

Table des matières

1	La problématique	3
1.1	Découpage et recollement : définitions	3
1.2	Mesure des aires et des volumes	5
1.3	Sus aux petits : points, segments, polygones	6
1.4	Deux questions	7
2	Découpage et géométrie	8
2.1	Les trois premiers lemmes du collège	8
2.2	L'aire du rectangle : premier passage à la limite	10
2.3	Triangle, proportions, chevron	11
2.4	Applications	14
3	Justification de la méthode de découpage et recollement : le théorème de Bolyai	15
3.1	Énoncé	15
3.2	Preuve du lemme fondamental	16
3.3	Une variante, ou comment se débarrasser des segments gênants	20
3.4	Quelques exemples	21
4	Le théorème de Banach : existence d'une mesure universelle	21
5	La mesure des volumes, généralités	23
5.1	La théorie d'Euclide	24
5.2	Le calcul intégral	26
6	Découpage des polyèdres : troisième problème de Hilbert et invariant de Dehn	26
6.1	Le problème	26
6.2	L'invariant de Dehn	27
6.3	Quelques conséquences	30
7	Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski	32
8	Retour au plan : la quadrature du cercle	35
9	Annexe : retour sur quelques preuves	36
9.1	Histoires de clans	36
9.2	Le volume du cône	37
9.3	L'invariant de Dehn	38
9.4	Hausdorff-Banach-Tarski	39

Aires et volumes :

découpage et recollement

Daniel PERRIN

1 La problématique

Le but de ce texte est de faire le lien entre les notions de mesure des aires et des volumes et la méthode de découpage et recollement, étudiée dès l'école primaire, de montrer que cette méthode peut jouer un grand rôle dans la pratique de la géométrie, et qu'elle recèle, de plus, nombre de problèmes mathématiques non triviaux. Les plus élémentaires des thèmes abordés ici sont traités dans mon livre [ME] : Mathématiques d'École (Cassini, 2005), auquel je renverrai parfois le lecteur pour plus de détails¹. En particulier je n'aborderai guère ici la discussion sur les liens entre grandeurs et mesures, voir [ME] Annexe du chapitre 4.

On travaille dans l'espace affine \mathbf{R}^d (avec $d = 2$ ou 3 , mais beaucoup de résultats s'étendent au cas de dimension quelconque), muni de sa structure euclidienne canonique (celle pour laquelle la base canonique est ortho-normée).

1.1 Découpage et recollement : définitions

1.1 Définition. Soient A et B deux parties de \mathbf{R}^d . On dit qu'elles sont équivalentes par découpage et recollement (ou par puzzle²) s'il existe une partition de A (resp. de B), $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ (resp. $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$) et, pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, une isométrie g_i de A_i sur B_i . On note alors $A \sim B$.

1.2 Remarques.

1) Autrement dit, on a découpé A en n morceaux A_1, \dots, A_n , on a déplacé ces morceaux et on les a recollés pour reconstituer B , le tout, bien entendu,

¹Parmi les références, je recommande particulièrement le petit livre [Guinot] et le panorama [Laczkovich2] sur les résultats récents.

²On dit encore qu'elles sont **équidécomposables**.

sans perte ni chevauchement, voir ci-dessous fig. 1.

2) Il y a de multiples variantes de cette définition. On peut limiter les opérations g_i permises aux déplacements (ce qui, dans le plan, signifie qu'on n'a pas le droit de "retourner" les pièces et dans l'espace qu'on n'utilise pas la magie), voire aux translations. On peut, plus généralement, imposer aux g_i d'habiter dans un groupe prescrit à l'avance. On peut aussi limiter les parties A, B et leurs morceaux en imposant, par exemple, que ce soient des polygones ou des polyèdres. Dans ce qui suit nous supposons, en tous cas, toutes les parties **bornées**.

3) On verra aussi une notion un peu plus faible qui s'applique notamment aux polygones et aux polyèdres et dans laquelle on tolère que les intersections des pièces soient "petites" (des réunions de segments et de points dans le cas des polygones, de parties planes dans le cas des polyèdres).

4) Il y a une autre notion importante qui est celle **d'équicomplémentarité**. Deux parties A, B sont équicomplémentables³ s'il existe C, D , équidécomposables et disjointes de A et B respectivement, telles que $A \cup C$ et $B \cup D$ soient équidécomposables.

5) Attention, on s'intéresse seulement ici aux découpages **finis**. Bien entendu, quand on travaille avec la mesure de Lebesgue, on sait qu'il faut aussi prendre en compte les découpages dénombrables.

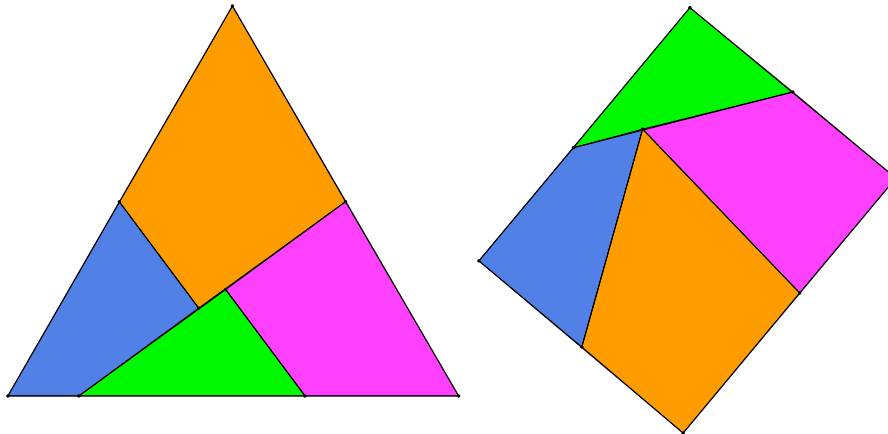


Figure 1

1.3 Proposition. *La relation $A \sim B$ est une relation d'équivalence sur les parties de \mathbf{R}^d .*

Démonstration. Seule la transitivité n'est pas complètement évidente et nécessite de découper les découpages.

³Oui, je sais, ces noms sont horribles!

1.4 Remarque. La même proposition est vraie avec des polygones ou des polyèdres, y compris avec la variante évoquée dans la troisième remarque ci-dessus⁴.

1.2 Mesure des aires et des volumes

1.5 Définition. On appelle mesure des aires si $d = 2$, des volumes si $d = 3$, une application μ non nulle, définie sur une partie \mathcal{Q} de l'ensemble des parties bornées de \mathbf{R}^d , qui vérifie les conditions suivantes :

1) **Additivité simple.** Si on a une partition $E = A \cup B$ avec $E, A, B \in \mathcal{Q}$, on a $\mu(E) = \mu(A) + \mu(B)$.

2) **Invariance par isométrie.** Si A est dans \mathcal{Q} et si g est une isométrie, alors $g(A)$ est dans \mathcal{Q} et on a $\mu(g(A)) = \mu(A)$.

Il revient au même de dire que μ est invariante par découpage et recollement (avec des morceaux dans \mathcal{Q}).

1.6 Remarques.

1) Dans ce qui précède nous avons laissé la famille \mathcal{Q} dans le vague. Il est clair qu'on attend de \mathcal{Q} qu'elle contienne les parties "usuelles" : dans le plan les polygones, les disques, dans l'espace les polyèdres, les boules, etc.

2) En tous cas, pour pouvoir effectuer sans encombre les opérations ensemblistes⁵, on demande que la partie \mathcal{Q} soit un **clan**, c'est-à-dire qu'elle soit stable par union finie et différence⁶ (et donc par intersection). **Nous supposons cela désormais.**

3) Maintenant qu'on est tranquille sur la nature de \mathcal{Q} , on peut énoncer une propriété plus générale pour $A, B \in \mathcal{Q}$: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

4) Il est clair que si μ est une mesure et λ un réel > 0 , $\lambda\mu$ est encore une mesure. Pour éviter de traîner des tas de mesures proportionnelles⁷, on fixe en général une unité, par exemple en imposant $\mu(C) = 1$ où C est le carré ou le cube bâti sur la base canonique. **Nous ferons cela désormais.** On montre alors (c'est la théorie de Riemann) qu'on peut définir la mesure sur les polygones ou polyèdres (et sur bien d'autres parties, dites quarrables ou Riemann-intégrables) et que là-dessus, elle est unique. Cependant, cette

⁴Plus généralement le résultat vaut dès qu'on a des hypothèses de stabilité par intersection et par isométrie

⁵Pour voir à quels dangers on s'expose sinon, voir Annexe 9.1.1.

⁶J'utilise ce mot au sens de Bourbaki, *Intégration*, Ch. 4. D'autres auteurs appellent clan un ensemble stable par union finie et passage au complémentaire.

⁷Une autre solution, sans doute préférable du point de vue didactique, est d'introduire la **grandeur** aire ou volume, voir [ME] Annexe du chapitre 4.

définition requiert des méthodes d'analyse (on utilise les encadrements des ensembles par les carrés ou des cubes de quadrillages, voir [Lebesgue] ou [ME]).

5) On peut imposer encore une autre condition sur μ , celle d'être **homogène**, c'est-à-dire de vérifier $\mu(h(A)) = |\lambda|^d \mu(A)$ si h est une homothétie de rapport λ , mais il est prudent de s'en passer pour l'instant. Nous reviendrons sur cette condition plus loin.

6) Il y a aussi, bien entendu, une notion de mesure dénombrablement additive (ou σ -additive) qui est invariante par découpage dénombrable. C'est le cas de la mesure de Lebesgue. Nous n'utiliserons pas cette notion ici.

1.7 Remarque. Pour montrer que deux parties A, B ont même aire ou même volume, il suffit de prouver qu'elles sont équidécomposables en vertu des axiomes. Cependant, il est souvent plus simple d'établir qu'elles sont équicomplémentables au sens de 1.2.4. Attention, il y a plusieurs subtilités ici. D'abord, mon expérience d'enseignant m'a montré qu'il est toujours plus facile de voir une partie comme somme plutôt que comme différence. Ensuite, il y a une difficulté mathématique. En effet, il est clair que deux parties équidécomposables sont équicomplémentables, mais la réciproque n'est vraie que si l'on dispose de l'axiome d'Archimède, cf. 3.6. Dans le traitement moderne de la théorie, la difficulté est masquée par l'usage de la mesure qui renferme dès le départ les nombres réels, que l'on suppose généralement archimédiens. On notera que pour pouvoir utiliser cette technique de soustraction, Euclide prend la précaution de mettre dans les axiomes le suivant (Livre I, axiome 3) : *Si des égaux sont soustraits d'égaux, les restes sont égaux*. Cette formulation un peu vague s'applique à des grandeurs dont Euclide ne précise pas si ce sont des longueurs, ou des aires, etc.

1.3 Sus aux petits : points, segments, polygones

Dans ce paragraphe, on montre qu'on peut négliger les parties trop petites.

1.8 Proposition.

1) On suppose $d = 2$. Supposons que les points et les segments soient⁸ dans \mathcal{Q} . Alors, ils sont de mesure nulle.

2) On suppose $d = 3$. On a une assertion analogue pour les points, segments et polygones plans.

⁸S'ils n'y sont pas, on peut toujours les y ajouter, voir annexe 9.1.2.

1.9 Corollaire. *Dans le plan, la propriété d'additivité vaut encore si l'on suppose que $A \cap B$ est une réunion finie de points et de segments. On parle alors de parties **presque disjointes**. On a une assertion analogue dans l'espace avec les réunions finies de polygones plans.*

Démonstration. (de 1.8) On note que les points sont tous de même mesure en vertu de l'invariance par isométrie. Supposons cette mesure ϵ positive. Comme on peut mettre autant de points qu'on veut, disons n , dans le carré unité, la mesure de celui-ci serait $\geq n\epsilon$ pour tout n et c'est absurde.

Pour les segments l'argument est identique avec des segments de longueur $l < 1$ car on peut les empiler (de manière disjointe) dans le carré unité. Quant aux segments plus longs, on les coupe sans pitié.

1.4 Deux questions

Les deux questions suivantes vont nous servir de fil conducteur dans une bonne partie de ce texte. Je leur donne un nom pour la commodité, mais il n'est sans doute pas très orthodoxe. La première question porte sur le domaine de définition de la mesure et elle semble bien optimiste :

1.10 Question. (Problème de Banach) *L'ensemble \mathcal{Q} des parties que l'on peut mesurer peut-il être l'ensemble de **toutes** les parties bornées de \mathbf{R}^d (on dit alors que μ est une mesure **universelle**) ?*

Nous verrons que la réponse n'est pas la même selon que d vaut 2 ou 3.

