

Le texte qui suit est une **version provisoire** de ma conférence du 13 octobre 2004 à l'IREM de Paris 7 sur le théorème de Pascal.

Il s'agit en quelque sorte de mes notes. Il y a à la fois plus de choses que dans la version orale (la partie géométrie algébrique) et moins (les animations Cabri).

Daniel Perrin  
Mathématiques, Bureau 219, Bât. 425,  
Université Paris-Sud, 91405 ORSAY Cedex

[Daniel.Perrin@math.u-psud.fr](mailto:Daniel.Perrin@math.u-psud.fr)

# Le théorème de Pascal :

## quelques approches

*Le point de départ de cet exposé est un article de François Rideau (publié dans Quadrature numéro 51), dans lequel il rassemble de nombreuses preuves du théorème de Pascal, toutes plus jolies les unes que les autres. Je me propose de reprendre et de compléter son point de vue sur ce magnifique théorème, avec mes propres obsessions.*

### 1 Introduction

Ce texte a plusieurs objectifs. Le premier et le plus important est de faire de la géométrie. Le théorème de Pascal est un beau théorème et j'essaierai d'en convaincre le lecteur, notamment en montrant de nombreuses figures. Il y a ensuite plusieurs objectifs mathématiques et didactiques : montrer comment le programme d'Erlangen donne une lecture plus simple de ce résultat en le situant dans son cadre projectif, expliquer comment on peut en donner une preuve naturelle en utilisant un invariant approprié (ici le birapport), puis comment l'interpréter comme une relation entre des invariants, proposer, enfin, une généralisation du théorème de Pascal du côté de la géométrie algébrique.

#### 1.1 Le théorème euclidien

Le théorème de Pascal le plus élémentaire est le suivant :

**1.1. Théorème.** *On travaille dans le plan affine euclidien. Soit  $C$  un cercle et soient  $a, b, c, a', b', c'$  six points distincts de  $C$ . On suppose que les droites  $(bc')$  et  $(b'c)$  (resp.  $(ca')$  et  $(c'a)$ , resp.  $(ab')$  et  $(a'b)$ ) se coupent en  $u$  (resp.  $v$ , resp.  $w$ ). Alors,  $u, v, w$  sont alignés.*

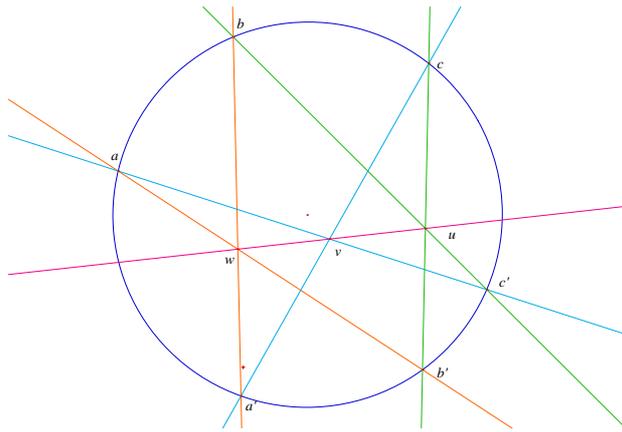


Figure 1

## 1.2 Énoncé projectif

Dans la figure précédente, le cercle est en fait une conique et si l'on déplace le point  $c$  elle se transforme en ellipse ou en hyperbole, mais l'expérience montre que le théorème reste vrai, cf. figures 2 et 3. On peut l'énoncer ainsi, pour peu qu'on comprenne les mots :

**1.2. Théorème.** *On travaille dans le plan projectif réel<sup>1</sup>. Soit  $C$  une conique (projective) propre et soient  $a, b, c, a', b', c'$  six points distincts de  $C$ . Les droites  $(bc')$  et  $(b'c)$  (resp.  $(ca')$  et  $(c'a)$ , resp.  $(ab')$  et  $(a'b)$ ) se coupent en  $u$  (resp.  $v$ , resp.  $w$ ). Alors,  $u, v, w$  sont alignés.*

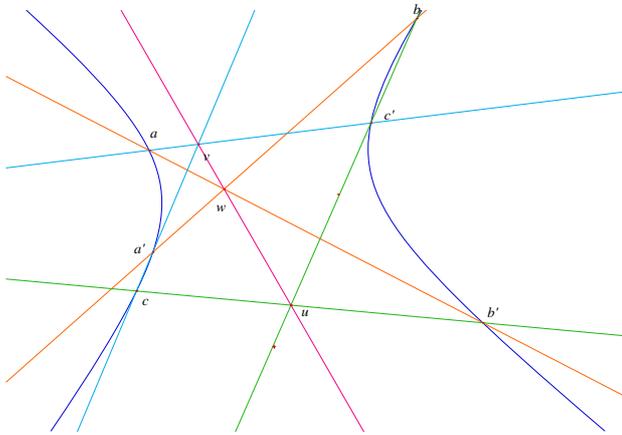


Figure 2

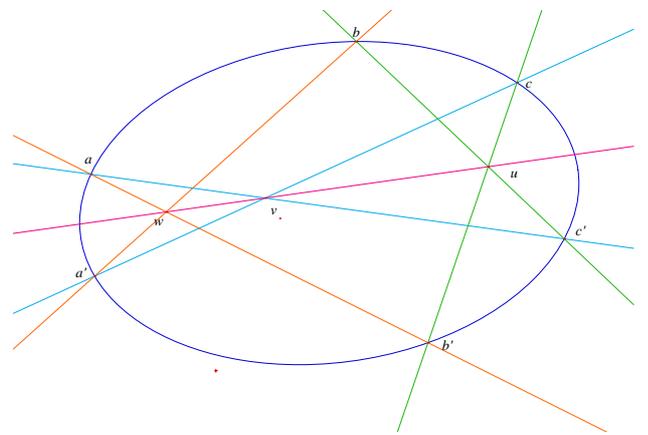


Figure 3

### 1.3. Remarques.

1) Lorsque la conique est impropre il y a encore un théorème : c'est Pappus,

<sup>1</sup>Mais ce qui suit vaut sur n'importe quel corps commutatif de caractéristique différente de 2.

cf. figure 4.

2) Le résultat reste valable lorsque certains des points coïncident, cf. annexe, à condition de remplacer les sécantes par des tangentes. Par exemple, si on a  $a = b'$ , la droite  $(ab')$  est remplacée par la tangente en  $a$ . C'est même un procédé de construction de la tangente en un point à une conique. cf. figure 5.

3) Il y a aussi un théorème dual avec 6 tangentes au lieu de 6 points : c'est le théorème de Brianchon, cf. figure 6.

