En mathématiques :

que cherche-t-on ? comment cherche-t-on ?

Daniel PERRIN

Présentation

Bonjour, je m'appelle Daniel Perrin, je suis professeur de mathématiques à l'IUFM de Versailles et à l'université Paris-Sud à Orsay et, comme presque tous les enseignants de l'université, je suis aussi chercheur. Mon objectif, aujourd'hui, à partir des questions que vous m'avez posées, est d'essayer de montrer, d'abord, que les mathématiques sont utiles dans presque toutes les activités humaines, ensuite, qu'il y a beaucoup de problèmes de mathématiques dont on ne connaît pas la solution. C'est à ces problèmes que s'attaquent les chercheurs et j'essaierai de vous montrer comment ils font, en vous faisant jouer le rôle de l'apprenti chercheur. Je vous laisserai d'ailleurs une petite collection de problèmes-défis pour vous exercer. Je répondrai enfin aux questions que vous m'avez posées et que je n'aurai pas abordées auparavant.

1 Les mathématiques c'est utile

1.1 Les mathématiques sont utiles actuellement

Comme tous les collégiens de ce pays, vous apprenez des mathématiques, mais beaucoup d'entre vous se posent la question : mais à quoi ça sert ? La réponse est à la fois facile : les maths ça sert partout, et difficile, car il n'est pas évident de donner des exemples qui se situent à votre niveau. Bien sûr vous savez que la maîtrise des opérations est utile pour faire ses courses, qu'il faut savoir calculer des longueurs ou des aires lorsqu'on bricole et que la connaissance des pourcentages et de la proportionnalité peut servir pour calculer l'impôt qu'on devra payer ou les intérêts d'un prêt bancaire.

Certes, et tout cela utilise des mathématiques, mais, somme toute, assez peu. En fait, des mathématiques beaucoup plus élaborées sont présentes, mais de manière cachée, dans la vie de tous les jours. Lorsque vous regardez les prévisions météo à la télé, elles sont derrière, avec aussi beaucoup de physique et d'informatique, dans les modèles qu'il a fallu mettre en place pour comprendre le comportement de l'atmosphère. L'outil principal dans tout cela, que vous avez déjà rencontré et que vous reverrez abondamment au lycée, est la notion de fonction. Dans beaucoup d'autres domaines, notamment tout ce qui concerne la génétique (par exemple les tests ADN, dont on parle beaucoup dans les affaires policières) interviennent les statistiques. Là encore, il s'agit de quelque chose que vous avez vu et que vous approfondirez au lycée. En fait, dans le moindre des objets que vous manipulez dans la vie courante, il y a des mathématiques. Lorsque, dans un magasin, le lecteur optique n'arrive pas à lire un code-barre et que la caissière doit le taper, les derniers chiffres sont ce qu'on appelle une clé, la machine les trouve à partir des autres par un petit calcul, et cela permet de détecter si la caissière se trompe. C'est aussi le cas pour les numéros de sécurité sociale[1].

1.2 Les mathématiques seront utiles demain : l'exemple des coniques

Même si certaines des mathématiques actuelles semblent être dépourvues d'applications, rien ne dit qu'elles n'en auront pas demain. Voici deux exemples en ce sens. Le premier concerne ce qu'on appelle les coniques. Ce sont des courbes (ellipses, paraboles, hyperboles) que vous avez peut-être déjà vues et que les anciens Grecs étudiaient pour leurs propriétés géométriques. À l'époque, elles n'avaient pas d'applications. Ce n'est qu'au XVII-ième siècle que Kepler s'est aperçu que les trajectoires des planètes étaient justement des ellipses. De nos jours, ces courbes sont utiles dès qu'on envoie un satellite (et vous savez combien c'est important pour le téléphone, la télévision, le GPS, etc.).

1.3 Les mathématiques seront utiles demain : l'exemple des nombres premiers

L'autre exemple concerne l'arithmétique. Si l'on m'avait demandé, dans les années 1970, à quoi servaient les nombres premiers dans la vie courante, j'aurais répondu sans hésiter, à rien, et j'aurais peut-être ajouté comme un de mes collègues, qu'en tout cas ils ne servaient pas à faire la bombe atomique. Trente ans plus tard, je suis bien obligé de reconnaître que j'aurais dit une bêtise, puisque les nombres premiers, avec le code RSA, jouent maintenant un rôle de premier plan dans presque tous les secteurs de la communication, de

[1] Je fais l'expérience : quelqu'un me donne son numéro de sécurité sociale et je lui dis quelle est sa clé.

la finance, etc. et que parmi les plus grand utilisateurs se trouvent justement ... les militaires.

1.3.1 La cryptographie

La cryptographie (du grec crypto, qui veut dire caché et graphie, écrire) est la science des messages secrets. Elle remonte à l'antiquité puisque Jules César l'a employée pour coder ses messages militaires. Il utilisait le système le plus simple, celui des alphabets décalés d'un ou plusieurs crans (où l'on remplace, par exemple, A par B, B par C, etc). Ainsi peut-on penser qu'il envoya au sénat, après sa victoire sur Pharnace, le message un peu prétentieux suivant :

TCLG TGBG TGAG.

Bien entendu des méthodes beaucoup plus sophistiquées ont été inventées depuis. Le plus souvent ces méthodes utilisent le principe suivant. On code les lettres de l'alphabet de A à Z par les nombres de 1 à 26. On traduit le message en chiffres. Par exemple si le message est A L'AIDE il devient 1 12 1 9 4 5. Ensuite il y a plusieurs possibilités. L'une d'elles, consiste à permuter les nombres de 1 à 26 selon une certaine règle. On obtient par exemple ici 25 14 25 17 22 21 avec une règle très simple que je vous laisse deviner. On retraduit alors le message en lettres et on a YNYQVU. Le défaut de ce genre de méthodes c'est qu'elles ne résistent pas au décryptage par analyse de fréquences qui consiste à identifier quelles sont les lettres qui interviennent le plus (voir la nouvelle "le scarabée d'or" d'Edgar Poe). C'est d'ailleurs ainsi, dit-on, que la reine d'Écosse Marie Stuart a péri. En effet, elle était prisonnière de la reine d'Angleterre Elisabeth première et elle communiquait avec ses partisans en envoyant des messages codés. Mais ceux-ci ont été interceptés par les anglais et décodés par cette méthode et la pauvre Marie, convaincue de complot contre la reine, a été décapitée (1587).

Par cette méthode, vous devez réussir à déchiffrer le message ci-dessous :

SALCFCFVHLCNEANVHHPLGNZIPUUANAKNRNHHLBNCFVH
NYOANEGLYHKNZKVSOANHUNARNGNHZLHHNVAHGNZFGNH
HNZANOHUALYZLPHKNHNHMPFYHYFYOMKVHTVLSPNYHN
ONYPAUNKPZPOLOPFYH
en sachant qu'en français les lettres statistiquement les plus fréquentes sont, dans l'ordre, E, puis S et A, puis R, I, N et T, puis U, puis O et L, etc.

Une façon de résister à cette méthode de décryptage consiste à ne plus séparer les lettres, mais attention, pour coder les mots, il ne suffit plus de mettre côte à côte des nombres de 1 à 26 (sinon comment distinguer entre AB

qui fait 12 et L qui fait 12 aussi[2]). L'astuce consiste, pour s'y retrouver dans les paquets, à calculer en base[3] 26. Cela signifie que pour coder le message HELLO, soit 8 5 12 12 15, on calcule :

$$8 \times 26^4 + 5 \times 26^3 + 12 \times 26^2 + 12 \times 26 + 15 = 3752127.$$

À partir de ce nombre, on récupère facilement les chiffres de départ[4]. Par exemple, 15 est le reste dans la division de 3752127 par 26. Saurez-vous retrouver le message encodé par le nombre 802636320 ?