La seconde question concerne le lien découpage-mesure :

1.11 Question. (Problème de Bolyai-Hilbert-Tarski) *Par définition de la mesure, deux parties bornées équivalentes par découpage et recollement ont même aire ou même volume. La réciproque est-elle vraie ? Est-elle vraie au moins pour certaines parties particulières (les polygones ou les polyèdres, par exemple) ? Autrement dit, si deux parties ont même aire (resp. même volume), peut-on produire un puzzle pour passer de l'une à l'autre ?*

Nous verrons que cette question admet à la fois des réponses triviales et d'autres qui ne le sont pas. En ce qui concerne les appellations, la question traitée par Bolyai (1830) concerne le découpage des polygones, celle posée par Hilbert (1900) est la question analogue pour les polyèdres, enfin, la question de Tarski (vers 1925) concerne la possibilité de passer d'une partie à une autre de même aire, par exemple d'un disque à un carré (une variante de la quadrature du cercle, en quelque sorte). Une remarque s'impose : la question de Tarski n'est pas pertinente sans restriction. En effet, un point et un segment sont tous deux d'aire nulle mais pas équivalents (car le découpage et recollement respecte le cardinal).

2 Découpage et géométrie

La méthode de découpage et recollement présente, du point de vue didactique, de multiples intérêts. D'abord, c'est sans doute la façon la plus naturelle de comprendre les notions d'aire et de volume, et c'est ce qu'on fait à l'école primaire. Mais ensuite, au moins en géométrie plane, c'est un outil exceptionnel pour prouver de très nombreuses assertions de géométrie affine⁹, et je pense que cet outil, par son caractère visuel, est tout à fait adapté à l'enseignement au collège. C'est un point de vue que je défends depuis déjà quelque temps (et au moins depuis la parution du rapport Kahane), cf. [Kahane] et [Perrin1].

2.1 Les trois premiers lemmes du collège

Voilà les trois premiers résultats de ce point de vue. En vérité, rien de nouveau dans tout cela : ces résultats sont essentiellement dans [Euclide] (Livre I prop. 34 et prop. 37 pour les deux premiers). On notera simplement que ce sont là de purs résultats de découpage : on n'utilise pas la formule $base \times hauteur/2$ qui n'a pas encore été établie¹⁰. Dans ce qui suit on note $\mathcal{A}(X)$ l'aire d'une partie X .

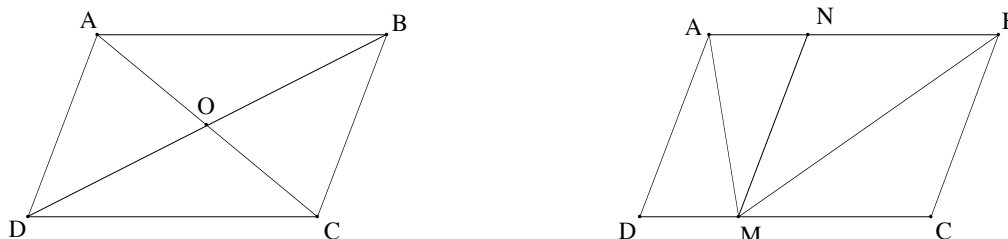


Figure 2

2.1 Lemme. (Lemme du demi-parallélogramme) *Soit $ABCD$ un parallélogramme. La diagonale partage $ABCD$ en deux triangles de même aire.*

Démonstration. C'est clair par symétrie centrale ou par les propriétés angulaires et les cas d'égalité, selon les prérequis géométriques en vigueur, voir fig.2.

⁹La théorie des invariants montre que toutes peuvent se prouver en utilisant les aires.

¹⁰D'ailleurs, Euclide ne parle **jamais** d'aires et moins encore de mesure des aires. C'est le contexte seul qui indique si les égalités qu'il écrit sont des égalités de longueurs ou d'aires, avec la difficulté supplémentaire que l'égalité des triangles peut être comprise comme l'égalité de leurs aires ou comme le fait qu'ils sont isométriques. Certains traducteurs ont tourné cette difficulté en notant avec des parenthèses l'aire : (ABC) .

Un corollaire de ce lemme est le suivant :

2.2 Lemme. Soit $ABCD$ un parallélogramme et soit M un point de $[DC]$. Alors, l'aire du triangle AMD est la moitié de celle du parallélogramme.

Démonstration. Il suffit de tracer la parallèle à (AD) passant par M et d'appliquer deux fois 2.1 aux deux parallélogrammes obtenus, voir fig.2.

2.3 Lemme. (Lemme de la médiane) Soit ABC un triangle et soit A' le milieu de $[BC]$. On a $\mathcal{A}(ABA') = \mathcal{A}(AA'C)$ (la médiane AA' partage le triangle en deux triangles de même aire).

Démonstration.

On mène les parallèles à (BC) et (AA') passant respectivement par A et C . Elles se coupent en D . Les parallélogrammes $ABA'D$ et $AA'CD$ ont même aire (le double de $\mathcal{A}(AA'D)$), donc les triangles ABA' et $AA'C$ aussi par 2.1.

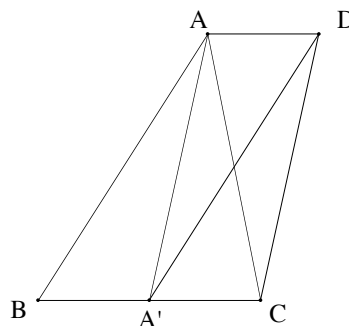


Figure 3

2.4 Lemme. (Lemme du trapèze) Soient ABC et DBC deux triangles de même base $[BC]$ dont les sommets A et D sont sur une parallèle à (BC) (de sorte que l'un des polygones $ABCD$ ou $ADBC$ est convexe, donc un trapèze). Alors les deux triangles ont même aire¹¹.

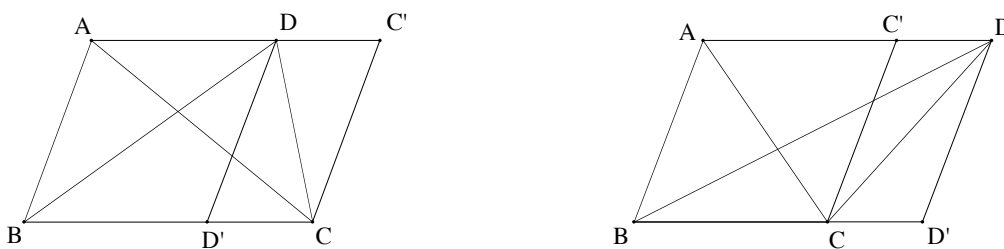


Figure 4

Démonstration. On peut supposer par exemple que $ABCD$ est convexe. Menons par C et D les parallèles à (AB) qui recoupent respectivement (AD) et (BC) en C' et D' . Il y a deux cas de figures. Supposons par exemple que D est dans le segment $[AC']$. Les aires des triangles ABC et DBC sont toutes

¹¹Euclide, Livre I, proposition 37, dit sans vergogne que les triangles sont égaux.

deux égales à la moitié de l'aire du parallélogramme $ABCC'$ (cf. 2.2), donc sont égales.

Sinon, c'est C qui est dans $[BD']$ et on conclut en notant qu'on a $\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(CDD') = \mathcal{A}(BCD) + \mathcal{A}(CDD') = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABD'D)$.

2.5 Remarque. Si l'on examine à la loupe toutes les propriétés ci-dessus, on voit que, sauf pour le deuxième cas du lemme du trapèze, tous les lemmes peuvent être prouvés sans recours ni à l'axiome d'Archimède, ni à la complémentation. C'est clair pour le lemme du demi-parallélogramme, mais aussi pour son corollaire (non énoncé ici) qui consiste à prendre deux moitiés de parallélogramme limitées par deux diagonales différentes, disons ABC et ABD , car on utilise les découpages en $ABO \cup OBC$ et $ABO \cup OAD$ où O désigne le centre du parallélogramme. Le cas de 2.2 est un peu moins évident. On peut, par exemple, découper AMB pour obtenir le parallélogramme $KLCD$ où K et L sont les milieux de $[AD]$ et $[BC]$.

Le lemme de la médiane en résulte et on obtient facilement un découpage¹² en considérant les milieux B' et C' de $[AC]$ et $[AB]$ respectivement et en découpant le triangle ABA' en $AC'A'$ et $BC'A'$ et le triangle ACA' en $AB'A'$ et $CA'B'$.

Le premier cas de figure du lemme du trapèze se déduit de 2.1 et 2.2. En revanche, pour le deuxième cas, on a besoin de la complémentation ou d'Archimède, cf. 3.6.

2.2 L'aire du rectangle : premier passage à la limite

Contrairement à ce que laisse supposer le fait que ce résultat soit connu dès l'école primaire, la formule qui donne l'aire du rectangle, avec comme unité d'aire le carré de côté unité, n'est pas triviale si les côtés ne sont pas rationnels et c'est le premier endroit où le découpage et recollement ne suffit pas à lui seul : il faut, en plus, un passage à la limite, constitutif des nombres réels.

2.6 Proposition. *Soit $ABCD$ un rectangle. On a $\mu(ABCD) = AB \times AC$ où AB et AC désignent les mesures des longueurs des segments $[AB]$ et $[AC]$.*

¹²Mais, comme on y utilise le théorème de la droite des milieux, que l'on a bien envie de prouver avec le lemme de la médiane à la manière de Thalès, cf. ci-dessous, il est prudent de conserver l'autre méthode. En fait, la question non triviale est la suivante : les deux triangles limités par la médiane sont-ils équidécomposables, même sur un corps non archimédien. La réponse est oui. Il suffit de démontrer le lemme de la droite des milieux sans utiliser Archimède et de faire ensuite le découpage ci-dessus, voir [Perrin3].

Démonstration. Il suffit de montrer cette formule pour un rectangle posé sur les axes, c'est-à-dire de sommets $O = (0,0)$, $A = (a,0)$, $C = (a,b)$ et $B = (0,b)$.

Dans le cas où les nombres réels a et b sont des rationnels, le résultat provient du découpage et recollement. En effet, on peut écrire $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{r}{s}$ et réduire au même dénominateur : $a = \frac{ps}{qs}$ et $b = \frac{qr}{qs}$. On considère alors le carré K de côté $\frac{1}{qs}$. Comme on peut découper le carré unité en $(qs)^2$ petits carrés isométriques à K , c'est que K est d'aire $\frac{1}{(qs)^2}$. Mais, le rectangle R , lui, est réunion presque disjointe de $ps \times qr$ carrés isométriques à K . On a donc $\mu(R) = \frac{psqr}{(qs)^2} = \frac{pr}{qs} = ab$.

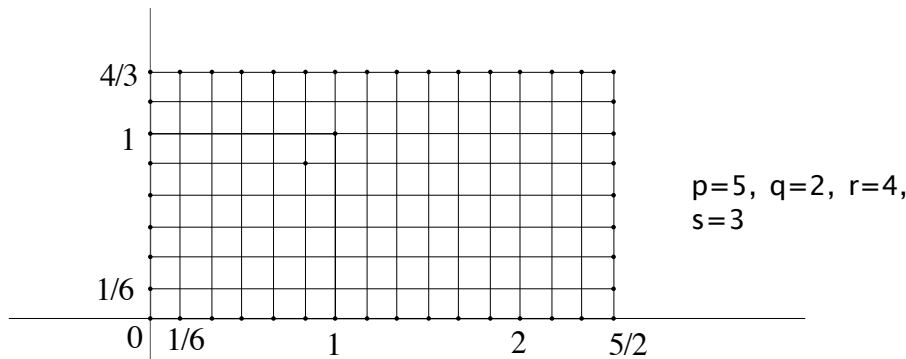


Figure 5

Le cas où a et b sont réels se déduit du précédent par passage à la limite en utilisant par exemple les valeurs décimales approchées à 10^{-n} près de a et b , cf. [ME].

2.7 Remarque. Le résultat précédent permet d'oublier les mesures et de ne plus parler que de grandeurs (ici, longueurs et aires). En effet, il est maintenant naturel de définir le produit ab de deux longueurs comme l'aire d'un rectangle (quelconque) dont les côtés ont pour longueurs a et b . On peut donc écrire $\mathcal{A}(R) = ab$ où a et b sont des longueurs et non plus des nombres.

2.3 Triangle, proportions, chevron

2.8 Proposition. Soit $T = ABC$ un triangle et AH la hauteur issue de A . On a $\mathcal{A}(T) = \frac{1}{2}BC \times AH$ (base multipliée par hauteur et divisée par 2).

Démonstration. On distingue deux cas.

a) Supposons $H \in [BC]$. On mène les perpendiculaires à (BC) en B et C . Ces droites coupent la parallèle à (BC) passant par A en B' et C' respectivement. Le quadrilatère $BCC'B'$ est un parallélogramme qui a un angle droit, c'est donc un rectangle. L'aire de ABC est la moitié de celle du rectangle en vertu de 2.2, or celle-ci vaut $BC \times BB' = BC \times AH$, d'où le résultat.

b) Supposons $H \notin [BC]$. Menons par A la parallèle à (BC) et choisissons un point A' de cette parallèle qui se projette orthogonalement en $H' \in [BC]$. En vertu du premier cas, l'aire de $A'BC$ vaut $(1/2) A'H' \times BC = (1/2) AH \times BC$ et c'est aussi l'aire de ABC en vertu du lemme du trapèze.

