.2.3 Un troisième argument : la logique

Le programme de 2002 a été écrit par des mathématiciens éminents, mais qui, me semble-t-il, continuent à entretenir des illusions sur les mathématiques. Il reste en filigrane dans leur démarche un peu du "programme de Hilbert" de fonder rigoureusement les mathématiques. Pour eux, donner une définition de la notion d'aire ne signifie pas seulement en donner une définition axiomatique (c'est ce que je propose, avec l'appui de l'intuition), mais nécessite de la construire. Ce souci de construction est d'ailleurs partagé par nombre de collègues, qui ont l'impression qu'ils ont manqué à leur devoir s'ils ont donné aux étudiants une définition axiomatique des réels, mais pas une construction de $\mathbf{R}$ à partir de $\mathbf{Q}$. Je pense, au contraire, qu'on n'a pas mieux compris les réels quand on en a vu une construction par les coupures de Dedekind ou les suites de Cauchy. De plus, je prétends que cela ne peut être, en dernier ressort, qu'une illusion. Bien sûr on peut fonder les aires sur les réels (via les fonctions ou les espaces vectoriels), bien sûr on peut construire les réels sur les rationnels, élaborer ces derniers à partir des entiers, mais là, on doit bien finir par se contenter d'une théorie axiomatique (sauf à faire appel à Dieu, comme Kronecker), soit qu'on s'appuie sur les axiomes de Peano, soit sur la théorie des ensembles[13] de Zermelo-Fraenkel. De plus, on se heurte au théorème d'incomplétude de Gödel : on ne peut prouver la consistance[14] ni de la théorie des ensembles, ni de l'arithmétique de Peano, au moins à l'intérieur

[13]Pour une fois que je suis d'accord avec Dieudonné, je ne résiste pas au plaisir de le citer : *Mais il convient ici comme ailleurs de débarasser l'enseignement de la superstition consistant à vouloir à n'importe quel prix tout rattacher à une source axiomatique unique. Les mathématiciens professionnels ont de bonnes raisons de tenir à ce qu'il en soit ainsi, mais ces raisons ne concernent qu'eux ; ce qui est par contre d'une importance universelle, c'est de savoir faire des déductions logiques correctes à partir de prémisses qui n'ont pas besoin d'être nécessairement sanctifiées par un arbre généalogique remontant à la Théorie des ensembles !*

[14]C'est-à-dire montrer qu'il en existe un modèle ou qu'elle est non contradictoire, ce qui revient au même par un autre théorème de Gödel.

de ces théories. Au bout du compte, la quête du Graal d'une construction inattaquable des mathématiques se révèle assez vaine.

2.2.4 Ce que je propose

Je propose donc d'adosser le programme à une définition axiomatique de l'aire comme application définie sur certaines parties "raisonnables" du plan et vérifiant additivité, invariance par isométrie et homogénéité. Un mathématicien mauvais coucheur[15] peut évidemment m'objecter qu'il faut encore savoir ce qu'on entend par parties "raisonnables". Je répondrai qu'elles contiennent évidemment les polygones, disques, segments de parabole, etc. et, en fait, toutes les parties qu'un élève de terminale pourra être amené à considérer. Si le mauvais coucheur insiste, je le renverrai sans ménagement à un théorème (non trivial) de Banach qui affirme qu'il existe une mesure simplement additive et invariante par isométrie définie sur **toutes** les parties bornées du plan[16] (et qui coïncide avec l'aire sur les parties quarrables). On peut donc sans aucun inconvénient admettre l'existence de l'aire pour les parties usuelles du plan.

Au lycée on se contentera de donner une liste de propriétés naturelles admises dont on déduira les autres. Je propose une telle approche dans [Perrin].

2.3 Les sommes de Riemann comme moyen de calcul ?

Le programme de 2002 donne un exemple en ce sens : *Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable* et les manuels lui emboîtent le pas avec docilité.

Cette proposition, présentée sans discussion[17], me semble une absurdité épistémologique. Ce que propose le programme, et que pratiquaient aussi les livres de l'époque maths modernes, consiste à revenir à la méthode d'exhaustion d'Eudoxe, Euclide et Archimède, méthode qui a mené à ces sommets des mathématiques de l'antiquité que sont le calcul du volume de la pyramide ou la quadrature de la spirale et du segment de parabole, mais qui a été supplantée depuis par le calcul infinitésimal.