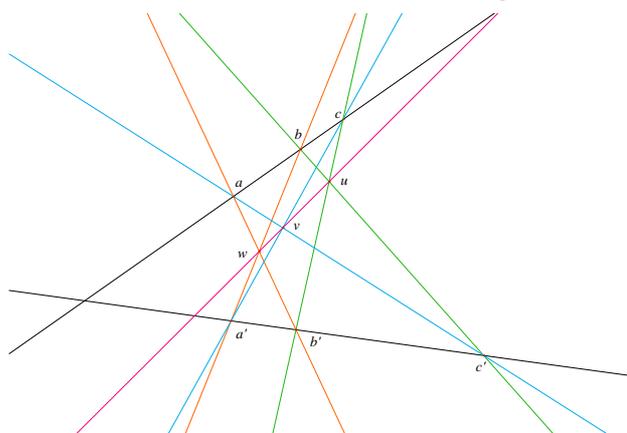
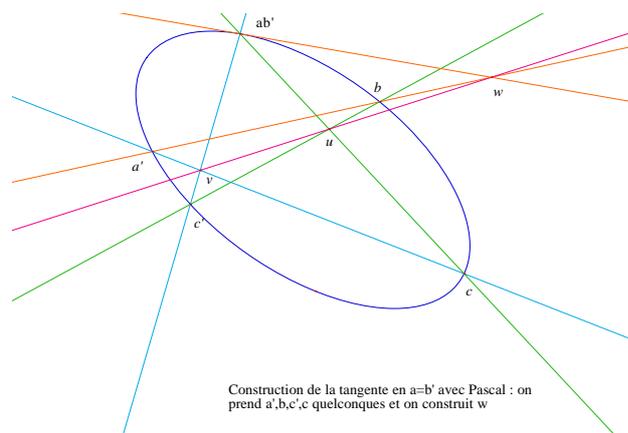


Figure 4



Construction de la tangente en  $a=b'$  avec Pascal : on prend  $a', b', c', c$  quelconques et on construit  $w$

Figure 5

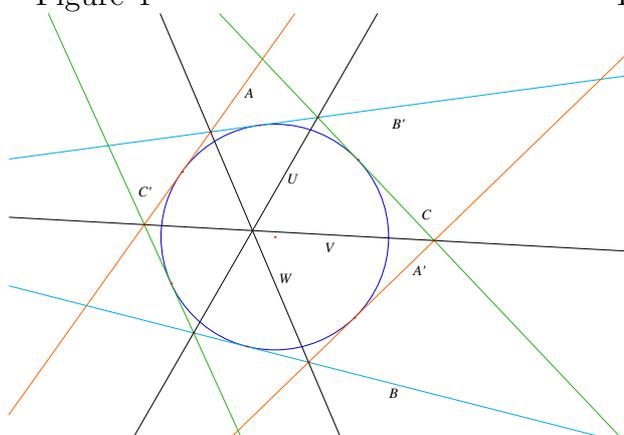


Figure 6

Il faut maintenant expliquer les mots de ce théorème.

### 1.3 Qu'est-ce qu'un plan projectif ?

Il y a de nombreuses façons de comprendre ce qu'est un plan projectif réel. Je me contenterai dans un premier temps de la plus rudimentaire : on part du plan euclidien et on lui ajoute des points à l'infini. Précisément on ajoute à chaque droite un unique point à l'infini qui correspond à sa direction, les points à l'infini rajoutés formant eux-mêmes une droite. L'objectif est d'avoir un plan avec les relations d'incidence usuelles, mais sans exception : par deux points passe une droite et une seule, deux droites distinctes se coupent toujours en un point (les anciennes parallèles ont un unique point commun à l'infini : leur direction commune).

**1.4. Remarque.** L'énoncé projectif du théorème de Pascal donne aussitôt un certain nombre d'énoncés affines dans des cas de parallélisme. Par exemple, si  $(ab')$  et  $(a'b)$  sont parallèles, cela signifie que  $w$  est à l'infini. Si les points  $u, v$  sont à distance finie, la droite  $(uv)$  passera par  $w$ , c'est-à-dire sera parallèle à  $(ab')$  et  $(a'b)$ . Si  $v$  est à l'infini aussi, i.e. si  $(ac')$  et  $(a'c)$  sont parallèles, il en est de même de  $u$  :  $(bc')$  et  $(b'c)$  sont parallèles, cf. figures 7 et 8.

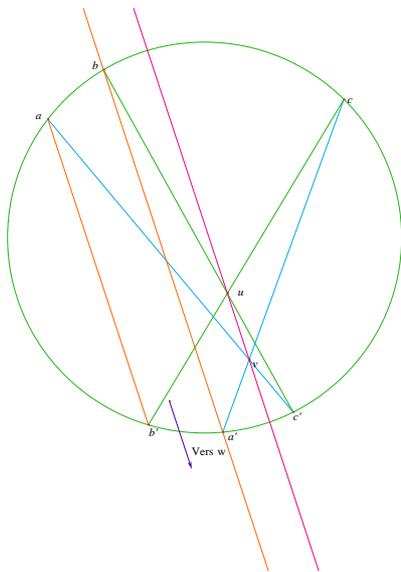


Figure 7

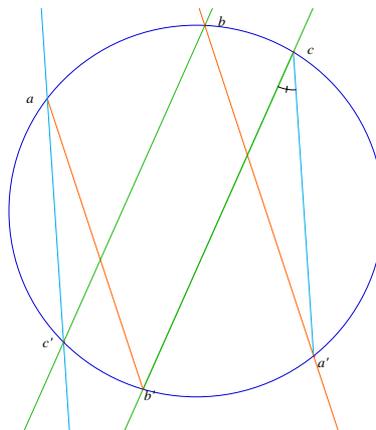


Figure 8

Aussi importants que les objets : les morphismes. Ici, les bonnes applications entre plans projectifs sont les bijections qui transforment une droite en une droite (les collinéations<sup>2</sup>). Comme exemples de collinéations d'un

<sup>2</sup>Pour ceux qui connaissent, sur les réels ce sont aussi les homographies, mais ce n'est pas un résultat

plan projectif  $\mathbf{P}$  dans un autre  $\mathbf{P}'$ , outre les applications qui prolongent les isométries, voire les applications affines, il y a les perspectives ou projections centrales, et leurs composées. Pour décrire une telle application, on suppose  $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$  plongés dans un espace projectif de dimension 3, on choisit un point  $o$  non situé sur les plans et la perspective  $p_o$  de  $\mathbf{P}$  sur  $\mathbf{P}'$  associe à  $m \in \mathbf{P}$  l'unique point d'intersection  $m'$  de  $(om)$  avec  $\mathbf{P}'$ . Il est clair que ces applications conservent l'alignement. On montre que toute collinéation est composée de perspectives.

## 1.4 Qu'est-ce qu'une conique projective ?

Comme l'expérience avec Cabri le montre clairement, le théorème de Pascal requiert d'unifier les divers types de coniques (cercle, ellipse, parabole, hyperbole) en une seule notion, celle de conique projective. Il faut donc banir les définitions qui spécialisent les divers types de coniques.