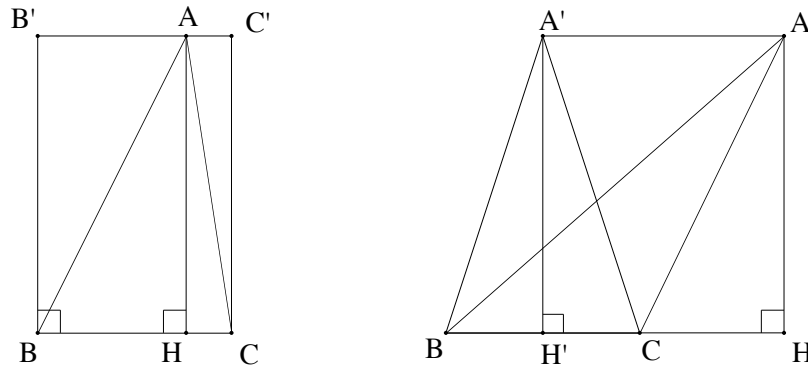


Figure 6

2.9 Corollaire. (Lemme des proportions) Soient ABC et $AB'C'$ deux triangles ayant en commun le sommet A et dont les côtés $[BC]$ et $[B'C']$ sont portés par la même droite. Le rapport des aires $\mathcal{A}(ABC)$ et $\mathcal{A}(AB'C')$ est égal au rapport des longueurs BC et $B'C'$.

Démonstration. En effet, la hauteur AH est la même pour les deux triangles.

2.10 Remarque. Ce résultat est la proposition 1 du Livre VI d'Euclide, qui le démontre par la méthode d'exhaustion. Je résume en cette méthode en quelques mots, elle n'est pas fondamentalement différente de ce que nous avons fait pour le calcul de l'aire du rectangle. On montre d'abord, par complémentation, que si on a $BC = B'C'$, on a $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(AB'C')$ (on peut introduire, par exemple, sur la parallèle à (BC) passant par A , le point A' tel que $AA' = BC$ et utiliser le lemme du trapèze). On en déduit, que si BC est plus petit que $B'C'$, on a $\mathcal{A}(ABC) < \mathcal{A}(AB'C')$ en reportant le segment $[BC]$ dans $[B'C']$ et en utilisant l'axiome de croissance (ou d'additivité) des aires, *le tout est plus grand que la partie*, comme dit Euclide. On a le

même résultat avec “plus grand”. Le point crucial, ensuite, est de noter que si on reporte p fois $[BC]$ (resp. q fois $[B'C']$), l’aire de ABC (resp. $AB'C'$) est multipliée par p (resp. q) (c’est l’axiome d’additivité). Avec la remarque sur l’ordre, on en déduit que l’inégalité $pBC < qB'C'$ est équivalente à $p\mathcal{A}(ABC) < q\mathcal{A}(AB'C')$ et cela, pour nous comme pour Euclide, c’est exactement l’égalité des rapports $\frac{BC}{B'C'} = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(AB'C')}$. (Dans notre langage, ce sont deux réels r, r' qui sont tels que les rationnels qui les précèdent sont les mêmes, donc ils sont égaux ; pour Euclide c’est une définition¹³, voir Livre V définition 5.)

Le lemme suivant, qui, à ma connaissance, n’est pas dans Euclide, est pourtant souvent précieux :

2.11 Corollaire. (Lemme du chevron) *Soit ABC un triangle et M un point du plan, distinct de A . On suppose que la droite (AM) coupe (BC) en A' . Alors on a :*

$$\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)} = \frac{A'B}{A'C}.$$

Démonstration. Il y a plusieurs cas de figure. Traitons le cas où M est à l’intérieur du triangle (c’est celui qui justifie l’appellation de ce lemme). Posons $r = \frac{A'B}{A'C}$. On a, par le lemme des proportions appliqué aux triangles de bases portées par (BC) et de sommets A et M , $\mathcal{A}(AA'B) = r \times \mathcal{A}(AA'C)$ et $\mathcal{A}(MA'B) = r \times \mathcal{A}(MA'C)$. Il en résulte qu’on a $\mathcal{A}(AMB) = \mathcal{A}(AA'B) - \mathcal{A}(MA'B) = r \times (\mathcal{A}(AA'C) - \mathcal{A}(MA'C)) = r \times \mathcal{A}(AMC)$.

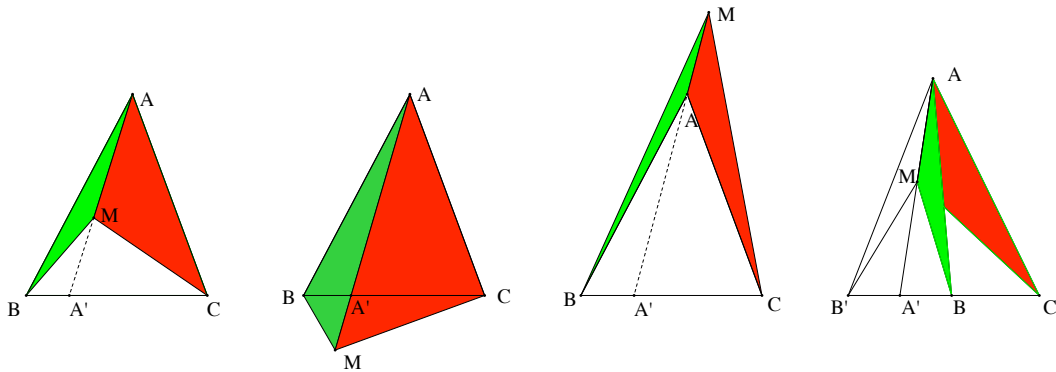


Figure 7

¹³De quatre grandeurs A, B, C, D , la première est à la deuxième comme la troisième est à la quatrième quand n’importe quel équimultiple de la première et de la troisième est, en même temps, inférieur, supérieur ou égal à n’importe quel équimultiple de la deuxième et de la quatrième. Autrement dit, la relation $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ est équivalente à $pA \leq qB \iff pC \leq qD$ pour tous $p, q \in \mathbf{N}^*$.

2.4 Applications

2.4.1 Thalès

Les lemmes de découpage 2.1, 2.3, 2.4, le lemme des proportions 2.9, le lemme du chevron 2.11 permettent de prouver nombre de résultats de géométrie affine du plan (Ménélaüs, Gergonne, etc.). Voici comment Euclide utilise ces résultats pour établir Thalès (Livre VI, Prop. 2) :

2.12 Théorème. (Thalès) Soit ABC un triangle. Soient $B' \in [AB]$ et $C' \in [AC]$. On suppose $(B'C')$ parallèle à (BC) . On a les égalités : $\frac{BB'}{BA} = \frac{CC'}{CA}$ et $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

Démonstration.

En effet, on a $\mathcal{A}(BCC') = \mathcal{A}(BCB')$ par le lemme du trapèze et donc $\frac{CC'}{CA} = \frac{\mathcal{A}(BCC')}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{\mathcal{A}(BCB')}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{BB'}{BA}$ par le lemme des proportions. Cela donne la première formule et la première égalité de la seconde, en vertu des relations $\frac{AB'}{AB} + \frac{B'B}{AB} = 1$ et $\frac{AC'}{AC} + \frac{C'C}{AC} = 1$.

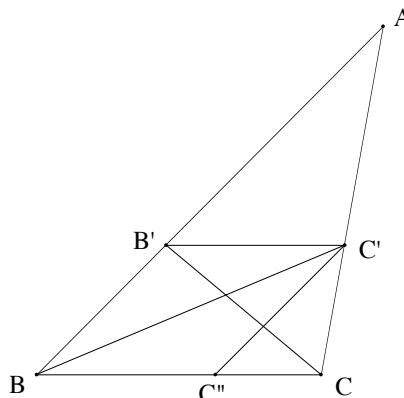


Figure 8

Pour la dernière égalité on trace la parallèle à (AB) passant par C' . Elle coupe (BC) en C'' et on applique Thalès dans le triangle ABC avec la sécante $(C'C'')$.

2.4.2 Médiannes, Céva, Ménélaus, etc.

Le lemme du chevron donne aussitôt le concours des médianes d'un triangle (si deux chevrons limités par les médianes ont même aire, le troisième aussi), voir [Perrin1] ou [Perrin2]. La même méthode vaut aussi pour les théorèmes de Céva et de Gergonne, voir [ME] ou [Laur].

Une application un peu plus délicate est le célèbre théorème de Ménélaus.

2.13 Théorème. Soit ABC un triangle. Une droite Δ coupe respectivement (BC) , (CA) , (AB) en A' , B' , C' . Alors on a $\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$.

On interprète les rapports de longueur comme des rapports d'aires (grâce au lemme des proportions). Par exemple, on a $\frac{A'B}{A'C} = \frac{\mathcal{A}(A'BC')}{\mathcal{A}(A'CC')}$. L'astuce est alors de réutiliser le triangle $A'BC'$ pour le rapport qui fait intervenir $C'B$: $\frac{C'A}{C'B} = \frac{\mathcal{A}(A'AC')}{\mathcal{A}(A'BC')}$. L'égalité à prouver devient alors $\frac{B'C}{B'A} = \frac{\mathcal{A}(A'CC')}{\mathcal{A}(A'AC')}$: c'est le lemme du chevron !

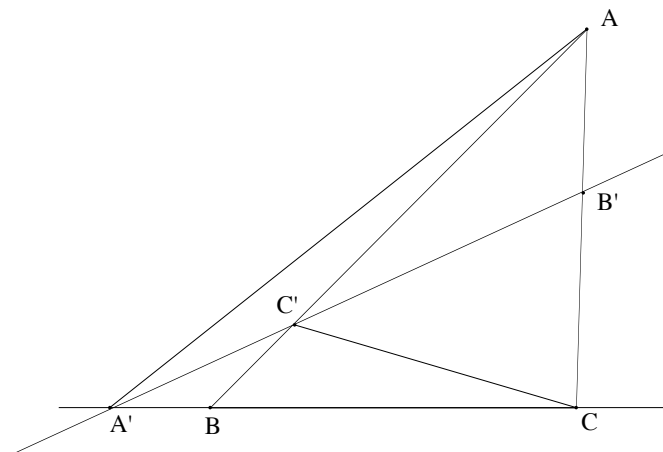


Figure 9

2.14 Remarque. Le lecteur scrupuleux aura remarqué qu'il y a plusieurs cas de figure et il se fera un plaisir de les traiter tous.

3 Justification de la méthode de découpage et recollement : le théorème de Bolyai

Dans ce paragraphe nous donnons une première réponse positive à l'un de nos deux problèmes : deux parties de même aire sont-elles équivalentes ? Le lecteur qui désire plus de détails sur ce théorème ira consulter [ME] chapitre 7, §3.

3.1 Énoncé

3.1 Théorème. (Bolyai, 1832, Gerwin, 1833) *Soient A et B deux polygones de même aire. Alors A et B sont équivalents par découpage et recollement¹⁴.*

Le théorème, modulo le fait que la relation d'équivalence en est une, repose sur le lemme suivant :

3.2 Lemme. *Soit A un polygone quelconque. Il existe un rectangle R équivalent à A dont un côté est de longueur unité.*

Ce lemme implique le théorème de Bolyai. En effet, si A et B sont des polygones de même aire il existe des rectangles R_A et R_B , dont un côté est l'unité, respectivement équivalents à A et B . Comme l'aire est conservée par équivalence, les rectangles R_A et R_B ont même aire, donc leurs deuxièmes côtés sont égaux. Mais alors ils sont isométriques, donc équivalents et on a $A \sim R_A \sim R_B \sim B$ donc $A \sim B$ par transitivité.

3.2 Preuve du lemme fondamental

Je donne ici une preuve (inspirée de [Lebesgue]) qui n'utilise que le découpage et pas la complémentation. En contrepartie, l'axiome d'Archimède est indispensable. Pour une preuve utilisant la complémentation, mais pas Archimède, voir ci-dessous 3.6.

Notons d'abord qu'il suffit d'établir 3.2 pour un triangle. En effet, si A est un polygone quelconque, on peut toujours l'écrire comme réunion presque disjointe de triangles T_1, T_2, \dots, T_n . On peut alors trouver des rectangles R_i dont un côté est de longueur 1 et l'autre l_i et qui sont équivalents aux T_i . On obtient alors un rectangle R équivalent à A en mettant bout à bout les R_i .

Le pas suivant est de découper un triangle pour en faire un parallélogramme :

3.3 Lemme. *Soit T un triangle. Il existe un parallélogramme P tel que $T \sim P$.*

Démonstration.

¹⁴Ici, on utilise la variante de la relation avec des parties presque disjointes.

Soient ABC le triangle et M et N les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. On considère le symétrique D de M par rapport à N . Il est clair que le triangle T et le parallélogramme $MDCB$ sont équivalents.