1.3.2 Le code RSA

La méthode RSA dont nous allons parler a été inventée en 1978 par Rivest, Shamir et Adleman.

Je ne peux pas vous en expliquer exactement le principe, mais, si vous allez en terminale S et que vous faites la spécialité maths, vous saurez exactement de quoi il retourne. Cette méthode repose sur les nombres premiers. Vous savez sans doute qu'un nombre premier est un nombre qui n'a pas d'autres diviseurs que lui-même et 1. Dans l'ordre, on trouve successivement $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$, etc. Leur intérêt, c'est que tous les autres entiers s'écrivent comme produits de nombres premiers (c'est presque évident : si n n'est pas premier, il est produit de deux nombres $n = pq$. S'ils sont premiers on a gagné, sinon, on recommence).

Comment fonctionne alors le code RSA ?

Imaginons un espion E (Ernesto), loin de son pays et de son chef C (Carlos). Il doit transmettre des messages secrets à C. Pour cela, il a besoin d'une clé pour coder ses messages. Le chef C calcule deux grands nombres premiers p et q, il calcule ensuite le produit pq et c'est ce nombre qui est la clé de codage et qu'il transmet à E (mais il garde secrets les deux nombres p et q). Attention, de nos jours, avec Internet et tous les satellites qui nous tournent autour, on n'est pas sûr du tout que les ennemis n'écoutent pas les messages transmis. Peu importe, car la clé pq est **publique**. Pour coder le message, E n'a besoin[5] que de la clé pq, en revanche, pour le décoder, le chef C a besoin des deux nombres p et q. Le principe qui fonde le code RSA c'est qu'il est beaucoup plus facile de fabriquer de grands nombres premiers p et q (et de calculer pq) que de faire l'opération inverse qui consiste à décomposer le nombre pq en le produit de ses facteurs premiers.

[2]Exemple en anglais : que signifie 25518, *beer* ou *yeah* ?

[3]En fait, on utilise plutôt, pour transformer lettres et autres caractères en chiffres, le code universel ASCII (ce qui revient à calculer en base 256).

[4]Bien entendu, il faut ensuite modifier le nombre obtenu pour avoir un code solide.

[5]En fait, il a aussi besoin d'un entier d et le codage de x s'obtient en calculant le reste de x^d dans la division par pq.

1.3.3 Trouver de grands nombres premiers

On sait depuis Euclide qu'il y a une infinité de nombres premiers. L'idée, pour avoir un nombre premier plus grand que, disons[6] 1000, est toute simple, on considère le nombre $N = (2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 998 \times 999 \times 1000) + 1$. S'il est premier, il convient évidemment, mais même s'il ne l'est pas, il admet un diviseur premier p et ce diviseur ne peut pas être 2 (car 2 ne divise pas N, à cause du $+1$), ni 3, pour la même raison, ni 5, ni aucun des nombres premiers ≤ 1000.

Même si l'on sait qu'il y a une infinité de nombres premiers et donc des nombres premiers arbitrairement grands, il n'est pas si facile d'en donner explicitement. Pierre de Fermat (1601-1665) avait cru trouver une formule donnant à coup sûr des nombres premiers. Il prétendait que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$ était premier. C'est effectivement le cas pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ qui correspondent respectivement aux nombres premiers $3, 5, 17, 257, 65537$, mais ce n'est pas vrai pour F_5 comme l'a montré Euler.

(On peut faire le calcul à la main jusqu'à 257*. Pour voir que* 65537 *est premier, mais que* $2^{32}+1$, $2^{64}+1$ *et* $2^{128}+1$ *ne le sont pas on peut utiliser la fonction EstPrem de la calculatrice TI Voyage 200 qui répond presque instantanément. La calculatrice factorise facilement* $2^{32}+1$ *et* $2^{64}+1$ *(mais cela prend plus de temps). En revanche, pour le suivant, elle ne donne rien en un quart d'heure*[7]*, mais le logiciel Pari le donne sans peine :*

$$2^{128} + 1 = 59649589127497217 \times 5704689200685129054721.)$$

On notera qu'à l'heure actuelle on ne sait pas exactement lesquels parmi les F_n sont premiers ou non. La réponse est seulement connue pour un nombre fini de n et, sauf pour les 5 premiers, tous les F_n en question sont composés. Cet exemple montre déjà deux choses, d'abord qu'un grand mathématicien peut dire des bêtises, et ensuite qu'il y a des questions, somme toute assez simples, pour lesquelles on n'a pas de réponse. J'y reviens plus loin.

Il y a donc des records du plus grand nombre premier connu qui sont détenus par d'énormes ordinateurs[8] (en général il s'agit de certains nombres

[6] Mais le raisonnement vaut pour un entier n quelconque.

[7] On constate sur cet exemple que la primalité est plus facile que la factorisation !

[8] Ce n'est pas seulement la puissance des ordinateurs qui est en jeu, mais surtout la qualité des algorithmes qu'ils utilisent (donc des mathématiques qui sont derrière). En effet, avec l'algorithme élémentaire qui consiste à essayer les diviseurs possibles jusqu'à $\sqrt{n}$, il faudrait, pour factoriser un nombre de 100 chiffres, à raison de 10 milliards d'opérations par seconde, environ 3×10^{32} années, ce qui est beaucoup plus que l'âge de l'univers, évalué à 15 milliards d'années.

de Mersenne (1588-1648) : $M_n = 2^n - 1$). Le plus ancien record est celui de Cataldi en 1588 avec $M_{19} = 524287$. Il y eut ensuite Lucas (1876) avec M_{127} qui a 39 chiffres. Le record, en 1999, était le nombre de Mersenne $M_{6972593}$ qui a tout de même plus de 2 millions de chiffres[9] ! Je ne vais pas l'écrire[10], mais je peux tout de même dire qu'il commence par 437075 et finit par 193791.

1.3.4 Factoriser des grands nombres ?

Ce qu'il faut comprendre, c'est que les ordres de grandeur des nombres premiers que l'on sait exhiber, d'une part, et des nombres que l'on sait factoriser, d'autre part, ne sont pas du tout les mêmes, comme on l'a déjà senti à propos des nombres de Fermat. Pendant longtemps, factoriser un nombre de l'ordre d'un milliard était considéré comme à peu près impossible. Ainsi Mersenne, en 1643, avait donné à Fermat, comme un défi, de factoriser le nombre 100895598169 et le même défi avait été présenté comme impossible par Stanley Jevons en 1874 avec le nombre 8616460799. Pourtant, aujourd'hui, une calculatrice un peu perfectionnée factorise ces deux nombres sans difficulté.

Cependant, le record absolu de factorisation (en 1999 là encore) est bien loin de celui de primalité, c'est un nombre n de 155 chiffres, produit de deux nombres p et q de 78 chiffres, et encore a-t-il fallu pour cela faire travailler 300 ordinateurs en parallèle pendant 7 mois sur un algorithme très complexe, ce qui représente environ 35 années de temps de calcul pour une machine seule.

Voilà ces nombres :
10941738641570527421809707322040357612003732945
44920599091384213147634998428893478471799725789126
7332497625752899781833797076537244027146743531593354333897 =
1026395928297411057720541965739916759007
165678080380668033419335217907113077779×
1066034883801684548209272203600128786792
07958575989291522270608237193062808643.