[15] J'en connais.

[16] En revanche c'est faux dans l'espace à cause du paradoxe d'Hausdorff-Banach-Tarski.

[17] C'est-à-dire sans annoncer qu'on verra une méthode beaucoup plus efficace pour faire ce calcul avec les primitives.

Je m'explique. Si l'on mène le calcul dans le cadre proposé par le programme, disons pour calculer $\int_0^1 x^2dx$, on obtient l'encadrement :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^3}\leq\int_0^1 x^2dx\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}.$$

Il reste essentiellement à calculer la somme $\sum_{k=1}^n k^2$ qui vaut $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et on obtient bien la limite $1/3$ comme prévu. Je dis que c'est exactement ce que fait Archimède, non pas pour la quadrature de la parabole, pour laquelle il a une autre méthode, plus géométrique[18], mais pour la quadrature de la spirale (voir intermède ci-dessous ou [Rogalski]).

Qu'oublient nos auteurs de programmes ? Qu'entre temps, Newton et Leibniz sont passés par là, avec l'invention du calcul différentiel et intégral et le lien entre primitive et intégrale qui rend trivial ce type de calcul puisqu'il le ramène au calcul de la primitive de x^2. D'ailleurs, ce qui était un sommet des mathématiques de l'antiquité (la quadrature de la parabole) est maintenant un exercice pour élèves de terminale. Le fait essentiel qui explique cela, c'est que le calcul de la primitive d'une fonction continue est bien plus facile que le calcul de la somme finie analogue[19]. On le voit bien sur l'exemple précédent. En effet, le calcul de la somme des carrés n'est pas évident (sauf si on a la réponse d'avance) contrairement à celui de la primitive de x^2. Et ce cas n'est que le plus simple, on pensera au cas de l'intégrale de x^k, de $\sqrt{x}$, de x^α, de $\sin x$, de $\ln(x)$ etc. On verra d'autres exemples ci-dessous avec des calculs de volumes et de moments d'inertie.

Je considère personnellement, et je ne crains pas de le dire avec une certaine emphase, que l'invention du calcul infinitésimal est un des progrès essentiels de l'humanité. Il n'y en a pas tant que ça en mathématiques (on peut citer l'invention de la notation algébrique, celle des décimaux et quelques autres, dont la géométrie analytique de Descartes et le langage ensembliste). D'une certaine façon, ce progrès est devenu tellement banal qu'on a tendance à le minorer (certain(e)s allant jusqu'à clamer : *à bas les tableaux de variation*).

[18]Contrairement à ce que dit Yves Meyer dans un récent numéro de la Gazette des mathématiciens.

[19]Ce phénomène est assez général. Je me souviens qu'on nous avait donné, en taupe, une magnifique preuve de la seconde formule de la moyenne à l'aide de la transformation d'Abel, sans nous dire que, dans la plupart des cas usuels, l'intégration par parties – qui est l'analogue continu d'Abel– fait aussi bien l'affaire.

Il est vrai que dans l'histoire, c'est plutôt l'intégrale qu'on voit apparaître avant la dérivée et je suis d'accord qu'il faut être toujours prudent sur le renversement de l'ordre didactique par rapport à l'ordre historique. Mais, dans ce cas, il y plus d'un siècle qu'on a opéré ce renversement en introduisant la dérivée avant l'intégrale et il est clair que le risque de catastrophe épistémologique est minime. Sur ce point, j'ajouterai qu'il faut bien que l'humanité, si elle veut continuer à progresser malgré l'accumulation des connaissances, trouve de temps à autre des raccourcis par rapport à l'histoire. Il me semble que celui-là en est un (de même que l'introduction précoce des décimaux).

Pour revenir au programme de terminale, je trouve que prôner, dès les premières lignes du programme sur le calcul intégral, un calcul comme celui de l'aire de la parabole par les sommes de Darboux, sans au moins un regard critique, est pour le moins maladroit. Je vois effectivement un intérêt à ce calcul (et je propose de faire cela, voir plus bas), essentiellement historique et épistémologique : c'est justement de servir de repoussoir[20] et de montrer combien l'entrée par les primitives est plus efficace. Je le dis d'autant plus fort que j'ai vu souvent des étudiants de CAPES (donc des futurs profs) proposer ce type d'exercice (trouvé dans un manuel), sans avoir justement ce regard critique.