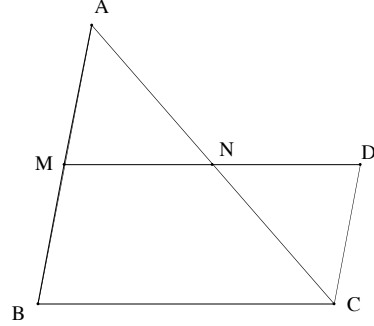


Figure 10

On passe maintenant d'un parallélogramme à un autre, mais dont un côté est 1 :

3.4 Lemme. Soit P un parallélogramme.

- Il existe un parallélogramme P' , dont un côté est de longueur rationnelle, tel que $P \sim P'$.
- Il existe un parallélogramme P'' , dont un côté est de longueur p avec $p \in \mathbf{N}^*$, tel que $P \sim P''$.
- Il existe un parallélogramme P''' dont un côté vaut 1 et tel que $P \sim P'''$.

Démonstration.

a) Soit $ABCD$ le parallélogramme donné. Il existe $D' \in [DC]$ tel que la longueur AD' soit un nombre rationnel¹⁵. On considère alors le point C' de (DC) tel que $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'}$. Le parallélogramme $ABC'D'$ est équivalent à $ABCD$ et convient.

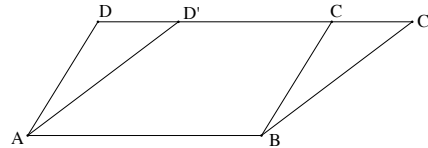


Figure 11

b) Grâce à a) on peut partir d'un parallélogramme $ABCD$ avec $AD = \frac{p}{q}$. On partage le côté AB en q parties égales, par des points $A_0 = A, A_1, \dots, A_q = B$. On mène, par les A_i , les droites parallèles à (AD) qui coupent (CD) en des points C_i . On empile les q parallélogrammes obtenus sur AA_1C_1D et on obtient un parallélogramme dont un côté vaut $qAD = p \in \mathbf{N}$.

¹⁵On utilise ici le fait qu'entre deux réels il y a toujours un rationnel. Cela n'est vrai que parce que \mathbf{R} est archimédien.

c) On dispose maintenant d'un parallélogramme avec $AD = p \in \mathbf{N}$. On partage $[AD]$ en p parties égales et on obtient ainsi p petits parallélogrammes que l'on met en ligne, à côté de ABC_1A_1 . On a bien maintenant un parallélogramme dont un côté vaut 1.

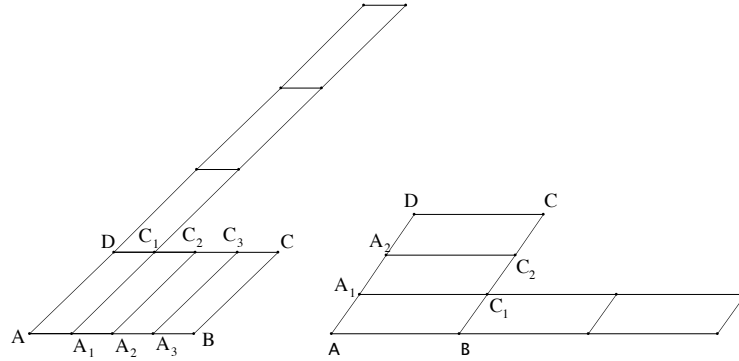


Figure 12

Pour en finir avec le lemme 3.2 il ne reste plus qu'à montrer le résultat suivant :

3.5 Lemme. *Soit $P = ABCD$ un parallélogramme dont le côté AB vaut 1. Alors P est équivalent à un rectangle de côté 1.*

Démonstration.

On suppose d'abord que le projeté C' de B sur la droite (CD) est dans le segment $[CD]$. On considère alors le point D' tel que $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$. Le quadrilatère $ABC'D'$ est un rectangle qui s'obtient à partir de $ABCD$ par découpage et il a un côté égal à $AB = 1$.

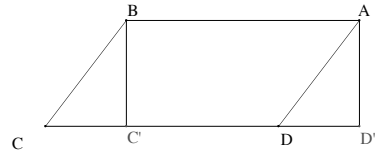


Figure 13

Lorsque les deux projetés A' et C' sont hors de $[CD]$, on partage AD en n parties égales par des points A_i et on mène les parallèles à (AB) par les A_i . Elles recoupent (BC) en C_i . On choisit n assez grand pour que le projeté de A ou de B sur (A_1C_1) soit dans $[A_1C_1]$. La même propriété vaut aussi pour tous les petits parallélogrammes empilés sur ABC_1A_1 . On peut donc, par le premier cas, découper ces parallélogrammes pour en faire des petits rectangles de côté 1 et il ne reste plus qu'à empiler les rectangles obtenus.

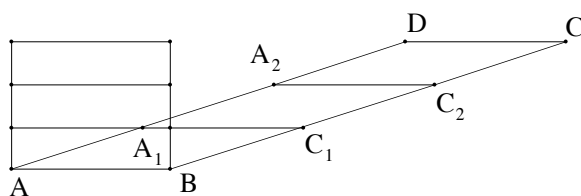


Figure 14

3.6 Remarque. On notera que la démonstration ci-dessus fait un usage essentiel de l'axiome d'Archimède, notamment dans la preuve de 3.4 a) et de 3.5. D'ailleurs, le théorème est faux sur un corps non archimédien (cf. [Hilbert] Ch. IV, §2, numéro 8, p. 102). On obtient un contre-exemple dans le deuxième cas de figure du lemme du trapèze, cf. 2.4, en prenant le côté BD infiniment grand par rapport aux côtés de ABC (si les côtés de ABC sont $\leq l$ et si on a une décomposition de ABC en triangles, leurs périmètres sont $\leq 6l$, alors que dans une décomposition en triangles de ABD il y a nécessairement un côté infiniment grand par rapport à l). En revanche on peut montrer, sans utiliser l'axiome d'Archimède, que deux polygones de même aire sont équicomplémentables (autrement dit qu'ils deviennent équivalents en rajoutant éventuellement des polygones équivalents). La preuve est plus simple que celle de Bolyai, voir [Hilbert] ou [Boltianski.2] p. 61. Elle consiste encore à montrer qu'un polygone est équicomplémentable¹⁶ à un rectangle de côté unité. Le lecteur le fera sans peine grâce aux deux figures ci-dessous.

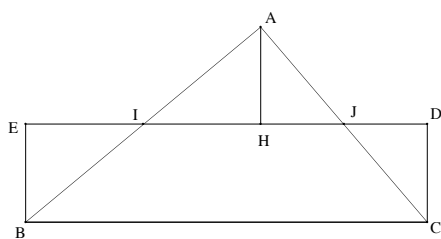


Figure 15

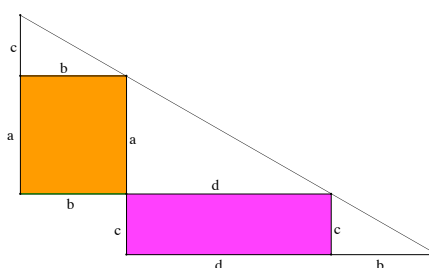


Figure 16

3.7 Remarque. On notera que nous n'avons utilisé que des déplacements dans la preuve du théorème. Il y a un théorème plus fort, dû à Hadwiger et Glur

¹⁶Dieu que c'est laid!

(1951) qui affirme que l'on peut se limiter à n'utiliser que symétries centrales et des translations, voir [Boltianski.1] ou [Boltianski.2].

3.3 Une variante, ou comment se débarrasser des segments gênants

En 3.5 nous avons découpé un parallélogramme pour en faire un rectangle, mais bien entendu, il s'agit d'un découpage en parties presque disjointes. Si on essaie de faire un découpage en parties vraiment disjointes, c'est-à-dire en se préoccupant aussi des bords, il y a une difficulté, même dans le cas facile. En effet, si l'on peut sans encombre reporter le segment $[CC']$ sur $[DD']$ il n'en est pas de même pour passer de $[BC]$ à $[AD']$ car on a un petit bout de segment $[MB]$ en trop, voir fig. 17 ci-dessous!

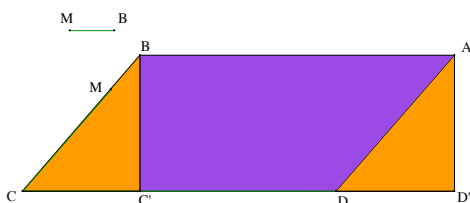


Figure 17

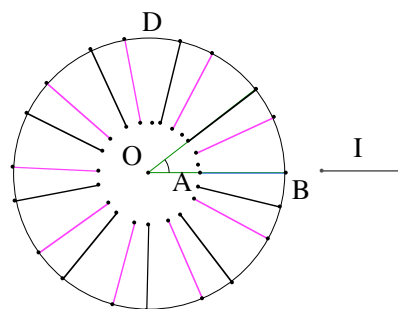


Figure 18

C'est là qu'il faut faire un petit tour de magie, si le segment supplémentaire est assez court¹⁷ on va le faire rentrer dans un disque contenu dans le rectangle $ABC'D'$:

3.8 Proposition. Soient D un disque de rayon r et I un segment de longueur $< r$, avec $D \cap I = \emptyset$. Alors, on a $D \sim (D \cup I)$.

Démonstration. L'idée (cf. [Guinot]) est toute simple¹⁸. Il s'agit de faire rentrer I dans D , or on sait faire ça avec les entiers et un élément supplémentaire a : on fait une place à a en décalant les entiers de 1 : $\mathbf{N} \cup \{a\}$ est en bijection avec \mathbf{N} en envoyant a en 0 et n en $n + 1$.

Soit O le centre de D et B un point du cercle qui le limite. On considère le segment $J = [AB]$ porté par $[OB]$ et de même longueur que I . On choisit un angle θ incommensurable avec π . On considère la rotation ρ d'angle θ et

¹⁷Et sinon, on le découpe.

¹⁸Le lecteur, avec le même genre d'arguments, montrera que le segment $[0, 1]$ est équivalent à l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$ par un découpage en trois morceaux.

ses itérées ρ^n , $n \in \mathbf{N}$. Comme θ est incommensurable à π , les transformés $\rho^n(J)$ sont disjoints. Posons $E = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \rho^n(J)$ et $E^* = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \rho^n(J)$. Voici les découpages : $D = (D - E) \cup E^* \cup J$ et $D \cup I = (D - E) \cup E \cup I$ et le passage de l'un à l'autre : $D - E$ s'envoie sur lui-même par l'identité, I s'en va sur J et E sur E^* par ρ .

3.4 Quelques exemples

Le théorème de Bolyai assure donc qu'on peut toujours trouver un puzzle pour passer d'un polygone à un polygone de même aire (et il fournit un algorithme). Une question souvent plus amusante est de trouver le puzzle le plus simple possible. Voici quelques exemples de tels problèmes :

1) On se donne un carré. Produire un puzzle pour le transformer en deux carrés, en trois carrés (voir [HMC]). On se donne un triangle équilatéral : produire un puzzle qui le transforme en un carré (découpage de Dudeney, cf. [ME] p. 247 ou fig. 1 ci-dessus).

2) *Le problème du pâtissier.*

Il était une fois un pâtissier, féru de géométrie, mais distrait. Il possédait un moule à tarte en forme de triangle scalène. Pour faire sa tarte il en mesura les trois côtés, réalisa la pâte aux mesures et la couvrit de fruits. Hélas, il s'aperçut alors que le triangle qu'il venait de réaliser n'était pas le bon, mais son symétrique par rapport à une droite. Sauf à faire une tarte à l'envers il ne pouvait donc mettre sa tarte dans le moule. Comme il connaissait le théorème de Bolyai il se mit en quête d'un découpage lui permettant de rattraper sa bétise. Pouvez-vous l'aider ?

3) Un dernier problème amusant : montrer que, si p est un nombre pair, on peut partager un carré en p triangles de même aire. Plus difficile, montrer que c'est impossible si p est impair (autrement dit : même aire entraîne p pair !), voir [Bekker].

4 Le théorème de Banach : existence d'une mesure universelle

Sur la droite ou dans le plan, il existe une mesure universelle¹⁹ :

¹⁹On peut donc supposer que toute partie bornée du plan a une aire. Cela me fait parfois penser que nous avons bien tort d'embêter nos étudiants à construire des intégrales de Riemann, Lebesgue, que sais-je encore !

4.1 Théorème. (Banach, 1923) *Il existe une mesure simplement additive, définie sur l'ensemble de toutes les parties bornées de \mathbf{R} (resp. de \mathbf{R}^2), invariante par isométrie, et telle que la mesure de $[0, 1]$ (resp. du carré unité) soit égale à 1.*

Démonstration. Le livre de Marc Guinot (voir [Guinot]) explique remarquablement bien une preuve de ce théorème que je résume ci-dessous (voir aussi [Von Neumann]). Cette preuve est assez différente de celle de Banach, voir [Banach]. On commence par montrer :

4.2 Théorème. (Von Neumann 1929) *Soit G un groupe abélien. Il existe une mesure universelle sur G (i.e. définie pour toutes les parties de G), invariante par translation et normée (i.e. vérifiant $\mu(G) = 1$). Une telle mesure est dite de Von Neumann.*

Démonstration. On considère l'ensemble $\mathcal{P}(G)$ que l'on identifie à $X = \{0, 1\}^G$ grâce aux fonctions caractéristiques. On munit cet espace de la topologie produit des topologies discrètes qui en fait un compact (on a déjà utilisé l'axiome du choix ici). Une mesure de Von Neumann est une application de X dans \mathbf{R}^+ qui vérifie trois propriétés ($\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, $\mu(g.A) = \mu(A)$, $\mu(G) = 1$), toutes fermées. Pour montrer son existence, la compacité nous ramène au cas d'un groupe de type fini, et on se ramène facilement au cas de \mathbf{Z} .