On notera tout de même qu'il y a seulement 30 ans, on estimait qu'il faudrait 50 milliards d'années pour factoriser un nombre de 150 chiffres. Les progrès accomplis par les mathématiciens et les ordinateurs sont donc considérables. Bien entendu, cela ne remet pas en cause la fiabilité du code RSA : si on sait factoriser un nombre $n = pq$ de 150 chiffres il suffit de choisir des nombres p et q plus grands. On a vu qu'il y a de la marge puisqu'on sait

[9]Pour les amateurs il y a un prix de 100 000 dollars pour un nombre premier de plus de 10 millions de chiffres.

[10]Il y faudrait un livre de 500 pages !

expliciter des nombres premiers avec des millions de chiffres[11]. Les banques travaillent déjà avec des clés n de l'ordre de 300 chiffres et les militaires avec des clés de 600 chiffres.

Et si un mathématicien améliorait fondamentalement les algorithmes de factorisation et leur permettait de rattraper les tests de primalité ? Alors, pour un temps au moins, il ne serait pas loin d'être le maître du monde[12] !

2 Il y a beaucoup de questions sans réponse en mathématiques

2.1 Introduction

Sans doute serez-vous étonnés de savoir qu'il y a beaucoup de questions sans réponses en mathématiques. Peut-être vous imaginez-vous que vos professeurs connaissent tout en mathématiques ? Au risque de ternir leur image, je dirai que ni eux, ni moi, ni aucun des mathématiciens, même les plus illustres, ni même tous les mathématiciens de la terre mis ensemble ne connaissent toutes les mathématiques. Je dirais même qu'il y a bien plus de choses inconnues que de choses connues. Mais, encore une fois, il n'est pas facile de donner des exemples au niveau du collège, sauf en arithmétique et c'est donc là que je vais prendre la plupart de mes exemples.

On a déjà vu un tel exemple avec les nombres de Fermat : personne, à l'heure actuelle, ne sait s'il y a d'autres nombres de Fermat que les 5 premiers qui sont des nombres premiers (on pense plutôt qu'il n'y en a pas, mais ce n'est qu'une **conjecture**, voilà un mot important).

Il y a comme cela des problèmes qui mettent au défi les mathématiciens, parfois pendant des siècles. Un exemple célèbre est celui des constructions à la règle et au compas, qui nous vient des Grecs, mais n'a été résolu qu'au XIX-ème siècle. Par exemple, vous savez sans doute construire un hexagone régulier, ou un octogone régulier, avec une règle et un compas. Si vous êtes vraiment très savants, vous savez construire un pentagone. Mais, savez-vous construire un heptagone (polygone à 7 côtés) ? Ne cherchez pas trop, on démontre qu'on ne peut pas le faire (au moins de manière exacte, car, de manière approchée c'est facile). D'ailleurs, les nombres (premiers) p pour lesquels on sait construire les polygones réguliers à p côtés sont justement ... les nombres de Fermat : 3, 5, 17, 257, 65537, ...

[11] En fait, au-delà de 2000 chiffres, on ne sait le faire que pour des nombres de forme particulière comme les nombres de Mersenne, qu'on ne peut pas utiliser comme clés RSA.

[12] N'ayez pas trop d'espoir tout de même. On pense qu'il a vraiment une raison profonde qui fait que la factorisation est beaucoup plus difficile que la primalité.

2.2 Quelques problèmes d'arithmétique

2.2.1 Combien de nombres premiers dans une dizaine ?

Si on regarde combien il y a de nombres premiers dans une dizaine, on peut éliminer les multiples de 2 et ceux de 5. Il reste donc à regarder les nombres se terminant par $1, 3, 7, 9$. Il se peut qu'ils soient tous premiers, c'est le cas de $11, 13, 17, 19$, mais c'est rare. Si l'on cherche ensuite, cela n'arrive plus jusqu'à 100 (sont non premiers : 21, 33, 49, 51, 63, 77, 81, 91). En revanche, $101, 103, 107$ et 109 sont tous premiers (il suffit de voir qu'ils ne sont pas multiples de 3 ni de 7). La question est donc : peut-on trouver une infinité de dizaines riches contenant 4 nombres premiers ? La calculatrice (et l'ordinateur) permettent d'explorer le problème, mais pas de le résoudre et, à l'heure actuelle, on ne sait pas s'il y a une infinité de telles dizaines. Pire, on ne sait même pas s'il y a une infinité de nombres premiers jumeaux (c'est-à-dire avec 2 d'écart comme 11 et 13, ou 59 et 61).

Ce dernier problème est assez fascinant, car il date des Grecs, il est très facile à exprimer, mais très difficile, puisque personne n'a su le résoudre encore. Bien entendu, ce problème a été exploré avec l'ordinateur (jusqu'à 10^{15} on a trouvé environ 1177 milliards de paires de jumeaux), mais cela ne permet pas de répondre à la question : les capacités des ordinateurs, même immenses, sont limitées.

Puisqu'on parle de la question de la répartition des nombres premiers, si vous regardez le début des tables vous aurez peut-être l'impression qu'il y a des nombres premiers dans toutes les dizaines. Eh bien, ce n'est pas vrai et il n'y a pas besoin d'aller chercher très loin (il n'y en a pas entre 200 et 210). En fait, même si on prend un nombre même très grand (disons par exemple 1000), on peut toujours trouver 1000 nombres de suite sans aucun nombre premier. Cette affirmation vous paraît ambitieuse ? Elle est pourtant facile à prouver et vous devez pouvoir y arriver. Sur ces deux exemples, on voit combien il peut être délicat de prévoir, face à un problème de mathématiques inconnu, quelle va être sa difficulté.

2.2.2 L'hypothèse de Goldbach

C'est un autre problème célèbre sur les nombres premiers. Il a été posé par Goldbach vers 1725. Il s'agit de montrer que tout nombre pair autre que 2 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers. En effet, si l'on fait l'expérience avec les premiers on y parvient sans peine : $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 5 + 5$, $12 = 7 + 5$, $14 = 7 + 7$, $16 = 13 + 3$, $18 = 13 + 5$, $20 = 13 + 7$, etc. Avec un ordinateur, on peut facilement voir que la conjecture est vraie pour des nombres pairs très grands (jusqu'à 10^{16}), mais elle n'est toujours pas prouvée à l'heure actuelle, bien qu'elle ait fait l'objet de beaucoup de travaux (il y avait un prix d'un million de dollars pour sa solution, mais je crois qu'il fallait répondre avant 2002).

À ce propos du rapport entre mathématiques et informatique, il faut bien comprendre que si les ordinateurs sont un puissant outil, notamment d'exploration, ils ne permettent pas, en général, de prouver les théorèmes, au moins lorsque ceux-ci font appel à des ensembles infinis. Le seul cas où cela est possible c'est le cas où l'on a ramené le problème à l'étude exhaustive d'un certain nombre fini (mais très grand) de cas. Cela est arrivé, vers 1970 avec le problème des quatre couleurs (est-il toujours possible de colorier une carte de géographie avec quatre couleurs sans que deux pays admettant une frontière commune soient coloriés de la même couleur ?).