2.4 Intermède : Archimède et la quadrature de la spirale

2.4.1 La somme des carrés

Pour effectuer la quadrature de la spirale (appellée maintenant spirale d'Archimède), Archimède calcule la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Voilà l'énoncé de la proposition X de son livre *Des spirales* (cf. [Archimède]) :

Si des lignes en nombre quelconque, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, sont disposées les unes à la suite des autres, l'excédent étant d'ailleurs égal à la plus petite ; et si on dispose un même nombre d'autres lignes, dont chacune est aussi grande que la plus grande des premières, les carrés des lignes égales à la plus grande, ajoutés au carré de la plus grande ainsi qu'au rectangle délimité sous la plus petite et sous une ligne égale à la somme de

[20]Le mot est excessif, mais c'est l'idée.

celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, valent le triple des carrés de toutes les lignes se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur.

Il n'est déjà pas si facile de comprendre de quoi il s'agit. En fait, on a une suite, $1, 2, \dots, n$ et on calcule :

$$n \times n^2 + n^2 + (1 + 2 + \cdots + n) = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

qui donne la formule bien connue $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

La preuve est astucieuse et différente de toutes celles que je connaissais. Bien entendu, celle d'Archimède est exprimée uniquement en termes géométriques (voir figures ci-dessous), mais il est sans doute plus commode pour nous de la donner sous forme algébrique. Voilà ce que devient l'argument.

On écrit d'abord, pour $k = 0, 1, \dots, n$: $n^2 = (n-k)^2 + k^2 + 2k(n-k)$. En sommant, on obtient :

$$(n+1)n^2 = 2S_n + 2U_n \quad \text{avec} \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} k(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k).$$

On ajoute à $2U_n$ la somme $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$:

$$2U_n + T_n = 2\sum_{k=0}^{n} k(n-k) + \sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)(n-k).$$

Il reste à montrer l'égalité $S_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)(n-k)$. On peut la voir géométriquement, mais aussi par le calcul. On écrit cette somme :

$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 + 1 \quad (n \text{ fois})$
$3 + 3 + 3 + \cdots + 3 + 3 \quad (n-1 \text{ fois})$
$5 + 5 + 5 + \cdots + 5 \quad (n-2 \text{ fois})$
....
$(2n-3)+(2n-3)$
$(2n-1)$

et on somme en colonnes au lieu de sommer en lignes. Dans la k-ème colonne en partant de la fin on a la somme des k premiers nombres impairs, et il est bien connu[21] qu'elle vaut k^2, de sorte que la somme totale est bien S_n.

[21]Soit par récurrence, soit en voyant un carré comme réunion d'équerres, cf. figure.

2.4.2 Parenthèse

En fait, c'est moi qui suggère la méthode ci-dessus. Archimède ne procède pas tout à fait ainsi. Ce qu'il écrit c'est :

$$n^2 = n + 2(1 + 2 + \cdots + (n-1))$$

(je suppose qu'il voit cela avec la réunion de deux escaliers allant de 1 à $n-1$ et disposés tête-bêche). Il obtient ainsi la suite de relations :
$n^2 = n + 2(1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1))$
$(n-1)^2 = (n-1) + 2(1 + 2 + \cdots + (n-2))$
$(n-2)^2 = (n-2) + 2(1 + 2 + \cdots + (n-3))$
....
$2^2 = 1 + 2(1)$
$1^2 = 1 + 2(0)$
dont il fait la somme en notant qu'il a une fois n, trois fois $n-1$, cinq fois $n-2$, etc. ce qui donne bien $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)(n-k)$.

2.4.3 La spirale

Archimède déduit de la formule précédente l'encadrement : $n^3 \leq 3S_n^2 \leq (n+1)^3$. (Pour la majoration, on applique la formule qui donne S_{n+1} et on note que $1 + 2 + \cdots + (n+1)$ est plus petit que $(n+1)^2$.)