Sur \mathbf{Z} on construit μ comme limite de mesures de comptage μ_n définies par :

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n} |A \cap \{1, 2, \dots, n\}|.$$

Ces mesures vérifient une propriété d'invariance approchée :

$$|\mu_n(A) - \mu_n(1 + A)| \leq \frac{1}{n}.$$

Si on appelle \mathcal{M}_n l'ensemble des mesures universelles normées qui vérifient cette invariance approchée, les \mathcal{M}_n sont fermés et la compacité assure que $\mathcal{M} = \bigcap_n \mathcal{M}_n$ est non vide. Un élément de \mathcal{M} fournit la mesure de Von Neumann cherchée.

Revenons à Banach. On a maintenant, sur le cercle \mathbf{R}/\mathbf{Z} ou tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ qui sont des groupes abéliens, une mesure μ de Von Neumann. Par image réciproque, on en déduit une mesure sur les parties bornées²⁰ de \mathbf{R} ou \mathbf{R}^2 invariante par translation en posant (par exemple pour \mathbf{R}) : $\hat{\mu}(A) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \mu(p(A \cap [n, n + 1]))$ où p est la surjection canonique.

²⁰Là, Guinot exagère car il prend toutes les parties, ce qui donne des mesures infinies.

Pour passer à une mesure vraiment invariante par les isométries et pas seulement les translations, il faut faire une moyenne. Sur \mathbf{R} c'est trivial avec une symétrie centrale σ_o quelconque : on pose $\nu(A) = \frac{1}{2}(\mu(A) + \mu(\sigma_o(A)))$. Sur \mathbf{R}^2 , on peut aussi faire cette manœuvre avec une symétrie axiale, mais il faut traiter d'abord le cas des rotations. Comme $O^+(2)$ est **abélien**, on dispose d'une mesure de Von Neumann σ sur ce groupe et on peut faire une moyenne de mesures obtenues par rotations. On pose donc :

$$\nu(A) = \frac{1}{\sigma(O^+(2))} \int_{O^+(2)} \mu(\rho(A)) d\sigma(\rho).$$

Bien entendu, cette preuve ne marche plus en dimension 3 car le groupe $O^+(3)$ n'est plus du tout abélien²¹.

4.3 Remarques.

1) Banach montre que la mesure universelle n'est pas unique. Précisément, elle est bien déterminée sur les parties quarrables (i.e. Riemann-intégrables), mais on peut construire une mesure λ qui coïncide avec la mesure de Lebesgue sur les parties bornées Lebesgue-intégrables et une autre μ qui vérifie $\mu(A) = 1$ pour une partie A Lebesgue-négligeable²². Ce paradoxe apparent est dû au fait que la mesure de Banach n'est pas dénombrablement additive. Il a une conséquence sur le problème de Tarski : si A est une telle partie, bien qu'elle vérifie $\mu(A) = 1$ comme le carré unité, on ne peut évidemment pas la découper pour passer au carré (à cause de λ).

2) On peut montrer l'existence d'une mesure universelle homogène au sens de 1.6.5, cf. [Wagon], Théorème 11.5. J'ignore si toute mesure universelle est nécessairement homogène. Ce qu'on sait c'est qu'une mesure est nécessairement homogène sur les polygones et plus généralement sur les parties quarrables (cf. [ME]). De plus, le fait qu'un triangle homothétique de rapport 2 soit d'aire quadruple se voit facilement par découpage (avec les droites des milieux). Attention, dans l'espace ce n'est plus vrai, voir ci-dessous 6.9.

5 La mesure des volumes, généralités

²¹On voit bien que c'est la notion de groupe résoluble qui est en cause. Attention, que ceux qui connaissent l'existence d'une mesure de Haar sur un groupe localement compact (donc sur $O^+(3)$) ne s'illusionnent pas, cette mesure n'est pas universelle.

²²Pas n'importe laquelle. Il faut que son complémentaire soit maigre (union dénombrable de fermés d'intérieur vide). Dans $[0, 1]$ on peut prendre une réunion d'ensembles de Cantor K_n de mesures $1 - 1/n$. On peut d'ailleurs construire une mesure universelle qui s'annule sur tous les ensembles maigres.

5.1 La théorie d'Euclide

La théorie des volumes, au départ, est très proche de celle des aires. On a vu que les points, les segments et les polygones plans sont de volume nul (s'ils en ont un, ce qu'on peut supposer, voir annexe), de sorte qu'on peut appliquer l'axiome d'additivité à des parties presque disjointes.

Comme dans le cas des aires le fait que le volume du parallélépipède rectangle soit le produit de ses trois dimensions²³ requiert un passage à la limite.

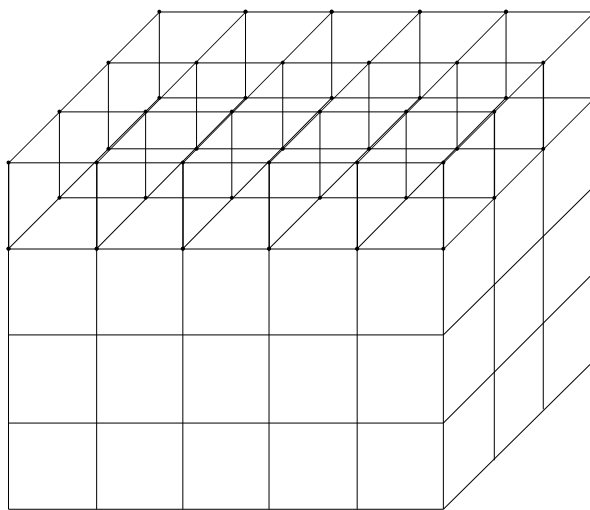


Figure 19

En revanche, à partir de là, on montre en utilisant uniquement découpage et recollement nombre de résultats (voir [ME] chapitre 10), en particulier le fait que le volume d'un parallélépipède quelconque est aussi égal à *base* \times *hauteur*, et de même pour un prisme à base quelconque. Là où les choses sont plus délicates, c'est pour le volume de la pyramide.

On peut assez facilement trouver la formule (dès le collège) en considérant des cas particuliers. Par exemple, les six pyramides ayant pour sommet commun le centre d'un cube d'arête a et pour bases les faces du cube sont toutes isométriques, donc ont toutes pour volume $a^3/6$. De même les pyramides qui ont pour face une face du cube et pour sommet un autre sommet du cube ont pour volume $a^3/3$. Ces deux résultats amènent à conjecturer que, dans le cas général, le volume de la pyramide est égal au tiers de l'aire de la base multipliée par la hauteur. La démonstration de cette propriété est un des

²³Ce résultat n'est pas formulé ainsi dans Euclide, bien entendu.

sommets de la mathématique d'Euclide. Le point difficile est de montrer le lemme suivant :

5.1 Lemme. *Deux pyramides qui ont des bases de même aire et des hauteurs égales ont des volumes égaux.*

En admettant ce résultat, on obtient :

5.2 Théorème. *Soit P une pyramide de base K et de sommet O , H le projeté orthogonal de O sur le plan de K . On a $v(P) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(K) \times OH$.*

Démonstration. On se ramène par découpage au cas d'un tétraèdre. Comme le volume ne dépend que de l'aire de la base et de la hauteur par 5.1, il suffit de montrer la formule pour un tétraèdre dont l'aire de base et la hauteur sont données.

Pour cela, on prend un prisme droit de bases ABC et DEF . Ses faces latérales sont des rectangles. Ce prisme est réunion de trois tétraèdres ayant B en commun : $BACD$, $BFCD$ et $BEDF$. Les trois tétraèdres ont même volume par 5.1, donc le tiers du volume du prisme, c'est-à-dire $\frac{1}{3}\mathcal{A}(ABC) \times AD$ d'où le résultat.

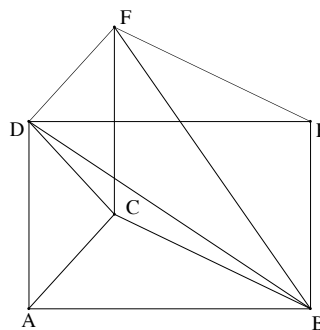


Figure 20

Il reste à prouver 5.1. Intuitivement, la preuve de ce lemme est assez naturelle. Prenons le cas de deux pyramides P_1 et P_2 de bases isométriques, avec des sommets différents, mais la même hauteur. L'idée est de couper les pyramides par des plans parallèles à la base en un grand nombre de morceaux (qui vont être des troncs de pyramide). Si la hauteur de ces troncs de pyramide est assez petite, une idée (que ne renierait pas un physicien) est qu'on peut les assimiler à des prismes. Deux de ces troncs, l'un pour P_1 , l'autre pour P_2 , situés à la même hauteur ont donc même volume, puisque ce sont des prismes de même base (par homothétie) et même hauteur. Par sommation, on en déduit que les deux pyramides ont même volume.

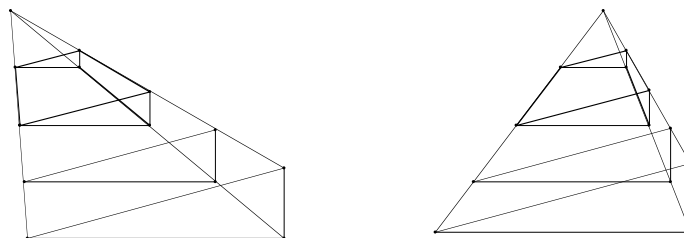


Figure 21

La preuve d'Euclide consiste en une mise en forme de cette idée, en utilisant un encadrement des troncs de pyramide par des prismes (voir [Euclide] Livre XII, Proposition 5 ou [Hadamard] chapitre III) mais elle demeure assez délicate. C'est la méthode dite d'exhaustion.

5.2 Le calcul intégral

Une autre manière de montrer 5.1 est d'utiliser le calcul intégral, voir [ME] chapitre 10. Sur ce thème, on trouvera en annexe le texte d'un exercice (niveau terminale) que je propose pour l'épreuve sur dossier de CAPES et qui permet le calcul du volume du cône en utilisant le calcul intégral (et plus précisément en montrant que l'aire d'une section est la dérivée du volume).

6 Découpage des polyèdres : troisième problème de Hilbert et invariant de Dehn

6.1 Le problème

C'est l'analogue dans l'espace du problème résolu par Bolyai dans le plan. La question est de savoir si deux polyèdres de même volume sont équivalents par découpage et recollement (en un nombre fini de polyèdres). Si tel était le cas, cela signifierait que tout calcul de volume d'un polyèdre peut se faire par découpage et recollement fini, sans utiliser un passage à la limite. Cette question est sous-jacente dans le calcul du volume de la pyramide chez Euclide. En effet, on a vu que, pour montrer que le volume de la pyramide est le tiers de celui du prisme, Euclide utilise un processus infini, l'exhaustion²⁴. Les

²⁴Contrairement au cas du plan où le fait que l'aire du triangle est la moitié de celle du parallélogramme se voit par découpage.

mathématiciens qui ont suivi, et notamment Gauss, se sont posé la question de savoir si ce processus infini était indispensable.

Il s'agit d'un problème non trivial qui est le troisième des 23 problèmes posés par David Hilbert à ses collègues lors du deuxième Congrès international des mathématiciens, à Paris en 1900. Si certains des problèmes de Hilbert sont encore ouverts aujourd'hui, celui-là a eu une existence brève puisque la solution a été apportée par Dehn dès 1900. La réponse, contrairement au cas du plan, est négative. En particulier, il est impossible de découper un cube en un nombre fini de polyèdres et de reconstituer un tétraèdre régulier (de même volume) à partir des morceaux. La démonstration de Dehn repose sur l'introduction d'un nouvel invariant pour un polyèdre, dit invariant de Dehn.

6.2 L'invariant de Dehn

Nous nous contentons d'un bref aperçu sur cet invariant, le lecteur consultera, pour plus de précisions, l'annexe 6.2 ci-dessous et les références [Agreg], [Boltianski1,2], [Cartier], [GS].