La définition historique et étymologique consiste à voir toutes les coniques comme les diverses sections planes des cônes à base circulaire. Il est clair alors que les coniques sont exactement les images des cercles par les perspectives (ou projections centrales). Du point de vue projectif, toutes les coniques sont donc équivalentes.

# 2 La preuve par Erlangen

## 2.1 Le principe

Il peut être exprimé en une phrase :

*Le théorème de Pascal est un résultat projectif (c'est-à-dire qu'hypothèses et conclusion restent vraies quand on applique une collinéation). De plus, toute conique est image d'un cercle par une collinéation. Il suffit donc de le prouver dans le cas du cercle.*

### 2.1.1 Mise en œuvre du principe

Supposons Pascal démontré lorsque la conique est un cercle et montrons le résultat général. Soit  $C$  une conique avec les six points  $a, \dots, c'$ . Il existe une perspective  $f$  qui envoie  $C$  sur un cercle  $\Gamma$ . Cette perspective envoie les

---

trivial.

points  $a, \dots, c'$  sur  $\alpha, \dots, \gamma'$ . Si on appelle  $\xi, \eta, \zeta$  les intersections de  $(\beta\gamma')$  et  $(\beta'\gamma)$ , etc., le théorème de Pascal appliqué au cercle montre que  $\xi, \eta, \zeta$  sont alignés. Mais, comme la perspective inverse  $f^{-1}$  conserve l'alignement, les images de  $\xi, \eta, \zeta$ , qui sont  $u, v, w$ , sont alignées.

**2.1. Remarque.** En toute rigueur, il faut montrer non seulement le théorème de Pascal sur le cercle, mais aussi ses variantes qui correspondent au cas où certains des points  $\xi, \eta, \zeta$  sont à l'infini. Cela signifie qu'il faut montrer, par exemple :

- si  $\xi$  et  $\eta$  sont à distance finie, mais  $\zeta$  à l'infini, c'est-à-dire  $(\alpha\beta')$  et  $(\alpha'\beta)$  parallèles, alors  $(\xi\eta)$  est parallèle à ces deux droites,
- si  $\xi$  et  $\eta$  sont à l'infini, i.e. si les droites correspondantes sont parallèles,  $\zeta$  y est aussi.

## 2.2 Le cas du cercle : la preuve par les angles

Dans tout ce paragraphe on se donne un cercle  $C$  de centre  $\omega$  et six points distincts  $a, b, c, a', b', c'$  de  $C$ . L'avantage d'être dans le cadre euclidien c'est de pouvoir utiliser les invariants euclidiens, notamment les angles et en particulier le théorème de l'angle inscrit (un théorème essentiel et trop méconnu de la géométrie euclidienne). Je vais donner une preuve utilisant des angles géométriques, plus élémentaire et plus visuelle, mais tributaire du cas de figure. Pour éviter l'examen de trop de cas, il suffit d'utiliser les angles orientés de droites, en donnant un peu à l'aveuglette de grands coups de relation de Chasles, voir annexe.

Rappelons le théorème de l'angle inscrit :

**2.2. Théorème.** Soient  $a, b, c, d$  quatre points de  $C$  et supposons  $c, d$  dans le même arc limité par  $a$  et  $b$ . On a l'égalité d'angles  $\widehat{acb} = \widehat{adb} = \frac{1}{2}\widehat{a\omega b}$ .

Si le rayon du cercle est pris comme unité, on peut mesurer les angles au centre par la longueur de l'arc intercepté et les angles inscrits en sont la moitié. On a un corollaire (connu des collégiens de mon époque, mais totalement oublié depuis), sur les angles intérieurs :

**2.3. Corollaire.** Soit  $m$  un point intérieur au cercle (de rayon 1) et  $A, B$  deux droites passant par  $m$  qui coupent le cercle en  $a, a'$  et  $b, b'$ . Alors l'angle  $\widehat{amb}$  est égal à la demi-somme des arcs  $\widehat{ab}$  et  $\widehat{a'b'}$ .

*Démonstration.* La somme des angles du triangle  $aa'm$  montre qu'on  $\widehat{amb} = \widehat{aa'b} + \widehat{a'ab'}$  d'où le résultat en vertu du théorème de l'angle inscrit.



mais dans le cercle initial  $C$ .

Bien entendu, ce qu'on a fait avec les deux cercles circonscrits à  $abw$  et  $acv$  on peut aussi le faire avec ceux circonscrits à  $abw$  et  $bcu$  par exemple et on aura gagné si on montre que le point  $o$  est le même dans tous les cas, donc qu'il est aussi sur  $(bcu)$ , ce qu'indique clairement la figure.

Pour cela, en vertu de la réciproque de l'angle inscrit, il suffit de montrer qu'on a  $\widehat{boc} = \widehat{buc}$ . Mais, on a  $\widehat{boc} = \widehat{aoc} - \widehat{aob}$  et, par 2.4,  $\widehat{buc} = \widehat{avc} - \widehat{awb}$ . Or, on a  $\widehat{aoc} = \widehat{avc}$  (l'angle inscrit dans  $(acv)$ ) et  $\widehat{aob} = \widehat{awb}$  (l'angle inscrit dans  $(abw)$ ), d'où la conclusion.

### 2.5. Remarques.

1) Il y a quelques cas particuliers passés sous silence ici : le cas où certains des points  $u, v, w$  sont à l'infini, celui où les cercles  $(bcu)$  et  $(cav)$  sont tangents en  $c$ , etc.

2) En fait, et on en reparlera plus loin, il y a un argument général (le principe de prolongement des identités algébriques) qui permet de se limiter à prouver le cas générique de Pascal. Cela fait qu'on peut se permettre de ne pas prouver tous les cas particuliers.

## 2.2.1 Avec les angles orientés

Pour ceux que gêne la profusion des cas de figures de la preuve précédente, voici une preuve qui utilise les angles orientés. On commence encore par l'angle inscrit :

**2.6. Théorème.** *Soient  $a, b, c, d$  quatre points d'un cercle  $C$ . On a l'égalité d'angles orientés de droites (angles modulo  $\pi$ ) :  $(ca, cb) = (da, db)$ .*

La variante du théorème de l'angle inscrit qui s'applique dans la situation de Pascal est la suivante (cf. 2.4) :

**2.7. Lemme.** *On a les égalités d'angles orientés de droites :*

$$(1) \quad s_1 = (a'b, a'c) + (b'c, b'a) + (c'a, c'b) = 0,$$

$$(2) \quad s_2 = (b'c, c'b) + (c'a, a'c) + (a'b, b'a) = 0.$$

*Démonstration.*

1) La somme vaut  $(ab, ac) + (bc, ba) + (ca, cb)$  par le théorème de l'angle inscrit et on conclut par Chasles.