Il utilise cet encadrement pour réaliser la quadrature de la spirale d'équation $\rho = a\theta$. Il montre, en particulier, que l'aire de la partie limitée par la spirale après une révolution ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) est le tiers de l'aire du disque de centre O et de rayon la distance du point extrême ($2\pi a$), soit $\dfrac{4a^2\pi^3}{3}\cdot$ Pour cela il encadre la spirale par des secteurs d'angles $2\pi/n$. Le k-ème (petit) secteur a pour aire $a^2\big(\dfrac{2k\pi}{n}\big)^2\ \dfrac{\pi}{n}\cdot$ La somme des aires de ces secteurs est donc :

$$\frac{4a^2\pi^3}{n^3}\sum_{1}^{n} k^2 = \frac{4a^2\pi^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et on déduit le résultat.

Notons que l'on peut prouver aisément ce résultat avec un raisonnement “à la physicienne”. Pour une variation infinitésimale d'angle $d\theta$, la variation d'aire $d\mathcal{A}$ est l'aire du secteur de rayon $a\theta$ et d'angle $d\theta$ soit $\frac{1}{2}a^2\theta^2 d\theta$. L'aire totale de la spirale après un tour est donc égale à $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}\theta^2 d\theta = \frac{4a^2\pi^3}{3}$.

Pour conclure sur cette incursion dans l'œuvre d'Archimède je citerai [Bourbaki] : *Et ne devons-nous pas conclure que cette œuvre admirable d'où le calcul intégral, de l'aveu de ses créateurs, est tout entier sorti, est en quelque façon à l'opposé du calcul intégral ?*

2.5 Les sommes de Riemann comme moyen d'approximation

Qu'on ne me fasse pas dire ce que je n'ai pas dit. Je ne conteste nullement l'intérêt de l'encadrement d'une intégrale par des rectangles, des trapèzes, etc., bien au contraire, et je suis un partisan résolu de ce genre de méthodes, qui sont fondamentales et qui ont l'avantage d'être très visuelles. Mais, **il n'est nul besoin d'avoir défini l'intégrale avec des sommes de Riemann pour en disposer**, il suffit d'avoir la croissance de l'intégrale[22] (donc l'axiome d'additivité de l'aire). Ce genre de calcul peut avoir deux intérêts majeurs[23] :

• Le calcul approché d'intégrales pour lesquelles on ne connaît pas de primitive. C'est évidemment le cas de $exp(-x^2)$ que les élèves voient dans le cours de probabilités, mais cela peut valoir aussi, en terminale, pour $1/x$ ou $1/(1+x^2)$. En effet, la fonction logarithme est nouvelle et il est intéressant de montrer comment on peut la tabuler, quant à l'Arctangente elle est inconnue au lycée.

• L'utilisation d'intégrales pour obtenir des encadrements de suites, je pense à la série harmonique et à la constante d'Euler, aux séries de Riemann, ou à l'utilisation de l'intégrale pour encadrer $\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n$, menant à un avatar de la formule de Stirling. Dans tous ces cas, on voit en action ce qu'on a dit plus haut : il est bien plus facile de calculer une primitive que la somme d'une série.

[22]Bien entendu, pour avoir facilement un encadrement par la méthode des rectangles (resp. des trapèzes et du point milieu), il vaut mieux que les fonctions soient monotones (resp. concaves ou convexes), mais ces cas suffisent déjà largement au niveau du lycée.

[23]Aucun des deux n'est suggéré dans le programme, preuve que les auteurs, en mettant en avant les sommes de Riemann ne pensaient pas à cet aspect, mais aux deux autres : la construction, la méthode d'exhaustion.

[Précisément, pour Stirling, on encadre $S_n = \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n = \ln n\,!$:

$$\int_1^n \ln t \; dt \leq S_n \leq \int_1^n \ln t \; dt + \ln n$$

Les intégrales se calculent par parties et on obtient :

$$n \ln n - n + 1 \leq S_n \leq n \ln n - n + 1 + \ln n,$$

d'où, en passant à l'exponentielle, l'encadrement $n^n e^{-n} e \leq n! \leq n^n e^{-n} e \; n$, formule qui suffit dans nombre de situations. On obtient facilement un encadrement avec un terme en $\sqrt{n}$ en utilisant les méthodes des trapèzes et du point médian.]