Il faut d'ailleurs se méfier, car parfois l'ordinateur peut déclarer forfait alors qu'il y a des solutions, mais hors de portée. Voici un exemple que j'emprunte au livre de Jean-Pierre Delahaye (*Merveilleux nombres premiers*, Belin). Il s'agit de nombres "premiers entre eux". On dit que deux nombres p et q sont premiers entre eux s'ils n'ont pas de diviseur commun autre que 1. Par exemple 25 et 12 sont premiers entre eux, mais pas 25 et 15 qui ont en commun le facteur 5. Si, pour un entier n pas trop grand, disons jusqu'à $n = 10$, on regarde les nombres $n^{17} + 9$ et $(n + 1)^{17} + 9$ et si on calcule leur plus grand commun diviseur (avec la calculatrice), on trouve toujours 1, ce qui signifie que ces nombres sont premiers entre eux. Si on continue, en écrivant un programme, jusqu'à 1000 ou 10000, ça marche encore. On peut continuer ainsi jusqu'à 8 millions de milliards de milliards de milliards de milliards de milliards et ça marche toujours. Pourtant, ce n'est pas toujours vrai, on montre que c'est faux pour

$$n = 8\,424\,432\,925\,592\,889\,329\,288\,197\,322\,308\,900\,672\,459\,420\,460\,792\,433,$$

dans ce cas les deux nombres admettent pour facteur commun :

$$r = 8\,936\,582\,237\,915\,716\,659\,950\,962\,253\,358\,945\,635\,793\,453\,256\,935\,559.$$

2.2.3 La suite de Collatz ou de Syracuse

Il s'agit de la suite de nombres fabriqués comme suit. On part d'un entier n, s'il est pair on le divise par 2, s'il est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1, il devient pair et on recommence. L'expérience semble montrer qu'on finit toujours par aboutir à 1. Par exemple, partant de 7, on trouve successivement 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Il est très facile de programmer cette suite sur une calculatrice et on vérifiera que cela semble bien marcher à partir de n'importe quel nombre. Mais, parfois, on peut monter assez haut, par exemple à partir de 27 on va jusqu'à 9232 avant de redescendre. Là encore, personne ne sait prouver que la suite revient toujours à 1.

2.2.4 D'autres questions

Il y a beaucoup de questions ouvertes dans d'autres domaines des mathématiques, dont certains sont liés à des disciplines voisines : informatique, astronomie, économie, etc. Voir là-dessus les sept problèmes du millenium du Clay Mathematics Institute à un million de dollars chacun, à l'adresse suivante : http ://www.claymath.org/millennium/

3 Le chercheur : comment fait-il ?

Nous venons de voir qu'il y avait encore beaucoup de problèmes ouverts en mathématiques (et encore, vous n'en avez vu qu'une infime partie) et il y a, de par le monde, un grand nombre de chercheurs (plus de 100 000 sans doute ?) qui travaillent sur ces problèmes et on dit couramment qu'il s'est produit plus de mathématiques depuis la dernière guerre mondiale que depuis l'origine des temps jusqu'à la dernière guerre[13].

Ce que je voudrais aborder maintenant c'est une description de l'activité d'un chercheur (en tous cas de la mienne, car il m'est difficile de parler au nom de mes collègues). Pour que vous compreniez cette démarche, je vais l'illustrer en regardant avec vous un petit problème sur lequel vous allez exercer vos talents de chercheurs en herbe.

3.1 Le choix d'un thème de recherche

Au départ, le chercheur décide de s'intéresser à une certaine situation, un certain domaine. Ce choix est guidé par des raisons diverses. Pour un jeune chercheur, c'est son directeur de recherche qui lui propose un sujet, pour un chercheur confirmé, ce choix provient de ses lectures, de discussions avec des collègues, de séminaires, de ses réflexions personnelles, etc.

Comme vous êtes de très jeunes chercheurs, c'est moi qui qui vais faire office de patron en vous proposant le problème d'arithmétique suivant :

[13] Pour donner une idée, il y a, à la bibliothèque d'Orsay, plus de 400 revues de mathématiques qui publient chacune plus de 1000 pages de mathématiques nouvelles par an.

Tous les entiers ne sont pas des carrés parfaits, mais tout entier naturel peut-il s'écrire comme différence de deux carrés ?

3.2 Exploration et conjectures

La première phase de la recherche est une phase d'exploration et d'expérience. Sans doute ne rangez-vous pas les mathématiques parmi les sciences expérimentales que sont la physique, la chimie ou la biologie, et il est vrai qu'il y a de nombreuses différences, notamment au niveau de la validation : en mathématiques, c'est la démonstration qui permet de montrer que ce que l'on affirme est juste et non pas l'expérience. Mais pour explorer un problème, l'expérience est essentielle.

L'objectif est de comprendre la situation. Dans cette phase, le chercheur ne sait pas encore ce qu'il va trouver. Chacun a ses recettes pour étudier un problème. Je citerai, pour ma part, trois ingrédients :

- Étudier des exemples, encore des exemples, toujours des exemples.
- Faire des calculs, éventuellement à l'aide d'un ordinateur.
- Reprendre ce qu'on sait sur le sujet, ce qu'on écrit les autres, etc.

Il s'agit ensuite de **formuler** ce qu'on voit. C'est l'un des moments les plus amusants de la recherche, l'un de ceux où l'on peut donner libre cours à son imagination et il ne faut pas craindre de dire des bêtises, voyez ce qu'en dit Alexandre Grothendieck, l'un des plus grands mathématiciens du XX-ème siècle :

Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle ... Souvent la question prend la forme d'une affirmation – une affirmation qui, en vérité est un coup de sonde. ... Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse – encore fallait-il l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ça permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque".

Pour notre petit problème de carrés, la première chose à faire pour pouvoir regarder des exemples est de disposer d'une liste des carrés. Voici les premiers :

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, ...$$

On veut se faire une idée des entiers qui sont différences de deux carrés. On va faire l'expérience, en utilisant la liste ci-dessus. Bien entendu, il vaut mieux faire cela de manière ordonnée et rationnelle. On peut donc faire une première liste en retranchant deux carrés consécutifs, puis deux carrés pris de deux en deux, etc. Voilà ce qu'on obtient :

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23$$

$$4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44$$

$$9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63$$

$$16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80...$$

Que voit-on apparaître dans cette énumération :
• il semble qu'on atteint tous les nombres impairs,
• il semble qu'on atteint aussi tous les multiples de 4,
• en revanche il semble bien que l'on n'atteint pas les multiples de 2 qui ne sont pas multiples de 4.

La conjecture est donc la suivante :

3.1 Conjecture. *Les entiers n qui sont différences de deux carrés d'entiers sont les nombres impairs et les nombres multiples de* 4.

3.3 À l'assaut des conjectures

Une fois repérée une conjecture un peu solide, il faut la prouver, car, en mathématiques, on ne peut se contenter d'une vérification expérimentale, comme on l'a vu ci-dessus avec le problème cité par Jean-Paul Delahaye.

C'est le plus difficile. Parfois, et nous le verrons ci-dessous, l'expérience porte en germe une preuve, mais, le plus souvent, la phase de démonstration est longue, difficile[14], parfois déprimante et souvent elle échoue. Souvent, il faut inventer toute une stratégie pour aborder la preuve, et parfois, il faut créer de toutes pièces de nouveaux outils, de nouvelles théories.

Heureusement, dans le cas des différences de carrés, la preuve n'est pas trop difficile et l'expérience qui a fourni la conjecture 3.1, permet aussi de la démontrer, au moins dès qu'on dispose de l'écriture et du calcul algébrique. En effet, si on compulse la liste, on voit qu'on atteint, par exemple, le nombre 7 comme différence de 16 et de 9 c'est-à-dire $4^2 - 3^2$, puis 9 comme différence de 25 et de 16, soit $5^2 - 4^2$, puis 11 comme différence de $36 = 6^2$ moins $25 = 5^2$. On répète l'expérience autant qu'il faut, jusqu'à ce qu'on soit capable de **formuler** ce qu'on voit, à savoir que les carrés qu'il faut utiliser sont, en quelque sorte, ceux des deux "moitiés" (celle du dessous et celle du dessus)

[14]André Revuz dit qu'un mathématicien passe le plus clair de son temps à sécher.

du nombre impair. Vérifions que c'est bien ça en traitant le cas d'un nombre plus grand, par exemple 123, dont la moitié est $61,5$ et qui, si l'on a bien compris, doit être la différence $62^2 - 61^2 = 3844 - 3721$. On vérifie : c'est bien ça !