Cet invariant est de nature un peu plus compliquée puisqu'il vit dans un produit tensoriel²⁵, précisément, dans $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z})$, le groupe $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ pouvant être vu comme le groupe des angles de droites, i.e. des angles modulo π . Cet objet est un groupe abélien dont les éléments sont de la forme $\sum_i l_i \otimes \theta_i$ avec $l_i \in \mathbf{R}$, $\theta_i \in \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$, la somme étant finie et ces symboles vérifient la propriété d'être \mathbf{Z} -bilinéaires²⁶ en les deux facteurs : on a $(x+y) \otimes \theta = x \otimes \theta + y \otimes \theta$ et $x \otimes (\theta + \phi) = x \otimes \theta + x \otimes \phi$ et $(nx) \otimes \theta = x \otimes (n\theta)$ pour $x, y \in \mathbf{R}$, $\theta, \phi \in \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{Z}$.

Si l'on croit à l'existence de ces objets, l'invariant de Dehn est alors assez naturel :

6.1 Définition. *Soit P un polyèdre (on désigne par ce nom une réunion finie de polyèdres convexes). Ce polyèdre a un certain nombre n d'arêtes A_i . On appelle l_i la longueur de A_i et θ_i l'angle dièdre associé. L'invariant de*

Dehn $\delta(P)$ est alors défini par $\delta(P) = \sum_{i=1}^n l_i \otimes \theta_i$.

On note que l'invariant de Dehn est clairement invariant par isométrie.

Le résultat de Dehn est alors le suivant :

²⁵Bien entendu, ce n'est pas ainsi qu'il apparaît dans la présentation de Dehn, ni même dans celle de Boltianski. Je suis ici l'exposé de Cartier.

²⁶En utilisant 9.6 on peut montrer qu'ils sont \mathbf{Q} -bilinéaires.

6.2 Théorème. *Si deux polyèdres sont équivalents par découpage et recollement (en polyèdres) ils ont même invariant de Dehn.*

Démonstration. On montre d'abord le lemme suivant :

6.3 Lemme. *Si un polyèdre P est réunion presque disjointe de polyèdres P_1, \dots, P_r , on a $\delta(P) = \delta(P_1) + \dots + \delta(P_r)$.*

Démonstration. Il suffit essentiellement²⁷ de traiter le cas du découpage d'un tétraèdre en deux. Soit donc $T = ABCD$ un tétraèdre que l'on partage en deux tétraèdres $T_1 = ABMD$ et $T_2 = ACMD$ à partir d'un point $M \in [BC]$ et comparons $\delta(T)$ et $\delta(T_1) + \delta(T_2)$. Beaucoup de termes sont en commun et nous regardons seulement les différences.

Appelons θ l'angle dièdre limité par $[BC]$. Dans $\delta(T)$ on a le terme $BC \otimes \theta$, qui est remplacé, dans $\delta(T_1) + \delta(T_2)$, par $BM \otimes \theta + MC \otimes \theta$. Par bilinéarité, ces termes sont égaux.

On note $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ les angles dièdres relatifs à l'arête $[AD]$ dans T, T_1, T_2 respectivement. On a donc $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Dans $\delta(T)$ on a le terme $AD \otimes \alpha$, et dans les autres $AD \otimes \alpha_1 + AD \otimes \alpha_2$. Par bilinéarité, on a bien le total voulu.

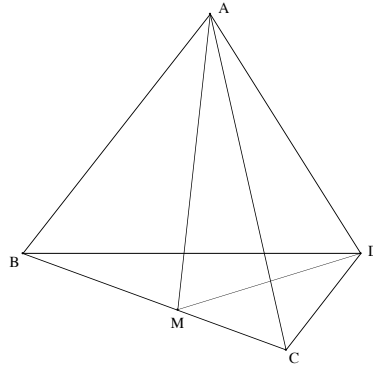


Figure 22

Enfin, on a de nouveaux termes dans $\delta(T_1) + \delta(T_2)$, par exemple $MD \otimes \varphi$ et $MD \otimes \psi$. Mais, comme on a $\varphi + \psi = \pi$, ces termes s'annulent dans le produit tensoriel.

Le théorème 6.2 est alors immédiat. En effet, si on a deux polyèdres P, Q décomposés en P_i, Q_i isométriques, on a $\delta(P) = \sum_{i=1}^n \delta(P_i) = \sum_{i=1}^n \delta(Q_i) = \delta(Q)$ en vertu de l'invariance par isométrie.

6.2.1 La réponse négative au problème de Hilbert

Le lemme suivant permet souvent de prouver la nullité de l'invariant de Dehn :

6.4 Lemme. *Un polyèdre dont les angles dièdres sont tous multiples rationnels de π est d'invariant de Dehn nul. C'est le cas, en particulier pour un cube.*

²⁷Mais la mise en forme de la preuve dans le cas général est un peu pénible, cf. [Boltianki1,2].

Démonstration. On écrit, en utilisant la bilinéarité du produit tensoriel sur \mathbf{Z} , $\delta(P) = \sum a_i \otimes (p_i/q_i)\pi = \sum (q_i(a_i/q_i) \otimes (p_i/q_i)\pi) = \sum q_i((a_i/q_i) \otimes (p_i/q_i)\pi) = \sum ((a_i/q_i) \otimes q_i(p_i/q_i)\pi) = \sum ((a_i/q_i) \otimes p_i\pi) = 0$

Considérons maintenant un tétraèdre régulier T de volume 1. On vérifie que ses arêtes ont pour longueur a avec $a^3 = 6\sqrt{2}$ et que ses angles dièdres θ ont pour cosinus $1/3$ (c'est le fait que la projection du sommet sur la base est au tiers des hauteurs). On a donc $\delta(T) = 6(a \otimes \theta) = 6a \otimes \theta$.

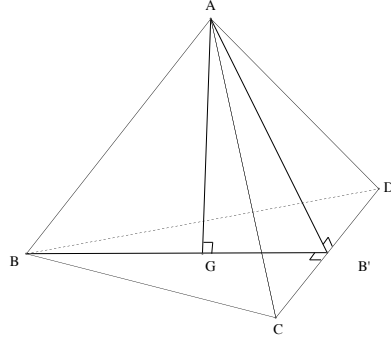


Figure 23

6.5 Lemme. *L'invariant de Dehn de T est non nul, de sorte que K et T ne sont pas équivalents par découpage et recollement.*

Démonstration. On montre une réciproque partielle de 6.4 : un tenseur “élémentaire” $a \otimes \theta$ n'est nul que si θ/π est rationnel, voir ci-dessous annexe 9.3. Il reste à montrer que si $\cos \theta$ vaut $1/3$, θ n'est pas commensurable à π . C'est le lemme suivant (voir aussi 9.5) :

6.6 Lemme. *Si θ est un réel qui vérifie $\cos \theta = 1/3$, le rapport θ/π est irrationnel.*

Démonstration. Supposons $\theta = \frac{p}{q}\pi$. On aurait alors $q\theta = p\pi$, donc $\cos q\theta = \pm 1$. Mais c'est absurde car on montre par récurrence qu'on a, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\cos n\theta = \frac{a_n}{3^n}$ où a_n est un entier non multiple de 3. En effet, on a bien la propriété pour $n = 1$ et pour passer des entiers $\leq n$ à $n + 1$ on utilise la formule :

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos \theta \cos n\theta$$

qui donne $\cos(n+1)\theta = \frac{2}{3} \frac{a_n}{3^n} - \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{2a_n - 9a_{n-1}}{3^{n+1}}$, d'où le résultat.

6.7 Remarque. À la place d'un tétraèdre régulier on peut aussi utiliser un tétraèdre “de coin” (c'est-à-dire dont les sommets sont l'origine et les trois extrémités des vecteurs de base). En effet, il a des dièdres dont le cosinus vaut $1/\sqrt{3}$ et on conclut encore avec 9.5.

6.2.2 Le théorème de Sydler

Le résultat définitif sur le problème du découpage des polyèdres est le suivant :

6.8 Théorème. (Sydler, 1965) *Deux polyèdres sont équivalents par découpage et recollement (en polyèdres) si et seulement si ils ont même volume et même invariant de Dehn.*

Démonstration. On renvoie à [Sydler] ou à l'exposé [Cartier] pour une preuve.

6.3 Quelques conséquences

Les résultats de Dehn et Sydler permettent de comprendre nombre de phénomènes liés au découpage.

6.3.1 Prismes

En premier lieu, on a vu que le volume du prisme, même oblique, peut se calculer par découpage. Cela se confirme en notant que l'invariant de Dehn d'un prisme est nul (et ce, même si les angles dièdres ne sont pas des multiples rationnels de π). En effet, si on regroupe deux arêtes parallèles, la contribution de ces deux arêtes dans $\delta(P)$ est $a \otimes \theta + a \otimes (\pi - \theta) = a \otimes \pi = 0$.

6.3.2 Pyramides découpables

On voit ensuite que les pyramides "faciles" dans un cube sont d'invariant nul. Il y a d'abord les pyramides de sommet le centre du cube et de base une face du cube. Leurs angles dièdres valent $\pi/4$ ou $2\pi/3$ et on conclut par 6.4. Il y a ensuite les pyramides dont le sommet est un sommet du cube et dont la base est une face du cube ne contenant pas ce sommet. Pour celles-là, on a des angles dièdres de $\pi/2$, $\pi/4$ ou $2\pi/3$ et la conclusion est identique.

6.3.3 Dehn et homogénéité

Le point le plus intéressant concerne le volume d'une pyramide ordinaire et le lien avec la propriété d'homogénéité. La proposition suivante²⁸ montre comment calculer le volume d'un tétraèdre par découpage, pourvu qu'on admette simplement que le doublement du tétraèdre multiplie son volume par 8 :

²⁸Voir [Cartier] ; je remercie Daniel Meyer d'avoir attiré mon attention sur ce résultat.

6.9 Proposition. Soit $T = ABCD$ un tétraèdre, $P = ABCDEF$ le prisme de base ABC bâti sur T et T' le tétraèdre homothétique de T dans l'homothétie de centre A et de rapport 2. Alors, $T' \cup T_1$ est équivalent à $P \cup P' \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ où P' est un prisme isométrique à P et les T_i des tétraèdres isométriques à T . Si on sait que le volume de T' est égal à huit fois celui de T on en déduit $v(P) = 3v(T)$.

Démonstration. Voir fig. 24. Si on pose $t = v(T)$ et $p = v(P)$ on a $2p + 3t = 8t + t$, d'où $p = 3t$.

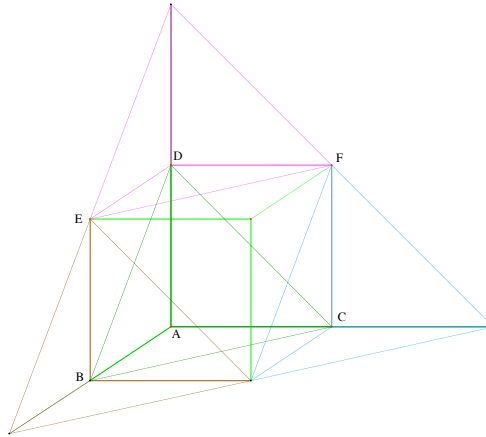


Figure 24

Ce résultat peut sembler contradictoire avec ce qui a été dit plus haut sur l'impossibilité de prouver par découpage le volume de la pyramide. Il n'en est rien. En effet, contrairement au cas du plan, l'assertion (pourtant bien naturelle) du volume du tétraèdre double ne peut en général être prouvée par découpage :

6.10 Proposition. Soit T un tétraèdre admettant pour sommet O , T' l'image de T dans l'homothétie de centre O et de rapport 2. On a $v(T') = 8v(T)$ et $\delta(T') = 2\delta(T)$. Si Q est la réunion disjointe de 8 tétraèdres isométriques à T , T' et Q sont équivalents si et seulement si $\delta(T)$ est nul.

Démonstration. L'assertion sur le volume résulte de la formule du volume de la pyramide. Celle sur l'invariant de Dehn est évidente car on a $\delta(T) = \sum_{i=1}^6 a_i \otimes \theta_i$ et, quand on passe à T' , on double les a_i sans changer les θ_i . Comme on a $\delta(Q) = 8\delta(T)$, T' et Q sont équivalents si et seulement si on a $6\delta(T) = 0$ en vertu de Sydler. Mais cela implique $\delta(T) = 0$ (voir ci-dessous annexe 9.6).

6.11 Remarques.

1) On voit en particulier que le double d'un tétraèdre régulier T ne peut pas

être découpé en huit tétraèdres isométriques à T .

2) La formule $\delta(T') = 2\delta(T)$ peut se comprendre en notant que T' est découpé en deux tétraèdres isométriques à T et deux prismes (qui sont d'invariant de Dehn nul), voir fig. 25.

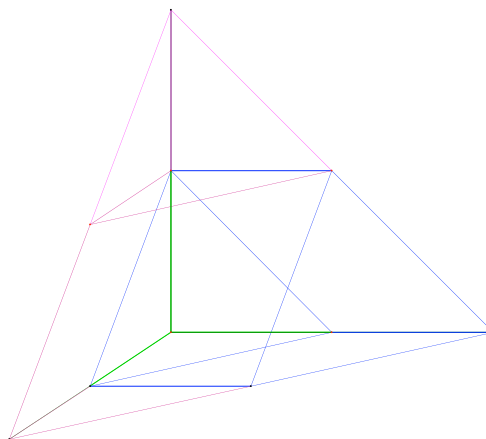


Figure 25

7 Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski

La question est l'analogie du théorème de Banach : existe-t-il dans l'espace une mesure universelle (c'est-à-dire définie pour toutes les parties bornées), non nulle, simplement additive et invariante par déplacement ?