2.6 Les sommes de Riemann et la modélisation

Je m'inspire ici de l'analyse très intéressante de [Rogalski] sur les procédures "intégrale" ou "primitive" et de nombreuses discussions avec des collègues physiciens. Je vais traiter le calcul du moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe, mais les choses sont analogues pour les calculs de volume, de masse, etc. Pour des indications sur le cas général, voir mon intervention à l'Inter-IREM citée au début.

Pour comprendre ces calculs, il convient de rappeler quelques principes concernant les moments d'inertie.

• Pour un point matériel de masse m situé à une distance r d'un axe Δ, le moment d'inertie est $I = mr^2$. Plus généralement, si un solide de masse m est situé à une distance de l'axe comprise entre r et R, on a $mr^2 \leq I \leq mR^2$.

• Le moment d'inertie est additif (le moment d'inertie de la réunion de deux solides disjoints, ou presque disjoints, est la somme des moments d'inertie).

Pour calculer le moment d'inertie d'un solide S, de densité (ou plutôt de masse volumique) μ, par rapport à un axe Δ, voici la procédure que pratiquent les physiciens. On prend un morceau dS de S. Ce morceau est supposé suffisamment petit (voire infinitésimal) pour qu'on puisse considérer :

• que la densité μ est constante sur dS,

• que la distance r à l'axe est constante, elle aussi, sur dS.

Le moment d'inertie de ce morceau de solide, assimilé à un point matériel, est donc $dI = \mu r^2 dV$ où dV est le volume de dS. Puisque le moment d'inertie est additif, on obtient ensuite le moment d'inertie total I en faisant la “somme” des morceaux :

$$I = \int_S dI = \int_S \mu r^2 dV.$$

Comment comprendre cette procédure ? Il est clair que le physicien voit l’intégrale comme une “somme”, d’ailleurs le symbole de l’intégrale (en général ici c’est une intégrale multiple) est une déformation du S de somme. Une question fondamentale est de savoir s’il s’agit d’une somme finie ou d’une somme de quantités infinitésimales à la manière de Cavalieri ou Roberval. Si l’on pousse les physiciens dans leurs retranchements[24], la plupart donneront une justification de cette modélisation qui est de faire un découpage, fini, mais avec des morceaux dont le diamètre tend vers 0 (c’est ce que Marc Rogalski appelle la procédure “intégrale” : découpage, encadrement, sommation, passage à la limite). Le mathématicien, ravi, reconnaît là le point de vue des sommes de Riemann (pour les intégrales multiples).

En fait, dans de nombreux cas, le physicien s’arrange pour ramener son problème, qui est *a priori* à plusieurs variables (autant que la dimension de S) à un problème en **une seule** variable, le plus souvent grâce à des arguments de symétrie. Considérons par exemple le cas du moment d’inertie d’un disque S de masse m et de rayon R par rapport à son axe. Le raisonnement du physicien est le suivant. On considère une petite couronne, située entre les rayons r et $r + dr$, avec dr petit, voire infinitésimal. On évalue le moment d’inertie dI de la couronne, en considérant, comme dr est petit, que ses points sont tous situés à la distance r de l’axe et en assimilant la couronne à un rectangle de longueur $2\pi r$ et de largeur dr. Si μ est la masse surfacique du disque, on a donc $dI = 2\pi\mu r^3 dr$ et $I = \int_S dI = \int_0^R 2\pi\mu r^3 dr$. Bien. Mais, que fait le physicien pour calculer I ? Il calcule une primitive, comme nous autres[25], mais je suspecte que parfois il a oublié pourquoi[26]. Si on lui demande avec insistance la justification de ce calcul il peut indiquer que l’écriture $dI = 2\pi\mu r^3 dr$ montre bien que $2\pi\mu r^3$ est la dérivée $\frac{dI}{dr}$, ce qui justifie qu’on

[24]Si c’est un mathématicien qui leur pose la question, la peur du gendarme fait que les physiciens sont prudents et n’osent pas trop évoquer les infinitésimaux ! Pourtant, c’est sans doute l’analyse non standard qui constituerait le cadre le mieux adapté aux calculs des physiciens, mais discuter de son introduction dans l’enseignement m’entraînerait trop loin et dépasserait d’ailleurs mes compétences.