Pour prouver le théorème en toute généralité, il faut le faire avec des lettres : un nombre impair c'est un nombre de la forme $2p + 1$. Ses moitiés ? Ce sont $p + 1$ et p. La différence des carrés est alors $(p + 1)^2 - p^2$ que l'on peut calculer soit en utilisant la formule $(p + 1)^2 = p^2 + 2p + 1$ soit en la factorisant : $(p + 1 - p)\,(p + 1 + p)$. Dans les deux cas on trouve bien $2p + 1$. Au passage, vous noterez que pour faire des mathématiques il faut aussi de la technique (ici, connaître les identités remarquables).

Je vous laisse le plaisir de trouver le cas des nombres multiples de 4, puis de comprendre pourquoi ça ne marche pas pour les nombres pairs qui ne sont pas multiples de 4. Vous pourrez aussi chercher des méthodes géométriques pour montrer ces résultats.

Pour en finir avec les différences de carrés, l'expérience montre encore autre chose : certains nombres sont atteints plusieurs fois, par exemple $15 = 64 - 49 = 16 - 1$. Cela pose une nouvelle question : lorsqu'un nombre s'écrit sous la forme $x^2 - y^2$, de combien de façons est-ce posssible ? Je vous laisse y réfléchir, car moi j'ai fait le plus important de mon travail : un mathématicien[15] c'est avant tout quelqu'un qui pose des (bonnes) questions.

3.4 Errare humanum est

Lorsqu'enfin on a écrit une preuve, les choses ne sont peut-être pas encore terminées. En effet, mon expérience, c'est qu'il peut arriver qu'une preuve soit fausse, même si on l'a faite soigneusement, et même parfois si elle a été acceptée par les experts. C'est quelque chose qui m'est arrivé il y a quelques années.

À l'époque, nous travaillions, ma collègue Mireille Martin-Deschamps[16] et moi-même, sur un objet nommé schéma de Hilbert (peu importe ce que cela signifie) qui dépend de deux entiers d et g et qu'on note $H_{d,g}$ et nous avions cru prouver que $H_{d,g}$ n'était **"presque" jamais connexe** (là encore, peu importe ce mot). La démonstration était écrite, contrôlée par un rapporteur, mais heureusement pas encore parue (voir [MDP1] et [MDP2]) ! Pourtant, en étudiant plus à fond un exemple précis, correspondant à de toutes petites

[15] Surtout un patron de thèse !

[16] Bien sûr, il y a aussi des femmes mathématiciennes. J'ai eu beaucoup de très bons élèves (deux d'entre eux ont eu la médaille Fields), mais je dirais que le meilleur de tous était une fille (Claire Voisin, actuellement directrice de recherche au CNRS).

valeurs de d et g, $H_{4,0}$, nous avons montré qu'il était connexe, contrairement à ce que nous pensions. Il nous a fallu quelques jours pour admettre notre erreur et quelque temps encore pour comprendre où était la faute dans la démonstration.

L'intérêt de cette erreur c'est qu'elle était révélatrice d'une conception très fausse sur l'objet en question. La preuve en est que, passant d'un extrême à l'autre, nous pensons maintenant que le schéma de Hilbert est **toujours** connexe[17].

Déceler une erreur dans une démonstration est un des moments les plus difficiles dans la vie d'un chercheur et je n'ai toujours pas acquis le détachement qui serait nécessaire pour vivre ce genre de moment avec sérénité. Avec l'expérience j'ai cependant appris quelques petites choses. En particulier, je relis ce que dit à ce sujet A. Grothendieck :

Mais il arrive aussi que cette image [de la situation] *est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. ... Le travail, parfois laborieux, qui conduit au dépistage d'une telle idée fausse est souvent marqué par une tension croissante au fur et à mesure qu'on approche du nœud de la contradiction, d'abord vague, puis de plus en plus criante jusqu'au moment où elle éclate avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense.*

Et il ajoute plus loin :

La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte.

Tout cela pour dire qu'on ne peut pas faire de la recherche si l'on n'accepte pas de se tromper.

3.4.1 Références

[MDP1] Martin-Deschamps M., Perrin D., *Le schéma de Hilbert des courbes localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais connexe ni réduit*, Rapport de recherche du LMENS, 1995.

[MDP2] Martin-Deschamps M., Perrin D., *Le schéma de Hilbert des courbes localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4ème série, t. 29, 1996, p. 757-785.

3.5 La finition

Une fois le théorème établi, il faut encore le rédiger, puis le publier (dans des revues spécialisées) et enfin, en faire la promotion dans des colloques

[17]Ce revirement a beaucoup amusé mes enfants, à l'époque.

ou des séminaires (un peu comme les acteurs qui font la promotion de leur nouveau film à la radio ou à la télé !).

4 Des problèmes pour réfléchir

Les problèmes sur lesquels je vous propose de réfléchir sont des problèmes qui seront souvent pour vous de véritables problèmes de recherche. Cela signifie qu'il ne faut pas espérer les résoudre en un instant, mais au contraire y revenir encore et encore. On demandait un jour à Isaac Newton comment il avait trouvé la gravitation universelle. Il répondit : *En y pensant toujours.* La première qualité d'un chercheur c'est l'obstination.

Ce que je vous suggère c'est d'aborder ces problèmes avec la méthode que j'ai proposée ci-dessus : exploration, formulation de conjectures, contrôle des conjectures, puis, éventuellement (mais cela ne sera sans doute pas toujours possible), preuve des conjectures.

Je répète qu'il est normal que vous ne sachiez pas d'avance faire ces problèmes, qu'il est normal aussi que vous fassiez des erreurs. Être un chercheur c'est aussi sécher (parfois très longtemps) et se tromper. Une chose importante : la recherche est souvent une affaire d'équipe. Vous aurez donc intérêt à mettre en commun vos trouvailles. Enfin, vous avez aussi le droit de faire appel à vos professeurs.

4.1 Des trous dans les nombres premiers

Il s'agit du problème évoqué plus haut : comment trouver 1000 nombres de suite (ou un million, ou plus ...), sans aucun nombre premier ? (On pourra utiliser les factorielles c'est-à-dire les nombres de la forme $1\times2\times3\times4\times\cdots\times n$.)

4.2 Le plus grand produit

On choisit un nombre entier (par exemple 14, ou 25, etc.). On le décompose en somme de plusieurs entiers, par exemple $14 = 5+9$ ou $14 = 3+7+4$ (et bien d'autres) et on fait le produit de ces nombres, ici $5 \times 9 = 45$, $3 \times 7 \times 4 = 84$, etc. Pour quelle décomposition obtient-on le plus grand produit ? (On cherchera une réponse dans chaque cas, mais on essaiera aussi de donner une règle générale.)

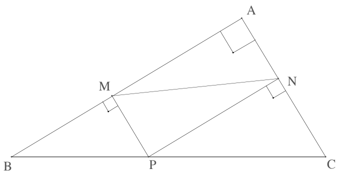
4.3 Les développements décimaux

On considère une fraction $\frac{p}{q}$ et on effectue la division de p par q, en écrivant aussi les chiffres derrière la virgule. On obtient une écriture décimale, en général illimitée. Que peut-on dire de cette écriture et pourquoi ?

Il y a beaucoup d'expériences à faire sur ce problème, à la main et à la calculatrice. On conseille de regarder les cas suivants, avec plusieurs p à chaque fois : $q = 7$, $q = 11$, $q = 13$, $q = 17$, $q = 28$, $q = 37$, etc. On n'oubliera pas qu'il y a une seule chose qu'on sait bien faire avec les écritures décimales, c'est de les multiplier par 10.