2) Par Chasles on a  $s_2 = s_1 + (b'a, c'b) + (c'b, a'c) + (a'c, b'a) = s_1$ .

Revenons à Pascal. On considère encore les cercles circonscrits aux triangles  $bcu$ ,  $wab$  et  $cav$ . On appelle  $o$  l'intersection des deux premiers autre que  $b$  et on montre qu'elle est sur le troisième en établissant l'égalité d'angles orientés de droites :  $(oa, oc) = (va, vc)$ . Or on a par hypothèse  $(oa, ob) = (wa, wb)$  et  $(ob, oc) = (ub, uc)$ . Vu Chasles, il reste à voir  $(va, vc) = (wa, wb) + (ub, uc)$ , ce qui se traduit par  $(c'a, a'c) = (b'a, a'b) + (c'b, b'c)$ . C'est le point (2) du lemme.

On montre maintenant que  $o$  est aligné avec  $u$  et  $v$  (et de même avec les autres, ce qui prouve Pascal). On a  $(ou, ov) = (ou, oc) + (oc, ov) = (bu, bc) + (ac, av)$  par Chasles et l'angle inscrit. La somme vaut encore  $(bc', bc) + (ac, ac')$ , c'est-à-dire 0 en vertu du théorème de l'angle inscrit, de sorte que les points sont alignés.

### 2.3 D'autres preuves

Pour d'autres preuves (par Ménélaus ou les faisceaux de cercles, etc.) cf. Rideau. Pour Pappus, on peut par exemple utiliser Ménélaus, mais je trouve que c'est un peu à l'envers.

Et maintenant, une page de publicité : les théorèmes de Pappus et Pascal en hyperbolique dans le disque de Poincaré, en utilisant les macros d'Y. Martin. Voir Cabri 19-22

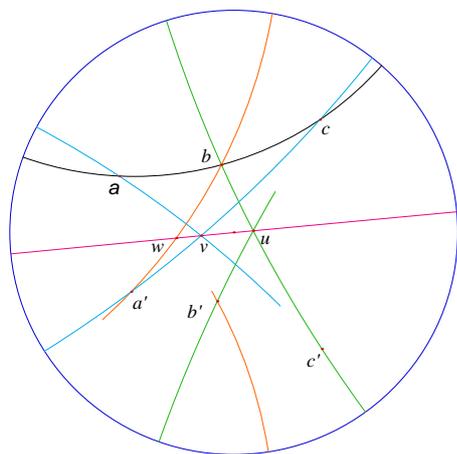


Figure 10

Pascal dans le disque de Poincaré

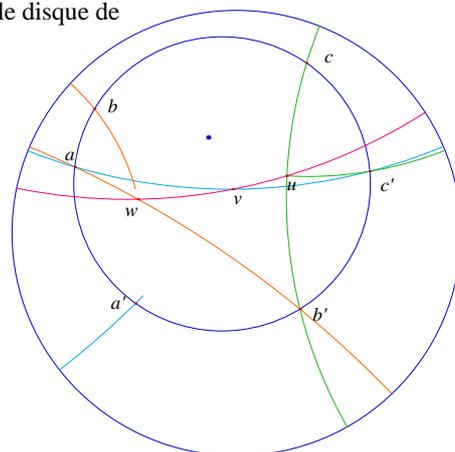


Figure 11

### 3 La preuve par le birapport

Dans cette section, nous présentons la preuve géométrique sans doute la plus simple, celle qui utilise le birapport. Cette simplicité est morale dans la mesure où cet invariant est l'invariant projectif par excellence (sur une droite, mais une conique, finalement, ce n'est pas très différent d'une droite). Nous adoptons ici un traitement élémentaire qui relie le birapport à la géométrie euclidienne. Pour des variantes plus sophistiquées, cf. [Perrin].

#### 3.1 Longueur, rapport, birapport

On se place tout d'abord dans le plan affine euclidien orienté. Lorsqu'on a une isométrie  $f$  entre deux droites  $D, D'$  du plan (par exemple, une translation, une rotation, une symétrie), elle conserve les longueurs : si on a deux points  $a, b \in D$  et qu'on pose  $a' = f(a), b' = f(b)$ , on a  $ab = a'b'$ . Bien entendu, cela ne subsiste pas si l'application  $f$  est seulement affine (par exemple une projection de  $D$  sur  $D'$  parallèlement à  $\delta$ ), mais ce qui reste vrai (dans le cas de la projection c'est exactement Thalès et dans les autres cas on s'y ramène), c'est la conservation des rapports de longueurs. Si on a trois points  $a, b, c \in D$  et leurs images  $a', b', c'$ , on a  $\frac{ab}{ac} = \frac{a'b'}{a'c'}$ . On a même cette relation avec des mesures algébriques.

Lorsque  $f$  n'est plus affine mais, par exemple, une perspective de centre  $p$  de  $D$  sur  $D'$  (ou projection centrale), définie de manière analogue au cas des plans, cette propriété est en défaut, mais nous allons voir qu'il y a tout de même quelque chose qui est invariant : le birapport. Cette fois nous avons besoin de quatre points.

**3.1. Définition.** Soient  $a, b, c, d$  quatre points alignés<sup>3</sup>, distincts. Le **birapport** de ces quatre points est le réel  $r = [a, b, c, d] = \frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} : \frac{\overline{da}}{\overline{db}}$ . On peut le définir comme le réel dont la valeur absolue est  $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}$  et dont le signe est  $+$  si  $c$  et  $d$  sont dans la même position par rapport à  $a$  et  $b$  (c'est-à-dire tous deux intérieurs à  $[ab]$  ou tous deux extérieurs) et  $-$  sinon.

**3.2. Remarque.** On notera que si on a des points  $a, b, c, d, d'$ , l'égalité des birapports  $[a, b, c, d] = [a, b, c, d']$  implique  $d = d'$ . (C'est le fait qu'il n'y a

---

<sup>3</sup>Ici la droite est affine. Il y a des variantes avec un point à l'infini. On les obtient en faisant "tendre" un point vers l'infini.

qu'un point qui divise un segment dans un rapport algébrique donné, ou encore simplement la définition de l'abscisse d'un point par rapport à un repère formé de deux points de la droite.)

**3.3. Proposition.** Soient  $a, b, c, d$  quatre points d'une droite  $D$  et  $o$  un point n'appartenant pas à  $D$ . On a les formules :

$$|r| = \frac{\mathcal{A}(oca)}{\mathcal{A}(ocb)} : \frac{\mathcal{A}(oda)}{\mathcal{A}(odb)} \quad \text{et} \quad r = \frac{\sin \widehat{coa}}{\sin \widehat{cob}} : \frac{\sin \widehat{doa}}{\sin \widehat{dob}}$$

(dans la deuxième formule, les angles sont orientés :  $\widehat{coa} = (\vec{oc}, \vec{oa})$ ).