[25]C’est immédiat, et on trouve $I = mR^2/2$.

[26]Réponse à la question : *ah mais ça, c’est des maths !*

obtienne l'intégrale comme primitive. En général, les physiciens ne vont guère plus loin que ça (en tous cas ceux à qui j'ai eu affaire). En particulier, et c'est le point troublant de cette histoire, ils n'explicitent **jamais** la fonction dont ils calculent la dérivée. Pourtant, ici comme dans la plupart des cas, c'est facile, : il suffit d'introduire la fonction $I(r)$ qui est le moment d'inertie du disque de rayon r (dans le cas général, on introduit la “grandeur jusqu'à x” : l'aire jusqu'à x, le volume, la masse, jusqu'à z, etc.), l'accroissement $dI(r)$ du moment entre r et $r+dr$ est alors $2\pi\mu r^3 dr$, donc la dérivée de $I(r)$ est le rapport $\dfrac{dI(r)}{dr}$, c'est-à-dire $2\pi\mu r^3$ et on en déduit que $I(r)$ est la primitive de cette fonction qui s'annule en 0, c'est-à-dire $\pi\mu r^4/2$ (c'est la procédure primitive au sens de Rogalski).

Cette justification peut être rendue parfaitement correcte[27], à partir des principes rappelés ci-dessus en encadrant la différence $I(r+h) - I(r)$:

$$\mu(2\pi rh + h^2)r^2 \leq I(r+h) - I(r) \leq \mu(2\pi rh + h^2)(r+h)^2$$

et en faisant tendre h vers 0. On constate, avec un brin d'admiration, que le calcul du physicien est parfaitement légitime (il néglige simplement des infiniment petits d'ordre supérieur).

Il est clair que la procédure “primitive” s'applique dans la plupart des cas de calculs de grandeurs physiques usuelles et que c'est une méthode rapide et particulièrement efficace (voir aussi l'exemple de l'aire de la spirale). Tellement efficace qu'il me semble de notre devoir de mathématiciens de faire le lien avec ce qu'apprennent nos élèves en mathématiques.

En fait, et Marc Rogalski le signale très justement, l'utilisation d'une procédure purement intégrale s'impose lorsque le problème à traiter est vraiment de dimension au moins 2 (c'est-à-dire qu'il ne peut se ramener à un problème de dimension 1). Mais il n'y a pas beaucoup d'exemples simples de cette situation hormis certains calculs de centres de gravité et la procédure primitive est tout à fait suffisante au niveau terminale.

3 Une proposition de programme

Je donne ici un aperçu du programme[28] *que j'estime le mieux adapté à*

[27] On peut aussi utiliser des infiniment petits.

[28] Toujours pour les mauvais coucheurs. Ce qui suit n'est pas une rédaction de programme, car j'y fais figurer aussi mes motivations. Une véritable rédaction serait nettement

la classe de terminale S sur ce sujet des intégrales et des primitives. Trois axes le caractérisent : une introduction de l'intégrale par les aires, le lien intégrale-primitive opéré assez tôt, un accent mis sur les calculs approchés.

On commence par rappeler explicitement la notion d'aire, que l'on suppose définie pour les parties bornées usuelles. En particulier on rappelle les propriétés d'additivité (avec une variante forte où l'on permet aux intersections de contenir des segments, voire des courbes) et d'invariance par isométrie. On a le droit de prononcer les mots : découpage et recollement. Si l'on veut, on peut en profiter pour montrer comment on retrouve l'aire du rectangle et du triangle à partir de ces axiomes.

On définit alors, exactement comme dans l'actuel programme, l'intégrale d'une fonction continue positive entre a et b, avec $a < b$, comme l'aire sous la courbe et on se pose la question du calcul des aires et des intégrales.

Je propose de montrer dès cet instant une méthode de calcul **approché** de l'aire par encadrement avec une méthode de type rectangles, dans le cas d'une fonction monotone (par exemple $1/x$). Il est facile, dans ce cas, de montrer qu'on a deux suites adjacentes qui convergent vers l'intégrale. On peut aussi, à ce moment là, en insistant sur le fait qu'on propose cet exemple à titre de repoussoir, faire le calcul **exact** de l'aire sous la parabole avec une méthode du type évoqué plus haut, pour montrer combien les choses étaient difficiles autrefois.