4.4 La longueur du segment mobile

On considère un triangle rectangle ABC, un point P de l'hypoténuse et ses projections M, N sur les côtés de l'angle droit. Pour quelle position de P la longueur MN est-elle minimale ? Plus difficile : et si le triangle n'est pas rectangle ?



4.5 La classe

La maîtresse du cours moyen de l'école des Aiguilles à Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne et Garonne) a donné un exercice sur les fractions à ses élèves. Le pourcentage de réussite a été de $47,82\%$ (valeur arrondie par défaut). Sachant que les classes de Saint-Tricotin ont moins de 30 élèves, dire combien la classe comporte d'élèves et combien ont réussi l'exercice.

4.6 Les fractions égyptiennes

Les anciens égyptiens utilisaient des fractions, mais seulement de numérateur 1, c'est-à-dire de la forme $\frac{1}{n}\cdot$ Bien sûr, toute fraction s'écrit comme somme de fractions égyptiennes : il suffit de répéter la même fraction :

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}, \qquad (p \text{ fois})$$

mais comment faire pour écrire n'importe quelle fraction (par exemple $\frac{4}{17}$ ou $\frac{4}{25}$) comme somme de fractions égyptiennes de dénominateurs *tous différents* ?

4.7 Les polyèdres

On appelle f le nombre de faces d'un polyèdre, a son nombre d'arêtes, s son nombre de sommets. En observant plusieurs polyèdres (un cube, une pyramide, un prisme, etc.) vous constaterez qu'il y a une relation entre ces nombres (qu'on appelle la formule d'Euler), laquelle ?

Un polyèdre archimédien est un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers (mais pas nécessairement tous de même type) et qui est tel qu'en chaque sommet aboutissent le même nombre de faces de chaque type, en respectant de plus le même ordre. Le ballon de football, lorsqu'il est fabriqué avec des pentagones et des hexagones, en est un bon exemple[18]. Comment savoir d'avance de combien de faces de chaque sorte on a besoin pour réaliser un polyèdre en sachant seulement ce qui se passe en un sommet, par exemple qu'il y a une alternance triangle, carré, pentagone, triangle ? (Il y a beaucoup d'inconnues, mais il faut essayer de les calculer les unes à partir des autres, et ne pas oublier la formule d'Euler.)

4.8 La voiture et les chèvres

Il s'agit d'un jeu télévisé américain. Dans ce jeu le candidat a devant lui trois portes. Derrière l'une de ces portes il y a une voiture et derrière chacune des autres, une chèvre. Si le candidat désigne la porte derrière laquelle se trouve la voiture, il la gagne. Le jeu se passe ainsi. Le candidat désigne une porte. Le présentateur (qui sait où se trouve la voiture) n'ouvre pas cette porte, mais en ouvre une autre, derrière laquelle se trouve une chèvre. Le candidat a droit à un autre essai dans lequel il peut maintenir son choix initial ou en changer. À votre avis, doit-il le maintenir, en changer, ou est-ce indifférent ?

[18] Si on veut vraiment un polyèdre, avec des faces planes, il ne faut pas trop le gonfler !

5 Réponse aux autres questions des collégiens

Les questions des collégiens[19] apparaissent en caractères romains, mes réponses sont en italiques.

5.1 Question sur les mathématiques

5.1.1 Questions générales

- Pourquoi il n'y a que 9 chiffres ? Pourquoi y a-t-il un zéro qui ne sert à rien ? *Le système de numération que nous utilisons est dit "à base dix" et il consiste à faire des paquets de 10, puis de 100, etc. Le choix de cette base est sans doute lié au fait que nous ayons dix doigts. Une fois choisie la quantité 10 comme contenu d'un paquet, il n'y a plus besoin que des chiffres de 1 à 9 (sauf le zéro, voir plus loin). Il y a d'autres systèmes de numération avec 2 chiffres seulement (0 et 1) utilisés par les ordinateurs, ou avec 12 chiffres, ou avec 256 chiffres (le système ASCII) ou avec ce qu'on veut.*

Le zéro est fondamental pour la numération de position (notre numération habituelle) dans laquelle la place des chiffres est essentielle : ainsi, 12 (une dizaine et deux unités) ce n'est pas pareil que 21 (deux dizaines et une unité). Dans cette numération, si l'on n'a pas de zéro, comment distinguer entre deux unités et deux dizaines (c'est-à-dire vingt) ? comment écrire un nombre comme quatorze millions cinquante-huit (où il n'y a ni centaines, ni milliers, etc.) ? Bien sûr si on a un tableau avec des places fixées pour les unités, les dizaines, les centaines on peut y arriver en laissant des blancs à la place des zéros, mais, sur un papier sans cases, on n'y voit rapidement plus rien. Par exemple : 1   5, *à l'œil, est-ce que c'est mille cinq ou dix-mille cinq (autrement dit, ai-je laissé deux espaces ou trois espaces entre le* 1 *et le* 5*) ?*

- Pourquoi les maths existent ? Qui a inventé les maths ? Comment a-t-il eu cette idée d'inventer les maths ?

- Depuis quand les maths existent-elles ?

Je crois que les maths existent depuis toujours. Depuis la nuit des temps, l'homme a eu besoin de compter. Par exemple, le berger, pour savoir si tous ses moutons étaient rentrés au bercail, les mettait en parallèle avec une collection de cailloux : un caillou, un mouton, un caillou, un mouton, etc. (d'ailleurs, le mot calculus en latin signifie caillou). Dans l'ancienne Egypte, à cause des crues du Nil, il fallait refaire chaque année le partage des champs, et cela a conduit à inventer une façon de mesurer les surfaces, donc à la géométrie. Les anciens astrologues babyloniens, pour comprendre le mouvement des planètes, ont étudié les courbes qu'elles décrivaient, etc. Il n'y a

[19] Je les ai recopiées telles quelles, y compris quand l'orthographe n'était pas parfaite.

évidemment pas un unique inventeur des mathématiques. C'est une création de toute l'humanité. Cependant, pour la naissance des mathématiques comme nous les pratiquons maintenant, ce sont les mathématiciens grecs, dont les noms vous sont familiers : Pythagore, Thalès, Euclide, Archimède, qui ont joué le plus grand rôle.

5.1.2 Utilité sociale

- Est-ce qu'on a toujours besoin des maths ? Est-ce important ? (Autrement dit, quelle est la place des maths dans le quotidien et dans la société ?)

- A quoi ça sert les maths ? A quoi sert votre métier ?

- A quoi ça sert, en fait ? Ca sert à rien à part si on veut faire ce métier ?

- Calculez-vous les astres ? *Moi non, mais d'autres oui, un de mes collègues travaille sur la stabilité du système solaire (la question est, en gros, est-ce que le ciel va nous tomber sur la tête ; rassurez-vous, je crois qu'à court terme il n'y a pas trop de danger).*

- Que peut-on prévoir avec les maths ?(la météo, la naissance des bébés, le futur,..... ?) ?

J'ai répondu à toutes ces questions sur l'utilité des maths au paragraphe 1, en un mot, oui les maths ça sert et ça sert presque partout. Par ailleurs, je suis convaincu que les mathématiques contribuent, pour tous les citoyens, à la construction de la rationalité et à l'apprentissage du raisonnement. Comme le dit Jean-Pierre Kahane : Elles forcent à expliciter les évidences, à décomposer les difficultés, à enchaîner les résultats, à dénombrer tous les cas possibles : elles sont la logique cartésienne en action.