La réponse, cette fois, est négative et cela résulte de l'extraordinaire paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski, c'est-à-dire du théorème suivant (qui utilise l'axiome du choix) :

7.1 Théorème. (Banach-Tarski, 1924) *Soient A et B deux parties bornées d'intérieur non vide de \mathbf{R}^3 . Alors, il existe une partition de A (resp. B) en A_1, \dots, A_n (resp. B_1, \dots, B_n) et, pour chaque i , un déplacement g_i tel que $B_i = g_i(A_i)$.*

Autrement dit, on peut découper A en un nombre fini²⁹ de morceaux (certainement pas simples!), les déplacer, et reconstituer B avec ces morceaux. On pensera aux cas suivants : A est une pomme et B est la lune, A est une grenouille et B est un bœuf, A est un pain et B est un millier de pains³⁰ !

²⁹On montre même que pour passer d'une boule de rayon 1 à deux boules de rayon 1 il suffit de 5 morceaux, voir [Robinson] !

³⁰Comme quoi, la multiplication des pains, ce n'est pas si difficile, il suffit de savoir rendre l'axiome du choix effectif !

Il est clair que le paradoxe implique l'inexistence d'une mesure μ (non nulle) définie pour toute partie bornée. En effet, on aurait, avec les notations de 7.1, $\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \mu(B)$ pour toutes parties bornées A et B . En appliquant cela à A et à $B = A \cup \tau(A)$ (où $\tau(A)$ est un translaté de A disjoint de A), on en déduit $\mu(A) = 0$ pour toute partie bornée ce qui est absurde.

Démonstration. Je me contente de donner les principaux ingrédients de cette démonstration. Le lecteur qui veut en savoir plus consultera [Guinot] ou [CAPES]. Le lemme crucial, dû à Hausdorff³¹, voir [Hausdorff], est le suivant :

7.2 Lemme. (Hausdorff, 1914) *Soit S la sphère unité de \mathbf{R}^3 . Il existe une partition de S en quatre ensembles X, Y, Z, T , avec T dénombrable et X, Y, Z isométriques entre eux et tels que X soit isométrique à $Y \cup Z$.*

Démonstration. Autrement dit, il s'agit de montrer qu'on a $1 = 2$. Pas de problème, il y a un exemple simple comme ça : \mathbf{N} est en bijection avec les nombres pairs P , avec les impairs I , mais aussi, évidemment, avec leur réunion. C'est cette idée qu'on copie en considérant un sous-groupe G dénombrable de $O^+(3, \mathbf{R})$, le groupe des rotations de \mathbf{R}^3 fixant 0, engendré par un demi-tour a et une rotation b d'ordre 3 :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On peut décrire précisément (voir annexe) les éléments de G :

7.3 Lemme. *Tout élément r de G , distinct de I et de a s'écrit, de manière unique, sous la forme suivante (cette écriture est appelée un **mot**) :*

$$r = a^{\epsilon_1} b^{n_1} a b^{n_2} a \cdots a b^{n_{k-1}} a b^{n_k} a^{\epsilon_2}$$

avec $k \in \mathbf{N}^*$, $\epsilon_i = 0$ ou 1 et $n_i = 1$ ou 2. En particulier, le groupe G est dénombrable.

(Le groupe G est ce qu'on appelle le produit libre du groupe cyclique d'ordre deux engendré par a par le groupe cyclique d'ordre trois engendré par b . Cela signifie qu'on a tous les composés possibles de a, b, b^2 , sans autres relations que $a^2 = b^3 = 1$.)

³¹Je trouve vraiment injuste que certains oublient d'associer Hausdorff à Banach et Tarski dans l'appellation du paradoxe. À mon avis, l'idée essentielle – et splendide – lui est due.

Cette écriture permet de partager G en trois parties **disjointes** : $G = A \cup B \cup C$. L'idée est de prendre pour A, B, C l'ensemble des mots qui commencent par a, b, b^2 respectivement. Ces parties vérifient³² $B = bA$, $C = bB = b^2A$ et $A = a(B \cup C)$, et comme dans le partage de \mathbf{N} avec les pairs et les impairs on a partagé G en trois parties, qui se déduisent l'une de l'autre par translation, mais qui sont aussi telles que A se déduit de $B \cup C$ par translation.

Il est maintenant facile de découper la sphère. On fait opérer le groupe G sur S . Il y a deux sortes de points $x \in S$. Ceux (disons de type 1) qui sont sur les axes des éléments $g \in G$. Ils sont en nombre dénombrable (car G est dénombrable) : c'est l'ensemble T . Les autres (de type 2) vérifient $g(x) \neq x$ pour tout $g \in G$. L'orbite de x , $\omega(x)$ est donc en bijection avec G . Les orbites des points de type 2 forment une partition de $S - T$. Mais comme on sait découper le groupe, on sait découper ses orbites. Précisément, dans chacune des orbites des points de type 2 on choisit un point (c'est possible grâce à l'**axiome du choix**). On obtient ainsi un ensemble E et si on pose $X = AE = \{g(x) \mid g \in A \text{ et } x \in E\}$, $Y = BE$, $Z = CE$, on obtient le découpage cherché.

Il reste à passer de la sphère à toutes les parties de \mathbf{R}^3 . C'est ce qu'ont fait Banach et Tarski, cf. [Banach-Tarski]. Voilà l'idée du chemin à parcourir. On commence par le lemme suivant :

7.4 Lemme. *Soient S, S', S'' trois sphères de rayon 1 disjointes. Il existe des parties dénombrables T, T', T'' respectivement contenues dans S, S', S'' telles que l'on ait $S - T \sim (S' - T') \cup (S'' - T'')$ et même $S \sim S' \cup S''$*

Démonstration. La première assertion est une conséquence facile de Hausdorff. Pour l'autre, on montre qu'on a $S \sim S - T$. Pour cela, on trouve une rotation r telle que l'on ait, pour $x, y \in T$, distincts et $n \in \mathbf{N}^*$, $r^n x \neq y$ (ça existe!). On utilise alors l'astuce $\mathbf{N} \sim \mathbf{N} - \{0\}$ vue en 3.8 avec la réunion des $r^n(T)$.

On en déduit déjà la multiplication des pains :

7.5 Lemme. *Soient B, B', B'' trois boules disjointes de rayon 1. On a $B \sim B' \cup B''$.*

Démonstration. Cela résulte du cas des sphères en attachant les rayons au bord. Attention tout de même à l'origine !

³²Ce n'est pas tout à fait vrai car il y a des éléments récalcitrants : a, b, b^2, I , mais il n'est pas difficile de les faire rentrer dans le rang en utilisant la même astuce qu'en 3.8 : \mathbf{N} est en bijection avec $\mathbf{N} - \{0\}$, voir annexe. De toutes façons, une idée aussi simple et naturelle que celle-là marche forcément !

Pour finir de montrer le paradoxe, il suffit de montrer que si B est une boule fermée de rayon R contenue dans une partie bornée X on a $B \sim X$. Pour cela on recouvre X par un nombre fini de boules de rayon R et on utilise la variante suivante du théorème de Cantor-Bernstein, voir annexe :

7.6 Lemme. *Si on a $X' \subset X$ et $Y' \subset Y$ avec $X \sim Y'$ et $Y \sim X'$, on a aussi $X \sim Y$.*

7.7 Remarque. On peut évidemment mettre en doute le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski en refusant l'axiome du choix, et les débats sur ce sujet entre les mathématiciens ont été vifs au début du XX-ième siècle. Le lecteur méditera cependant le résultat suivant de Dougherty et Foreman (cf. [DG]), qui ne nécessite pas l'axiome du choix : *Si A et B sont deux ouverts bornés non vides de \mathbf{R}^3 , ils sont "presque équivalents" au sens suivant : il existe des ouverts disjoints A_1, \dots, A_n (resp. B_1, \dots, B_n) de A (resp. de B) et des isométries u_i de A_i sur B_i tels que $A_1 \cup \dots \cup A_n$ (resp. $B_1 \cup \dots \cup B_n$) soit partout dense dans A (resp. dans B). Pour reprendre la métaphore de la pomme et de la lune, on peut trouver un découpage qui passe de l'une à l'autre en ne laissant dans chacune qu'un trognon d'intérieur vide!*

8 Retour au plan : la quadrature du cercle

Nous revenons dans ce dernier paragraphe au problème de Tarski. Contrairement à plus d'un siècle de propagande mensongère, la quadrature du cercle est possible :

8.1 Théorème. (Laczkovich, 1990) *Un disque est équivalent à un carré par découpage et recollement.*

8.2 Remarques.

1) Bien entendu, il ne s'agit pas d'une construction à la règle et au compas et l'impossibilité de la quadrature du cercle au sens usuel n'est donc pas remise en cause. Tout de même, ce résultat est étonnant. Évidemment, il utilise l'axiome du choix³³ et il faut beaucoup de morceaux (10^{40} environ), voir [Laczkovich1] ou l'excellent panorama de [Laczkovich2] !

³³De la même façon que dans la preuve de Hausdorff : il s'agit de choisir un élément dans chaque classe modulo un certain sous-groupe.

2) La méthode de Laczkovich utilise des suites de faible discrédance³⁴ (c'est-à-dire bien réparties) et elle s'applique plus généralement à des parties Lebesgue-mesurables et de mesure > 0 dont la frontière est "assez petite" (de dimension fractionnaire < 2), par exemple un convexe ou l'intérieur d'une courbe de Jordan rectifiable. En revanche, le même Laczkovich a montré en 2003 qu'il existe des parties $A, B \subset \mathbf{R}^2$, limitées par des courbes de Jordan différentiables³⁵, vérifiant $\mu(A) = \mu(B)$ et pourtant non équidécomposables (voir [Laczkovich3]).

3) Un exemple analogue est le problème suivant : *Existe-t-il un découpage fini permettant de passer du segment $[0, 1/2]$ à la réunion des segments disjoints suivants :*

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right], \left[\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right], \dots, \left[\frac{3^n - 2}{3^n}, \frac{3^n - 1}{3^n}\right], \dots$$

La réponse est positive en vertu des résultats de Laczkovich.

9 Annexe : retour sur quelques preuves

9.1 Histoires de clans

9.1.1 Un exemple pour inciter à la prudence

On pourrait penser que si une mesure μ est définie sur une partie de $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ qui n'est pas un clan, on peut prolonger μ au "clan engendré". L'exemple suivant montre qu'il n'en est rien. On prend pour \mathcal{Q} l'ensemble des carrés de \mathbf{R}^2 et, si K est un carré de côté a , on pose $\mu(K) = f(a)$ où f est une fonction arbitraire de \mathbf{R}^+ dans \mathbf{R}^+ , par exemple celle qui est nulle partout sauf en 1 où elle vaut 1. La condition 1) est vide (l'union de deux carrés disjoints n'en est jamais un) et 2) est clairement vérifiée. Pourtant il est clair que l'on ne peut étendre, en général, cette mesure au clan engendré par les carrés. En effet, on voit aussitôt que ce clan contient les segments, comme intersections de deux carrés. Ces segments sont de mesure nulle par 1.8 et il en résulte que le carré de côté 2 est de mesure 4 par découpage, ce qui est absurde (il est de mesure $f(2) = 0$).

³⁴Cette notion est très utilisée en probabilités et notamment dans les méthodes de Monte-Carlo. De façon très grossière, la discrédance mesure la différence entre la probabilité théorique et la probabilité empirique donnée par la fréquence.

³⁵et même C^∞ partout sauf en un point !

9.1.2 Si je n'y suis, Dieu veuille m'y mettre

On travaille (par exemple) dans le plan et on suppose qu'on a un clan \mathcal{Q} sur lequel est définie une mesure μ . Il s'agit de faire rentrer les segments dans le clan \mathcal{Q} s'ils n'y sont pas au départ. Pour cela, on considère l'ensemble \mathcal{C}_0 des réunions finies de segments (éventuellement réduits à un point), puis l'ensemble \mathcal{C} des parties contenues dans une partie de \mathcal{C}_0 . On montre sans difficulté que \mathcal{C} est un clan. On considère alors la famille \mathcal{M} des parties de la forme $(A - C) \cup B$ où A est dans \mathcal{Q} et B, C dans \mathcal{C} .

9.1 Lemme. *La famille \mathcal{M} est un clan qui contient \mathcal{Q} et \mathcal{C} .*

Démonstration. Le calcul est un peu laborieux. On considère deux parties $M_i = (A_i - C_i) \cup B_i$ ($i = 1, 2$) de \mathcal{M} et il s'agit de montrer que $M_1 \cup M_2$ et $M_1 - M_2$ sont dans \mathcal{M} .