*Démonstration.* La première assertion vient de ce que j'appelle le lemme des proportions. Si  $h$  est le projeté orthogonal de  $o$  sur  $D$  on a  $\mathcal{A}(oca) = \frac{1}{2} ca \times oh$  (c'est la formule *base*  $\times$  *hauteur*/2). Le rapport d'aires est donc égal au rapport des bases.

La deuxième assertion en résulte en vertu de la formule qui donne l'aire en fonction du sinus :  $\mathcal{A}(oca) = \frac{1}{2} oc \times oa \sin \widehat{coa}$  et du calcul direct du signe. (On notera que pour quatre demi-droites issues d'un même point et situées dans un même demi-plan, la relation "entre" a un sens.)

Si l'on préfère on peut utiliser le produit vectoriel, ou les aires orientées. Le lemme est le suivant :

**3.4. Lemme.** Soient  $a, b, c$  trois points alignés avec  $b, c$  distincts et  $o$  un point non situé sur la droite  $(bc)$ . Posons  $\lambda = \frac{\overline{ca}}{\overline{cb}}$ . On a l'égalité :  $\lambda = \frac{oa \sin \widehat{coa}}{ob \sin \widehat{cob}}$ .

*Démonstration.* On a  $\vec{ca} = \lambda \vec{cb}$ , et il en résulte  $\vec{oc} \wedge \vec{oa} = \lambda \vec{oc} \wedge \vec{ob}$ , d'où la formule.

**3.5. Corollaire.** Les perspectives conservent le birapport. Précisément, si on a un point  $o$  et quatre droites  $A, B, C, D$  issues de  $o$  et si  $\Delta$  est une droite ne passant pas par  $o$  qui coupe  $A, B, C, D$  en  $a, b, c, d$ , le birapport  $[a, b, c, d]$  ne dépend pas de la sécante et on l'appelle birapport des quatre droites :  $[A, B, C, D]$ .

*Démonstration.* Si les points  $a, a'$ , etc. sont sur les mêmes demi-droites issues de  $o$ , le résultat est clair avec la formule des sinus car le birapport ne dépend que des angles. Sinon, il suffit de noter que le fait passer  $a'$  de l'autre côté de  $o$  (par exemple) change les signes de deux des sinus, donc ne change pas le birapport.

## 3.2 Pappus

Une conséquence de cette conservation du birapport par les perspectives est le théorème de Pappus, variante de Pascal qui correspond au cas d'une conique dégénérée en deux droites.

**3.6. Théorème.** *Soient  $D, D'$  deux droites distinctes sécantes en  $o$  et soient  $a, b, c$  (resp.  $a', b', c'$ ) trois points distincts de  $D$  (resp. de  $D'$ ) et distincts de  $o$ . On appelle respectivement  $u, v, w$  les points d'intersection des droites  $(bc')$  et  $(b'c)$ ,  $(ca')$  et  $(c'a)$ ,  $(ab')$  et  $(a'b)$ . Alors,  $u, v, w$  sont alignés.*

*Démonstration.*

Voir la figure ci-dessous. Appelons  $x$  (resp.  $y$ ) le point d'intersection de  $(a'c)$  et  $(bc')$  (resp. de  $(a'b)$  et  $(ac')$ ). On part de la droite  $(bc')$ . On a, avec les droites issues de  $c$ ,  $r := \llbracket b, x, u, c' \rrbracket = \llbracket cb, cx, cu, cc' \rrbracket$ . En coupant par  $D'$  on en déduit  $r = \llbracket o, a', b', c' \rrbracket$ , puis avec les droites issues de  $a$  :  $r = \llbracket ao, aa', ab', ac' \rrbracket$  et enfin  $r = \llbracket b, a', w, y \rrbracket$  en coupant par  $(ba')$ . Notons  $w'$  l'intersection de  $(uv)$  et  $(ba')$ . La perspective de centre  $v$  donne, elle,  $\llbracket b, x, u, c' \rrbracket = \llbracket b, a', w', y \rrbracket$  et il en résulte  $w = w'$  d'où le résultat.

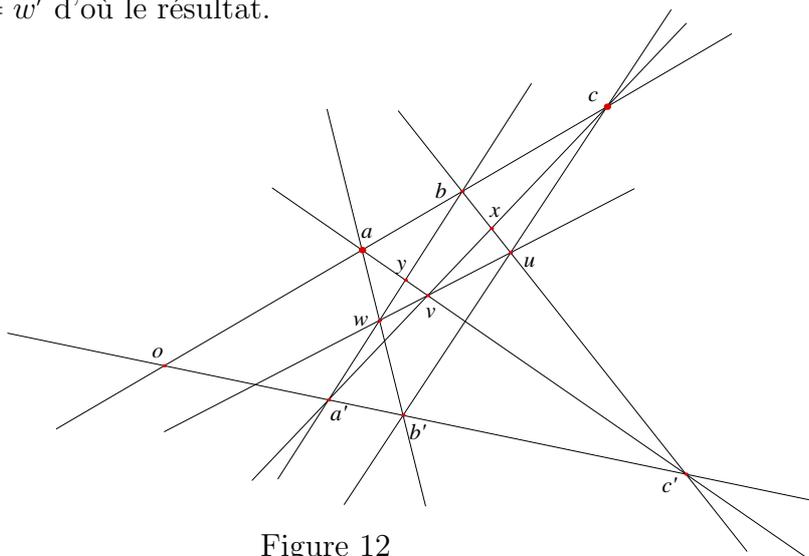


Figure 12

## 3.3 Pascal sur le cercle

Nous pouvons maintenant définir le birapport de quatre points d'un cercle.

**3.7. Proposition-Définition.** *Si  $a, b, c, d$  sont quatre points distincts d'un cercle  $\Gamma$  et si  $o$  est un point de  $\Gamma$ , le birapport  $\llbracket (oa), (ob), (oc), (od) \rrbracket$  est indépen-*

dant du point  $o$ . Ce nombre est par définition le birapport des quatre points  $[a, b, c, d]$  de  $\Gamma$ .

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que si on a deux points  $o, o'$  du cercle, on a  $[(oa), (ob), (oc), (od)] = [(o'a), (o'b), (o'c), (o'd)]$ . Vu la formule des sinus, si  $o$  et  $o'$  sont dans le même arc limité par deux des points  $a, b, c, d$ , c'est le théorème de l'angle inscrit. Si le point  $o$ , par exemple, passe d'un arc à un autre en franchissant un point, disons  $a$ , les angles  $\theta = \widehat{coa}$  et  $\varphi = \widehat{doa}$  sont changés en  $\theta + \pi$  et  $\varphi + \pi$ , et leurs sinus changent de signe. Mais, comme il y a deux changements de signe, le birapport ne change pas.