Pour quelles professions, les études mathématiques, au-delà scientifiques, sont-elles nécessaires ?

- Que peut-on faire comme métier avec les maths ?

Beaucoup de choses, et à différents niveaux entre Bac+2 et Bac+8. Je vous renvoie à la brochure de l'ONISEP ("Les métiers des mathématiques") que j'ai apportée. Il y a des professions où les maths sont fondamentales. C'est notamment le cas des ingénieurs, des physiciens, des astronomes, mais aussi des analystes financiers, des informaticiens, de tous ceux qui utilisent les statistiques ou l'imagerie, par exemple les chercheurs et les techniciens en biologie ou en médecine[20]*, etc. Mais il y a aussi beaucoup de métiers où les maths ne sont pas directement utiles dans la pratique du métier, mais où elles servent à faire la sélection pour y parvenir (médecine, écoles de commerce, etc.). Il est donc important de travailler les mathématiques ...*

[20] J'ai oublié ... les professeurs de mathématiques !

- Y a-t-il quelque chose qui puisse faire que les maths soient plus célèbres ?

Bonne et difficile question. C'est vrai que les maths sont mal connues et mal aimées du grand public. En venant parler à des collégiens, j'essaie justement de montrer que faire des maths c'est passionnant.

5.1.3 Les maths, ce n'est pas fini

- Qu'est-ce qui n'a pas été résolu ? Comment les résolue-ton ? Comment créer des formules ?

Voir paragraphes 2 et 3 ci-dessus. Oui il reste beaucoup de choses à faire et sans doute plus que ce qui a déjà été fait.

5.1.4 Programmes, enseignement

Comment s'opère le choix de l'apprentissage des théorèmes ou connaissances selon les niveaux scolaires ?

Il y a des commissions qui fabriquent les programmes et qui réunissent des collègues de divers horizons : profs du secondaire, du supérieur, etc. J'ai participé il y a quelque temps à une commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques qui avait pour but de dire quelles mathématiques on devait enseigner à l'école, au collège et au lycée dans les années à venir.

Il *(le mathématicien)* cherche de nouvelle solutions pour que les maths soient plus faciles. Ca sert à élucider tous les problèmes de mathématiques, bien sûr des choses très compliquées mais aussi à créer des formules pour que nous, les élèves, on puisse s'en servir pour l'apprentissage. *Ça c'est une autre partie des mathématiques, celle qui s'occupe de l'enseignement : c'est ce qu'on appelle la didactique des mathématiques.*

5.2 Questions sur le métier de mathématicien

5.2.1 La vision des élèves

Pour vous, qu'est-ce que le travail d'un mathématicien ? Que fait-il au quotidien ?

- Il cherche de nouvelles façons de calculer. *C'est une des fonctions du chercheur en maths, mais pas la seule.*

- Il cherche les origines des mathématiques. *Non, ça c'est le travail d'un historien des mathématiques.*

- Ca sert à élucider tous les problèmes de mathématiques, ... *C'est ce qu'on voudrait, mais on est loin de savoir les élucider tous.*

- Un mathématicien est un homme très intelligent qui a fait beaucoup d'études, il étudie les maths. *Très intelligent, ce n'est pas sûr. Il faut une certaine forme d'esprit, rationnelle et logique, et surtout, il faut beaucoup de travail, d'obstination et de volonté. Il ne faut avoir peur ni de passer du temps sur un problème, ni de se prendre la tête, comme on dit. Mais il y a des gens intelligents qui sont très mauvais en mathématiques et de très bons mathématiciens dont on peut se demander s'ils sont vraiment si intelligents.*

- Un chercheur en maths c'est un mathématicien. *Certes.* Il participe à des concours de cultures générales (de maths). *Pas du tout.* Il cherche de nouvelles formules de maths. Il étudie les maths, il ne pense qu'aux maths. *C'est à la fois faux, car les mathématiciens sont des hommes ou des femmes comme les autres, qui ont une vie, des enfants, des loisirs, etc. Mais c'est un peu vrai quand même car un mathématicien qui cherche un problème a tendance à y penser sans cesse, y compris dans les endroits les plus farfelus.* Il est très intelligent. *Encore une fois, ce n'est pas si sûr que ça. Il y a aussi des imbéciles parmi les mathématiciens. De plus, on a vu que les mathématiciens aussi peuvent se tromper.*

- C'est une personne qui parle des maths. *Oui, mais qui en fait aussi !*

- C'est un chercheur pour faire avancer la science. *Il essaye ...*

- Il résout des problèmes. *Oui, mais peut-être avant cela, il en pose.*

- Un mathématicien est une personne qui cherche à résoudre de nouvelles choses avec les maths. *Oui, mais peut-être surtout à l'intérieur des maths.*

- Le travail d'un chercheur de maths est de chercher comment résoudre des équations, de trouver des solutions. *C'est une de ses fonctions, mais pas la seule.*

- Un chercheur en maths est un homme qui invente des maths, qui invente des problèmes et qui trouve des solutions. Il résous les problèmes mathématiques des autres personnes. *Voilà une définition à laquelle je souscris presque entièrement. Je dirais peut-être seulement qu'il découvre (plutôt qu'il invente), mais il y a un débat très délicat entre ces deux mots.*

- Un mathématicien cherche des propriétés, des solutions de problème. *Oui.*

- Il cherche de nouvelles propriétés, pourquoi et comment sont des figures. *Oui, mais les figures ne sont qu'un aspect.*

- C'est une personne qui fait des découvertes mathématiques. *Oui, il essaye !*

- Un mathématicien cherche à résoudre des problèmes avec des calculs ou de la géométrie comme quand on est à la caisse, pour calculer et pour ne pas donner d'argent. *Oui, mais le plus souvent les problèmes que traite un mathématicien ne sont pas directement utilisables dans la vie courante.*

5.2.2 Que fait-on

Que fait-on en tant que mathématicien ? En quoi consiste votre métier ? *Voir ci-dessus paragraphe 3.*

Quel est l'intérêt d'être mathématicien ? *Ça dépend pour qui. Pour la société, on a vu que les mathématiques avaient des applications dans de nombreux domaines. Pour le mathématicien lui-même, c'est parce qu'il aime ce qu'il fait : chercher, comprendre, etc. Jean-Pierre Serre, peut-être le plus grand mathématicien du XX-ième siècle, s'étonnait toujours qu'on l'ait payé, aussi longtemps, pour faire une activité qu'il aimait par dessus tout et qu'il aurait volontiers faite gratuitement. Je dirais presque ça aussi (mais il faut bien gagner sa vie, tout de même !)*

5.2.3 La validation

Quand vous avez trouvé un théorème ou fait une découverte mathématique, à qui devez-vous prouvez votre découverte ? Et comment faîtes-vous pour que ce soit accepté et divulgué ? *Très bonne question. On doit soumettre les résultats aux autres mathématiciens par le biais des revues, les expliquer dans des réunions (séminaires, colloques, etc.). Voir ci-dessus paragraphe 3.*

- Est-ce ce que vous faites des contrôles ? *Non !* Est-ce que quelqu'un vous contrôle ? *Oui. Sur les publications, voir ci-dessus. Sinon, toute la carrière, les promotions des enseignants-chercheurs, etc. sont gouvernées par la recherche. Il y a un organisme appelé Conseil National des Universités qui examine les dossiers de chaque enseignant-chercheur et décide de leur carrière.*

5.2.4 La formation

Quelles sont les différentes filières pour devenir mathématicien ? Combien d'année d'études sont nécessaires ? *Pour être chercheur en mathématiques, il faut un bac scientifique, puis licence, master et doctorat, soit en tout 8 ans après le Bac*[21]*. Deux grandes voies : on peut entre à l'université dès le Bac, ou choisir les classes préparatoires aux grandes écoles. Là, l'idéal est de rentrer dans les Écoles Normales Supérieures ou à l'École Polytechnique (ou dans d'autres écoles, mais les écoles d'ingénieurs ne mènent pas directement à la recherche en maths), mais on peut aussi, et ça marche assez bien, revenir à la Fac en 3ème année.*

[21] Mais il y a beaucoup de métiers qui utilisent des maths et où il n'est pas nécessaire d'avoir un doctorat. Souvent un master suffit (5 ans après le Bac), voire moins.