Pour la réunion, on montre que $M_1 \cup M_2$ est égal à $((A_1 \cup A_2) - D) \cup (B_1 \cup B_2)$ avec $D = (C_1 \cap A_2^c) \cup (C_2 \cap A_1^c) \cup (C_1 \cap C_2)$ et, comme D est dans \mathcal{C} , on a gagné.

Pour la différence, on montre que $M_1 - M_2$ s'écrit :

$$((A_1 - A_2) - (C_1 \cup B_2)) \cup (B'_1 \cup C'_2)$$

avec $B'_1 \subset B_1$ et $C'_2 \subset C_2$ et on a gagné aussi.

9.2 Proposition. *Avec les notations précédentes, on peut prolonger μ sur \mathcal{M} en posant $\mu((A - C) \cup B) = \mu(A)$.*

Démonstration. C'est une vérification triviale.

9.2 Le volume du cône

L'exercice suivant est proposé aux étudiants de CAPES (pour l'épreuve sur dossier).

Soit C un cône de base B et de sommet O . On suppose que B est un disque de centre A et de rayon R et que O est situé sur la perpendiculaire au plan de B passant par A . On note $h = OA$ la hauteur du cône. On se propose de calculer le volume $V(C)$. On choisira un repère orthonormé de l'espace d'origine O et tel que le plan de B soit le plan $Z = h$.

0) Soit C_z l'intersection de C avec le plan $Z = z$. Calculer l'aire $S(z)$ de C_z .

1) La méthode du physicien.

a) Soit $dV(z)$ le volume du tronc de cône situé entre les hauteurs z et $z+dz$ (dz est supposé petit, voire "infinitésimal"). Calculer $dV(z)$ en considérant

que le tronc de cône est assimilable à un cylindre de base C_z et de hauteur dz .

b) Le volume du cône est la “somme” des volumes des troncs de cône infinitésimaux, ce que le physicien écrit $V(C) = \int_0^h dV(z)$. Calculer $V(C)$.

2) La justification mathématique.

On considère la partie $C_{\leq z}$ de C située au-dessous du plan $Z = z$. Soit $V(z)$ son volume.

a) Soient z_0 et z deux réels de $[0, h]$ et supposons, pour fixer les idées, $z_0 < z$. Montrer que la partie $C_{\leq z} \setminus C_{\leq z_0}$ est comprise entre deux cylindres que l'on précisera. En déduire un encadrement de $V(z) - V(z_0)$.

b) Montrer que la dérivée $V'(z_0)$ existe et est égale à $S(z_0)$. Comparer au résultat de 1.a.

c) Calculer $V(C)$.

9.3 L'invariant de Dehn

Le résultat 6.5 du texte résulte de deux lemmes :

9.3 Lemme. *Un élément $t = a \otimes \theta$ de $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z})$, avec $a \neq 0$, est nul si et seulement si θ/π est rationnel.*

Démonstration. Si on a $\theta = \frac{p}{q}\pi$, on écrit $t = q\frac{a}{q} \otimes \frac{p}{q}\pi = \frac{a}{q} \otimes p\pi = \frac{a}{q} \otimes 0 = 0$.

La réciproque est plus délicate et nous en donnons deux preuves. Supposons θ/π irrationnel et montrons que $a \otimes \theta$ est non nul.

Preuve numéro 1

Il faut connaître la propriété universelle du produit tensoriel qui dit, en particulier, que si on a deux homomorphismes de groupes $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Q}$ et $g : \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$ on en déduit un homomorphisme $f \otimes g : \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Q}$ qui vérifie $(f \otimes g)(a \otimes \theta) = f(a)g(\theta)$. On aura gagné si on trouve f et g tels que $f(a) = g(\theta) = 1$. Dans les deux cas on utilise l'existence de bases de \mathbf{R} comme \mathbf{Q} -espace vectoriel. Pour le premier on complète a en une base et on envoie toute la base sur 0 sauf a qu'on envoie sur 1. Pour le second, comme π et θ sont indépendants sur \mathbf{Q} , on les complète en une base et on envoie π sur 0 et θ sur 1. Cet homomorphisme se factorisant par $\pi\mathbf{Z}$, on a gagné.

9.4 Remarque. Cette preuve n'est pas très satisfaisante car elle utilise l'axiome du choix pour affirmer l'existence d'une base de \mathbf{R} sur \mathbf{Q} .

Preuve numéro 2

La seconde preuve n'utilise pas l'axiome du choix mais elle demande quelques connaissances d'algèbre commutative.

On désigne encore par θ un nombre incommensurable à π et on considère l'injection de groupes abéliens $i : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ qui à 1 associe θ . On tensorise par \mathbf{R} sur \mathbf{Z} . Comme l'anneau \mathbf{Z} est principal et que le \mathbf{Z} -module \mathbf{R} est sans torsion, il est plat, de sorte que $\mathbf{R} \otimes i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z})$ est encore injectif (voir [Bourbaki]). L'image de a est alors $a \otimes \theta$ qui est donc non nul.

Voici une autre preuve de 6.6, peut-être plus facile à généraliser :

9.5 Lemme. *Soit θ un réel tel que $\cos \theta = 1/3$ (resp. $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$). Alors θ/π est irrationnel.*

Démonstration. Supposons $\theta = \frac{p}{q}\pi$ et posons $\zeta = e^{i\theta}$. On a alors $\zeta^{2q} = 1$, de sorte que ζ est entier sur \mathbf{Z} . Par ailleurs, on a $\sin \theta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$, de sorte que ζ est dans $\mathbf{Q}[i\sqrt{2}]$, donc dans $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$ qui en est l'anneau des entiers. Mais cela contredit le fait que $\cos \theta$ vaut $1/3$.

Le cas $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$ en résulte en notant que $\cos(\pi - 2\theta)$ est alors égal à $1/3$.

On a enfin le lemme suivant (cf. 6.11) :

9.6 Lemme. *Soit n un entier non nul. La multiplication par n est une injection de $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$.*

Démonstration. Désignons par μ_n la multiplication par n dans $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$. Son noyau est le groupe cyclique engendré par π/n et on a donc la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z} \xrightarrow{\mu_n} \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

Comme \mathbf{R} est plat sur \mathbf{Z} , on en déduit, après tensorisation, la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z} \xrightarrow{\mu_n} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z} \rightarrow 0,$$

mais, on a $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \simeq \mathbf{R}/n\mathbf{R} = 0$, d'où la conclusion.

9.4 Hausdorff-Banach-Tarski

9.4.1 Une indication pour la preuve de 7.3

L'existence est facile. Pour l'unicité il faut montrer par récurrence sur k qu'un produit du type $c = b^{n_1}a \cdots b^{n_k}a$ avec $n_i = 1$ ou $n_i = 2$ est de la forme ci-dessous :

$$\frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3\sqrt{3} \\ q_1 & p_4 & q_2\sqrt{3} \\ q_3\sqrt{3} & p_5\sqrt{3} & q_4 \end{pmatrix}$$

avec $p_i, q_i \in \mathbf{Z}$, p_i pair et q_i impair. On en déduit que c ne peut être égal à I ou a .

9.4.2 Indications pour la construction de A, B, C

On appelle A_0, B_0, C_0 l'ensemble des mots qui commencent par a, b, b^2 respectivement. On cherche des parties A, B, C , qui forment une partition de G et vérifient $B = bA, C = bB = b^2A$ et $A = a(B \cup C)$.

L'idée fondamentale est encore le fait que \mathbf{N} est en bijection avec $\mathbf{N} - \{0\}$ par $n \mapsto n + 1$. Pour trouver un ensemble qui ressemble à \mathbf{N} on prend un élément d'ordre infini de G , par exemple b^2a (il est bien d'ordre infini, pourquoi ?) et on appelle N le "monoïde" engendré :

$$N = \{I, b^2a, (b^2a)^2, (b^2a)^3, \dots, (b^2a)^n, \dots\}$$

On note que $N - \{I\}$ est contenu dans C_0 , aN dans A_0 et baN dans B_0 . De plus, on notera que l'on a $bN = aN \cup \{b\}$: voilà comment rajouter l'élément b !

Maintenant, on modifie A_0, B_0, C_0 comme suit : on leur retranche aN, baN et $N - \{I\}$ que l'on remplace respectivement par les ensembles N, aN, baN . On vérifie qu'on obtient A, B, C comme annoncé.

9.4.3 Cantor-Bernstein revu par Banach-Tarski

Le lecteur adaptera la preuve suivante du théorème de Cantor-Bernstein ordinaire. On a des bijections $f : X \rightarrow Y' \subset Y$ et $g : Y \rightarrow X' \subset X$, d'où $f^{-1} : Y' \rightarrow X$ et $g^{-1} : X' \rightarrow Y$ et il s'agit de construire une bijection Φ de X sur Y . On part de $x \in X$ et on applique, tant qu'on peut, g^{-1} , puis f^{-1} , puis g^{-1} , etc. On partage X en trois sortes de points suivant que le processus s'arrête sur X , sur Y , ou ne s'arrête pas et on définit Φ sur cette partition.

10 Références

- [Agreg] Problème d'agrégation (mathématiques générales), 1985.
- [Banach] Banach S., *Sur le problème de la mesure*, Fond. Math. 4, 1923, p. 7-33, ou Banach, œuvres complètes.
- [Banach-Tarski] Banach S., Tarski A., *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fond. Math. 6, 1924, p. 244-277, ou Banach, œuvres complètes.
- [Bekker] Bekker B., *Partage d'un carré en triangles d'aires égales*, L'Ouvvert (IREM de Strasbourg), 76 (1994), p. 17-20.
- [Boltianski.1] Boltianskii V., *Equivalent and equidecomposable figures*, D.C. Heath and company, 1963.

[Boltianski.2] Boltianskii V. *Hilbert's third problem*, Winston & sons, 1978.

[Bourbaki] Bourbaki N., *Algèbre commutative, chapitre 1*, Hermann, 1961.

[CAPES] Deuxième épreuve de la session 2004 du CAPES externe.

[Cartier] Cartier P., *Décomposition des polyèdres : le point sur le troisième problème de Hilbert*, Séminaire Bourbaki, 1984-85, numéro 646.

[DG] Dougherty R. et Foreman M., *The Banach-Tarski paradox using pieces with the property of Baire*, Proc. Nat. Acad. Sci. 89 (1992), p. 10726-28.

[Euclide] Euclide, *Les éléments*, Traduction et présentation de Georges Kayas, Éd. du CNRS, 1978.

[Guinot] Guinot M., *Le paradoxe de Banach-Tarski*, Aleas, Lyon (1991).

[GS] Grandemange P. et Schwartz P., *Aspects classiques du troisième problème de Hilbert*, Gazette des mathématiciens, 52, avril 1992.

[Hadamard] Hadamard J., *Leçons de géométrie, IGéométrie plane*, 8-ème éd., Armand Colin, 1988.

[Hausdorff] Hausdorff F., *Bemerkung über den Inhalt den Punktmengen*, Math. Ann., 75, 1914, p. 23-28.

[Hilbert] Hilbert D., *Les fondements de la géométrie*, Dunod, 1971.

[HMC] *Histoire des mathématiques pour les collèges*, CEDIC, 1980.

[Kahane] (dirigé par) Kahane J.-P., *L'enseignement des sciences mathématiques*. Rapport d'étape de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, Odile Jacob, 2002.

[Laur] Laur A., *Démontrer par les aires*, Bull. APMEP 463, mars-avril 2006.

[Laczkovich1] Laczkovich M., *Equidecomposability and discrepancy ; a solution of Tarski's circle-squaring problem*, J. reine angew. Math. 404, 1990, p. 77-117.

[Laczkovich2] Laczkovich M., *Paradoxical Decompositions : A Survey of Recent Results*, European Congress of Mathematics, Vol. II, Progress in Math. 120, Birkhäuser, Basel, 1994.

[Laczkovich3] Laczkovich M., *Equidecomposability of Jordan domains under groups of isometries*, Fund. Math. 177, numéro 2, 2003, p. 149-171.

[Lebesgue] Lebesgue H., *La mesure des grandeurs*, Librairie A. Blanchard, Paris 1975.

[ME] Perrin D., *Mathématiques d'École*, Cassini, 2005.

[Perrin1] Perrin D., *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie affine du collège*, Bull. APMEP 431, novembre 2000.

[Perrin2] Perrin D., *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations*. Actes du colloque Inter-IREM premier cycle, Montpellier, juin 2001.

[Perrin3] Perrin D. *Autour du théorème de Thalès*, conférence IREM Paris 7, 17 mai 2006.

[Robinson] Robinson R.M., *On the decomposition of spheres*, Fund. Math. 34, 1947, p. 246-260.

[Sydler] Sydler J.-P., *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, Comment. Math. Helv., 40, 1965, p. 43-80.

[Von Neumann] Von Neumann J., *Zur allgemeinen Theorie des Masses*, Fund. Math. 13, 1929, p. 73-116.

[Wagon] Wagon S., *The Banach-Tarski paradox*, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 24, Cambridge, 1985.