On en déduit une démonstration du théorème de Pascal en recopiant celle de Pappus ou presque. Avec les mêmes notations pour  $x, y$ , on a les égalités de birapports :  $[[b, x, u, c']] = [[cb, cx, cu, cc']] = [[b, a', b', c']] = [[ab, aa', ab', ac']] = [[b, a', w, y]]$  et on conclut de la même manière, cf. figure 13.

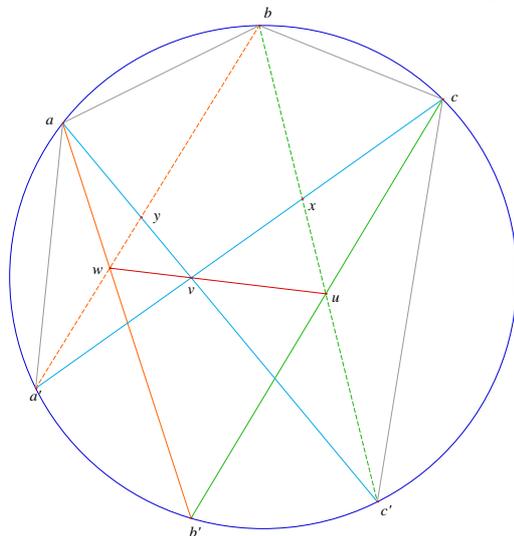


Figure 13

### 3.4 Pascal sur la conique

La preuve est identique, sous réserve qu'on prouve l'analogue de 3.7. Il y a deux voies pour faire cela selon la définition des coniques que l'on adopte. Pour la voie algébrique on trouvera des détails dans [Perrin]. Pour la voie géométrique c'est la notion de perspective qui joue le rôle essentiel.

Soit  $\Gamma$  une conique, section d'une cône  $\mathcal{C}$  par un plan  $P$  de sommet  $o$  et soit  $\Gamma_0$  une section circulaire de  $\mathcal{C}$  par le plan  $P_0$ . Soient  $a, b, c, d$  quatre

points distincts de  $\Gamma$  et soient  $m, m' \in \Gamma$ . Il s'agit de montrer l'égalité de birapports :  $\llbracket ma, mb, mc, md \rrbracket = \llbracket m'a, m'b, m'c, m'd \rrbracket$ . Appelons respectivement  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \mu'$  les intersections des génératrices  $(oa), (ob), (oc), (od), (om), (om')$  avec le plan  $P_0$ . Ces six points sont sur le cercle  $\Gamma_0$ . En vertu de 3.7 on a  $\llbracket \mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma, \mu\delta \rrbracket = \llbracket \mu'\alpha, \mu'\beta, \mu'\gamma, \mu'\delta \rrbracket$ . Nous allons montrer l'égalité de birapports  $\llbracket ma, mb, mc, md \rrbracket = \llbracket \mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma, \mu\delta \rrbracket$  et de même pour les droites passant par  $m'$  et  $\mu'$  ce qui établira le résultat.

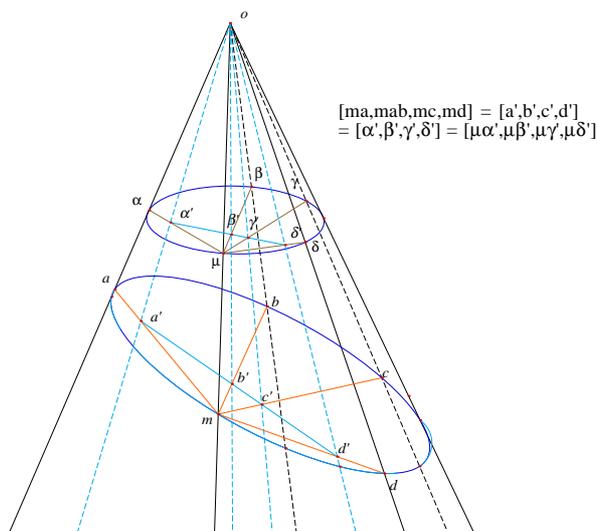


Figure 14

Pour cela, on coupe le cône  $\mathcal{C}$  par un plan  $\Pi$  passant par  $o$ . Ce plan coupe les droites  $(ma), (mb), (mc), (md)$  (resp.  $(\mu\alpha), (\mu\beta), (\mu\gamma), (\mu\delta)$ ) en  $a', b', c', d'$  (resp.  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ ). En vertu de 3.5 on a alors  $\llbracket ma, mb, mc, md \rrbracket = \llbracket a', b', c', d' \rrbracket$  et  $\llbracket \mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma, \mu\delta \rrbracket = \llbracket \alpha', \beta', \gamma', \delta' \rrbracket$ . Mais, l'incidence dans le plan  $\Pi$  donne aussi  $\llbracket (oa'), (ob'), (oc'), (od') \rrbracket = \llbracket a', b', c', d' \rrbracket = \llbracket \alpha', \beta', \gamma', \delta' \rrbracket$ , d'où le résultat.

En effet, les points  $o, a', \alpha'$  par exemple sont alignés sur la droite  $(oma) \cap \Pi$ .

Encore une page de publicité : les théorèmes de Pascal  
et de Pappus en elliptique, toujours avec les macros d'Yves Martin.

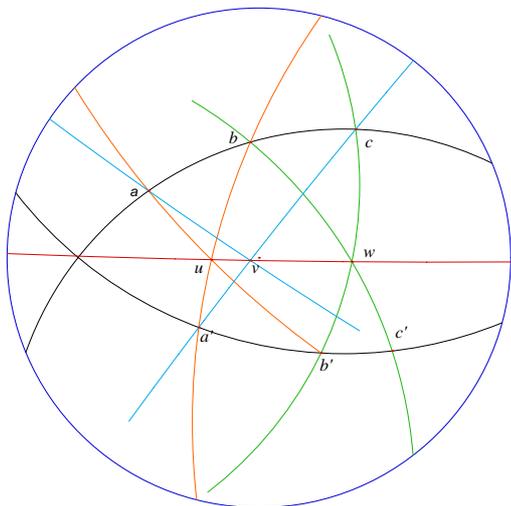


Figure 15

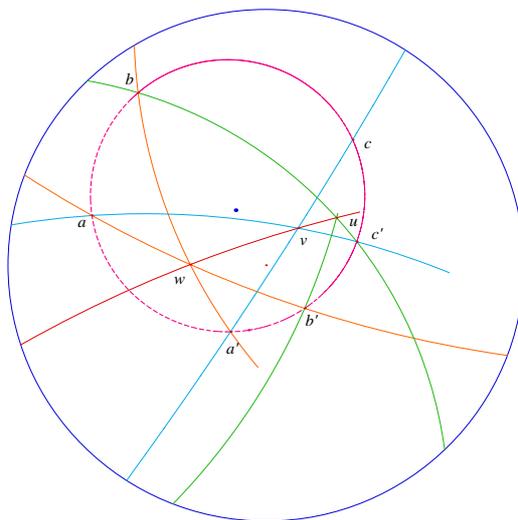


Figure 16

## 4 La preuve via les relations entre les invariants

### 4.1 Introduction

Nous avons vu au paragraphe précédent comment l'invariant birapport fournit une preuve assez satisfaisante du théorème de Pascal. Nous allons aller un peu plus loin ici en expliquant le principe suivant :

*Tout théorème de géométrie s'exprime comme une relation entre des invariants associés à cette géométrie.*

Dans le cas qui nous intéresse, les invariants qui vont intervenir sont les crochets (c'est-à-dire des déterminants), d'ailleurs extrêmement voisins des birapports comme on le verra.