On définit (ou on rappelle car cela a été vu en première) ce qu'est une primitive, et on **démontre** le lien entre aire et primitive pour une fonction continue positive. (Ce que dit le programme me convient, en particulier, il est légitime de se limiter au cas monotone, sinon on doit admettre l'existence des extrema d'une fonction sur un segment.) On en déduit la formule $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$ et on donne des exemples d'applications, notamment la parabole, en montrant que ce qui était le summum des mathématiques de l'antiquité est devenu un calcul trivial.

On montre ensuite l'existence d'une primitive pour une fonction continue quelconque en lui ajoutant une constante pour la rendre positive (on admet qu'elle est minorée).

Cela permet maintenant de définir l'intégrale pour une fonction de signe quelconque et pour $a > b$. Il y a deux voies très proches. Soit on peut dire qu'on généralise ce qu'on a vu pour les fonctions positives en posant

plus concise.

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Soit on introduit des conventions de signes, permettant de définir l'intégrale de $f < 0$ ou l'intégrale de b à a. Une façon intuitive de faire cela est de définir une aire algébrique, positive ou négative suivant le sens (trigonométrique ou non) du contour, pour une partie limitée par une courbe simple fermée[29]. Dans le cas de l'aire sous la courbe, le contour est orienté par le sens de parcours sur l'axe des x où l'on va de a à b. Dans tous les cas ($b < a$, $f < 0$), on constate que la formule avec la primitive est encore valable. On peut d'ailleurs combiner les deux approches, commencer par donner la convention de signe, voir que cela correspond toujours à $F(b) - F(a)$ et donner cette définition. Une autre façon de faire est de regarder les fonctions f^+ et f^- (certains manuels font ça).

On énonce alors les propriétés usuelles de l'intégrale (Chasles, linéarité, positivité, moyenne, intégration par parties, etc.) et **on les prouve**. En effet, l'avantage énorme de cette voie, c'est que toutes ces propriétés sont triviales à prouver en utilisant les primitives. C'était l'intérêt de l'ancien programme et en le négligeant on a jeté le bébé avec l'eau du bain !

On peut alors proposer des applications variées, toujours avec l'idée du lien intégrale-primitive : calculs d'aires, de volumes, de grandeurs physiques, de valeurs moyennes, etc., en utilisant la “procédure primitive”, c'est-à-dire en considérant la fonction auxiliaire : “grandeur jusqu'à x” comme expliqué ci-dessus. Je donne des exemples ci-dessous dans les épreuves sur dossier de CAPES.

On donne aussi des exemples de calcul approché, au moins par la méthode des rectangles, et éventuellement celles des trapèzes et du point médian, avec utilisation intensive de la calculatrice.

4 Références

[Archimède] Archimède, *Œuvres complètes*, traduction de P. Ver Eecke, Librairie A. Blanchard, Paris (1960).

[Bourbaki] Bourbaki Nicolas, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1960.

[Daubelcour1] Daubelcour Jean-Pierre, *Calcul d'aires et calcul intégral en TS : un essai pédagogique*, Repères IREM 31, 1998.

[29] Voir par exemple Hachette TCE 1987.

[Daubelcour2] Daubelcour Jean-Pierre, *Evolution des programmes d'analyse et de géométrie au XX ème siècle en terminale scientifique*, http ://home. nordnet.fr/ rdassonval/textes.html

[Dupuy-Lopez] Dupuy-Touzet Sophie et Lopez Pierre.
Le calcul intégral n'est pas un calcul d'aires ... mais il doit le devenir.
Bull. APMEP numéro 463.

[Perrin] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2005.

[Perrin-IPR] Perrin Daniel, *Aires et volumes : découpage et recollement*, Conférence du 12 mai 206 pour les IPR, disponible à l'adresse suivante : http ://euler.ac-versailles.fr/

[QR] Queysanne Michel et Revuz André, *Mathématique, Terminales CDE, tome II Analyse*, Nathan, 1971.

[Rogalski] Rogalski Marc (et al.) *Carrefours entre Analyse, Algèbre, Géométrie*, Ellipses, 2001.