5.2.5 Les questions concrètes

Est-ce que cela rapporte financièrement ? Combien ? *On ne peut pas dire que le métier soit très bien payé. Un enseignant chercheur ou un chercheur débutant gagne environ 1400 euros par mois. Avec un niveau d'études comparable, voire inférieur, un ingénieur débutant gagne plus de 2000 euros par mois. Un professeur d'université en fin de carrière (c'est mon cas) gagne plus de 4000 euros. La question (pour moi en tous cas) c'est l'intérêt qu'on a pour ce métier : ça me semble plus important de faire un métier qui m'intéresse plutôt que de gagner beaucoup d'argent, ne serait-ce que parce que je passe beaucoup de temps à mon travail.*

- Qu'est-ce qu'une médaille Fields ? Combien de temps faut-il pour en obtenir une ? *C'est la plus haute récompense pour un mathématicien, l'équivalent du prix Nobel. Il faut se dépêcher : il y a une limite d'âge à 40 ans. Pas de règle pour l'avoir, sauf être TRÈS fort et résoudre des problèmes que les autres ne savaient pas faire avant vous.*

- Est-ce que vous participez à des concours ? Lesquels ? *Non.*

- Y a-t-il beaucoup de personnes qui font ce travail ? Combien y a-t-il de mathématicien dans le monde ?

Question difficile. En France il y a un peu moins de 400 chercheurs et environ 3500 enseignants-chercheurs en mathématiques, donc en tout environ 4000 mathématiciens. Aux USA il y a 30000 membres de l'AMS (American Mathematical Society). Au monde je dirais (à vue de nez) 100000 mathématiciens ?

- Avec quels matériels les mathématiciens travaillent-ils ? *D'abord avec leur cervelle, un tableau, un papier et un crayon. De plus en plus avec l'ordinateur, ne serait-ce que pour écrire leurs articles, mais aussi pour faire des calculs, des expériences, des figures, des dessins, des simulations, etc. Moi j'utilise aussi beaucoup la calculatrice.*

- Combien d'heures par jour, par semaine, travaillez-vous ? Commment organisez-vous votre temps de travail ? *Je travaille beaucoup. Il ne faut pas oublier que je suis aussi enseignant. J'ai un peu diminué mon rythme depuis quelque temps, mais je travaille encore 50 heures par semaine au moins. Mais, encore une fois, si je travaille beaucoup c'est parce que je le veux bien, que j'aime ça et que ça m'intéresse plus que beaucoup d'autres choses. Sauf pour mes cours, j'organise mon travail exactement comme je le veux.*

5.3 Questions personnelles

5.3.1 Mon choix des mathématiques

Pourquoi aimez-vous les mathématiques ? Est-ce pour vous une sorte de vocation ?

- Pourquoi faites-vous ce métier ?

- Pourquoi faites-vous ce métier ? Qu'apporte-il à votre vie ? Qu'est-ce que vous aimez dans ce métier ?

Question difficile. Au départ je n'avais pas vraiment la vocation. Au collège et au lycée j'étais bon en maths, mais aussi dans les matières littéraires : français, histoire, notamment. Comme je suis issu d'un milieu très modeste (mes parents étaient ouvriers), j'ai suivi un cursus qui n'était pas fait pour mener aux études longues et, en particulier, je n'ai pas fait les études classiques (latin, grec) indispensables à l'époque pour faire des études littéraires supérieures. J'ai donc choisi les sciences par défaut. En terminale, le conseil de mes profs a été de faire une classe préparatoire aux grandes écoles. Comme, ni moi, ni mes parents, ne connaissions rien au système, j'ai suivi le conseil. J'ai été reçu à l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm et à l'Ecole Polytechnique et j'ai choisi un peu par hasard d'entrer à la rue d'Ulm (paradoxalement, c'est plutôt à cause du prestige de l'école littéraire et de tous les grands écrivains qui y étaient passés, mais aussi à cause de la qualité du concours). A Ulm j'ai encore choisi un peu par hasard de faire des maths plutôt que de la physique. Cela étant, en dépit de tous ces hasards, je n'ai jamais regretté aucun de ces choix. Je fais un métier passionnant : j'aime bien les maths et surtout j'aime les enseigner. Ce que j'aime le plus, dans les maths elles-mêmes, c'est le sentiment de **comprendre** *les choses.*

5.3.2 Ma formation

Vous-même, quelle est votre formation ? Quelles études avez-vous suivies ?

Combien de temps êtes-vous resté à l'école ?

- Est-ce qu'il a un bac+5 ?

- Combien de temps ont duré vos études ?

Comme je l'ai dit ci-dessus, bac math-élém + 2 ans de math-sup, math-spé+ 4 ans à l'Ecole Normale Supérieure (rue d'Ulm) + 3 années de thèse + 35 ans de recherche et d'enseignement qui font que je me forme encore et toujours et que j'apprends chaque jour.

5.3.3 Ce que je fais

Quelles sont vos recherches actuelles ? Sur quoi travaillez-vous en ce moment ? *Actuellement, je travaille sur la géométrie projective et les géométries* *non euclidiennes, de drôles de géométries dans lesquelles les droites sont courbes.*

Comment progressez-vous dans votre domaine ? *Bonne question ! En travaillant, en réfléchissant, en essayant, en expérimentant, en lisant, etc. Une chose est sûre, tant que je n'ai pas parfaitement compris quelque chose, je peux le reprendre et le retourner cent fois dans tous les sens, jusqu'à ce que tout me paraisse limpide et évident. Je dirais un peu comme Newton : en y pensant toujours.*

Est-ce que vous avez souvent mal à la tête ? *Non, sauf quand j'ai bu trop de vin !*

- Où travaillez-vous ? *Pour l'essentiel dans mon bureau à Orsay, mais aussi n'importe où, en me rasant le matin, en allant faire des courses, en marchant dans la montagne, et même ... en conduisant ma voiture (mais ce n'est pas très prudent !).*

- Est-ce que votre métier est dur ? *Oui et non. D'abord il y a l'enseignement et ça ce n'est que positif, (sauf peut-être les corrections de copies, demandez à vos professeurs). Ce qui est très difficile dans la recherche, c'est l'incertitude, le fait que l'on n'est jamais sûr d'aboutir. Heureusement, en général, on ne travaille pas tout seul.*

- Faites-vous du calcul mental très rapidement ? *Oui, c'est un de mes dadas, mais ce n'est pas le cas de tous les mathématiciens.*

- Comment arrivez-vous à retenir toutes les propriétés ? Est-ce que vous en avez déjà oublié ? *D'abord, en maths, il y a beaucoup moins de choses à retenir que dans d'autres domaines (par exemple en biologie, en médecine, etc.). Ensuite, j'ai une bonne mémoire. Enfin, bien sûr que j'oublie. Je dirais même que j'oublie tout, sauf ce que j'enseigne et ce qui me sert en recherche. Et encore, ce que je ne pratique pas quotidiennement je l'oublie (mais, s'il s'agit de choses que j'ai vraiment comprises, je les retrouve vite quand j'en ai besoin).*