### 4.2 Quelques notations

#### 4.2.1 Le plan projectif

Cette fois, il faut se décider à parler de plan projectif en termes vectoriels. Cela signifie qu'on se donne un espace vectoriel  $E$  de dimension 3 sur un corps  $k$ , muni d'une base  $\mathcal{B}$ . Cet espace est donc isomorphe à  $k^3$  et on note  $(x, y, t)$  les coordonnées de ses points. Le plan projectif  $\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}_k^2$  est le quotient de  $E - \{0\}$  par la relation de colinéarité : on identifie  $m = (x, y, t)$  et  $\lambda m = (\lambda x, \lambda y, \lambda t)$ , c'est pour cela qu'on dit que les coordonnées projectives sont homogènes. Ce plan contient le plan affine  $\mathbf{A}$  des  $(x, y, 1)$  (coordonnées non homogènes) et une droite (projective) à l'infini formée des points  $(x, y, 0)$

(qui correspond aux directions des droites de  $\mathbf{A}$ ). Les droites projectives de  $\mathbf{P}(E)$  sont données par les formes linéaires sur  $E : ux + vy + wt = 0$ ,  $(u, v, w) \in E^*$ . Une telle droite contient à distance finie les points  $(x, y, 1)$  vérifiant  $ux + vy + w = 0$  et à l'infini sa direction, le point  $(v, -u, 0)$ . Comme deux droites d'équations proportionnelles sont identiques, les droites de  $\mathbf{P}(E)$  correspondent donc aux points de  $\mathbf{P}(E^*)$ .

Les coniques sont données par les formes quadratiques non nulles en  $(x, y, t)$  :

$$ux^2 + vy^2 + wt^2 + u'yt + v'tx + w'xy = 0,$$

(seuls les polynômes homogènes définissent quelque chose dans le projectif) une telle forme étant définie à un scalaire près. Par exemple, la parabole  $y = x^2$  est la partie affine de  $YT - X^2 = 0$ , le cercle  $x^2 + y^2 = 1$  la partie affine de  $X^2 + Y^2 - T^2 = 0$

Le groupe associé à ce plan est le groupe  $GL(E)$  des applications linéaires inversibles, qui opère de manière évidente sur les points  $(x, y, t)$ . Comme les coordonnées sont homogènes, les homothéties opèrent trivialement et le groupe pertinent est donc  $PGL(E)$ , quotient de  $GL(E)$  par les homothéties. Les éléments de  $PGL(E)$  s'appellent des **homographies**.

#### 4.2.2 Les crochets

Si  $a, b, c$  sont des vecteurs de  $E$ ,  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $c = (c_1, c_2, c_3)$ , on cherche à traduire le fait que les points correspondants sont alignés dans  $\mathbf{P}(E)$ . Il s'agit de trouver  $(u, v, w)$  non tous nuls tels que l'on ait :  $ua_1 + va_2 + wa_3 = 0$  et de même avec  $b$  et  $c$ . On a donc un système homogène de trois équations à trois inconnues et la condition pour qu'il y ait une solution non triviale c'est la nullité du déterminant. On pose :  $[a, b, c] = \det_{\mathcal{B}}(a, b, c)$ .

Si on a trois formes linéaires  $f, g, h$  de  $E^*$ , elles correspondent à trois droites de  $\mathbf{P}(E)$  et la condition pour que ces droites soient concourantes c'est, de même, que le crochet  $[f, g, h] = \det_{\mathcal{B}^*}(f, g, h)$  soit nul.

##### 4.1. Remarques.

1) On vérifie immédiatement que les crochets sont invariants sous l'action du groupe  $SL(E)$  (et qu'ils sont multipliés par le déterminant sous l'action de  $GL(E)$ ). Cela signifie que, si  $g$  est dans  $GL(E)$ , on a  $[g(a), g(b), g(c)] = \det g [a, b, c]$ . En fait, et c'est l'un des théorèmes fondamentaux de la théorie, ce sont essentiellement les seuls.

2) Les crochets ont un sens géométrique. D'abord, si on prend des points

$a, b, c$  du plan affine le crochet n'est autre que le double de l'aire (orientée) du triangle  $abc$  (l'aire est nulle si et seulement si le triangle est aplati). Ensuite, les crochets sont liés au birapport par la formule :

$$\llbracket (\overline{ma}), (\overline{mb}), (\overline{mc}), (\overline{md}) \rrbracket = \frac{[mac] \times [mbd]}{[mbc] \times [mad]}.$$

Si les points sont dans le plan affine, cette formule n'est autre que celle qui lie aires et birapport, cf. 3.3. On notera que le birapport, contrairement au crochet, est vraiment un invariant projectif car il est invariant non seulement sous  $SL(E)$  mais aussi sous  $PGL(E)$ .

### 4.2.3 Les produits extérieurs

Si on a deux points  $a, b$  distincts de  $\mathbf{P}(E)$ , avec des coordonnées homogènes  $a = (a_1, a_2, a_3)$  et  $b = (b_1, b_2, b_3)$ , on cherche à écrire une équation de la droite  $(ab)$ . Comme on sait que  $m = (x, y, t)$  est sur  $(ab)$  si et seulement si le crochet  $[a, b, m]$  est nul, la formule du développement du déterminant montre que les coefficients de l'équation de  $(ab)$  sont 2-mineurs de la matrice

$$(ab) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

On note  $a \wedge b$  la forme linéaire correspondante :

$$a \wedge b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

De manière duale, si on a deux droites distinctes d'équations  $f, g$ , leur point d'intersection est donné par le vecteur  $f \wedge g$ , défini avec les 2-mineurs de la matrice de  $f$  et  $g$ .

On notera qu'on a  $a \wedge b = 0$  (resp.  $f \wedge g = 0$ ) si et seulement si  $a$  et  $b$  (resp.  $f$  et  $g$ ) sont colinéaires.

## 4.3 La formule du double produit

Les remarques précédentes montrent que le vecteur  $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d)$  définit le point d'intersection des droites  $(ab)$  et  $(cd)$ . Or, ce vecteur est ce qu'on appelle un concomitant sous  $SL(E)$ . Cela signifie que si on applique  $u \in SL(E)$ , la construction précédente "commute à  $u$ ", c'est-à-dire qu'on a la relation :

$$u((a \wedge b) \wedge (c \wedge d)) = (u(a) \wedge u(b)) \wedge (u(c) \wedge u(d))$$

qui traduit la conservation de l'incidence. Un corollaire du théorème fondamental évoqué ci-dessus montre qu'il s'écrit en fonction des invariants, c'est-à-dire des crochets. En fait, ici, on a une formule explicite :

**4.2. Théorème.** *On a la formule :*

$$(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = [a, c, d]b - [b, c, d]a.$$

*Démonstration.* On peut évidemment vérifier la formule par un calcul direct. Un autre argument consiste à noter que, comme les deux membres sont des concomitants sous  $SL(E)$  on peut se limiter à prouver la formule avec  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (0, 1, 0)$ ,  $c = (0, 0, 1)$ ,  $d = (x, y, t)$  et c'est un calcul trivial.

Ce théorème admet une traduction affine : c'est ce que j'appelle le lemme du chevron ! En effet, si on appelle  $m$  le point d'intersection de  $(ab)$  et  $(cd)$ , la formule montre que le rapport  $\overline{ma}/\overline{mb}$  n'est autre que  $[acd]/[bcd]$  c'est-à-dire  $\mathcal{A}(acd)/\mathcal{A}(bcd)$ .

## 4.4 Pascal : la formule magique

Revenons au théorème de Pascal en abordant la question d'une façon un peu différente. On considère 6 points distincts  $a, b, c, a', b', c'$  et les intersections  $u, v, w$  des droites  $(bc')$  et  $(b'c)$  (resp.  $(ca')$  et  $(c'a)$ , resp.  $(ab')$  et  $(a'b)$ ) et la question est de savoir à quelle condition ces trois points sont alignés.

Avec les notations et calculs ci-dessus, cela s'écrit :

$$[(b \wedge c') \wedge (b' \wedge c), (c \wedge a') \wedge (c' \wedge a), (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)] = 0.$$

Mais, on a la formule du double produit qui permet d'écrire cette relation en termes de crochets. Un petit calcul facile donne le résultat :

**4.3. Proposition.** *Soient  $a, b, c, a', b', c' \in E$ . Avec les notations précédentes, on a la formule :*

$$\begin{aligned} & [(b \wedge c') \wedge (b' \wedge c), (c \wedge a') \wedge (c' \wedge a), (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)] = \\ & [a, a', b][a, c, c'][b', a', c'][b', b, c] - [a, a', c'][a, b, c][b', a', b][b', c, c']. \end{aligned}$$

*Démonstration.* On applique la formule du double produit, on a les trois relations :

$$\begin{aligned} (b \wedge c') \wedge (b' \wedge c) &= [b, b', c]c' - [c', b', c]b, \\ (c \wedge a') \wedge (c' \wedge a) &= [c, c', a]a' - [a', c', a]c, \end{aligned}$$

$$(a \wedge b') \wedge (a' \wedge b) = [a, a', b]b' - [b', a', b]a.$$

On développe le crochet en utilisant les propriétés d'alternance du déterminant. Il apparaît les deux termes

$$[b, b', c][c, c', a][a, a', b][c', a', b'] - [c', b', c][a', c', a][b', a', b][b, c, a]$$

et on vérifie que les six autres s'éliminent deux à deux. En utilisant encore l'alternance pour permuter l'ordre des variables dans les crochets on obtient la formule annoncée.

Cette formule ne donne pas encore Pascal, mais déjà son cousin :

**4.4. Corollaire.** *Le théorème de Pappus !!*

*Démonstration.* En effet, dans le cas de Pappus on a  $[a, b, c] = [b', a', c'] = 0$ .

## 4.5 Pascal : l'hypothèse

Il s'agit d'exprimer le fait que les six points  $a, b, c, a', b', c'$  sont sur une même conique. C'est l'objet de la proposition suivante, dans laquelle on particularise deux des points (l'une de nos sécantes, disons  $(ab')$ ) :

### 4.5. Proposition.

- 1) Cinq points de  $\mathbf{P}^2$  sont toujours sur une conique.
- 2) Précisément, soient  $a', b, c, c'$  quatre points de  $\mathbf{P}(E)$  formant repère (i.e. tels que trois quelconques sont non alignés) et soit  $a$  distinct de  $a', b, c, c'$ . Il existe une unique conique  $C$  passant par  $a', b, c, c'$  et par  $a$ . C'est l'ensemble des points  $m$  qui vérifient :

$$[a, a', b][a, c, c'][m, a', c'] - [a, a', c'][a, b, c][m, a', b][m, c, c'] = 0.$$

*Démonstration.* 1) On cherche la conique sous la forme  $ux^2 + vy^2 + wt^2 + u'yt + v'tx + w'xy = 0$ . La question revient à trouver une solution non triviale à un système de cinq équations homogènes en six inconnues : c'est toujours possible.

2) On peut choisir  $a', b, c, c'$  comme repère et on a alors  $a' = (1, 0, 0)$ ,  $b = (0, 1, 0)$ ,  $c = (0, 0, 1)$ ,  $c' = (1, 1, 1)$  et  $a = (\alpha, \beta, \gamma)$ . On cherche la conique sous la forme  $ux^2 + vy^2 + wt^2 + u'yt + v'tx + w'xy = 0$ . On voit qu'on a  $u = v = w = 0$  et les deux relations  $u' + v' + w' = 0$ ,  $\beta\gamma u' + \gamma\alpha v' + \alpha\beta w' = 0$ . Comme  $a$  et  $c'$  ne sont pas proportionnels, il y a une unique solution, à un scalaire près.

Notons que les équations en  $m$  :

$$q_{\lambda,\mu}(m) := \lambda[m, a', c'][m, b, c] + \mu[m, a', b][m, c, c'] = 0$$

sont quadratiques, donc définissent des coniques  $C_{\lambda,\mu}$ . Il est clair que toutes ces coniques passent par les quatre points  $a', b, c, c'$ . En fait, comme  $[m, b, c] = 0$ , par exemple, est une équation de la droite  $(bc)$ , le cas  $(\lambda, \mu) = (1, 0)$  (resp.  $(0, 1)$ ) correspond à la conique dégénérée réunion de droites  $(a'c') \cup (bc)$  (resp.  $(a'b) \cup (cc')$ ) et les coniques proposées sont combinaisons linéaires de celles-là. En écrivant que cette conique passe par  $a$  on obtient les valeurs de  $\lambda, \mu$  de l'énoncé. La conique  $C_{\lambda,\mu}$  est alors l'unique conique passant par les cinq points.

**4.6. Corollaire.** *On considère six points  $a, a', b, c, b', c'$  de  $\mathbf{P}^2$  tels que  $a', b, c, c'$  forment un repère. Ces six points sont sur une même conique si et seulement si on a la relation :*

$$(*) \quad [a, a', b][a, c, c'][b', a', c'][b', b, c] - [a, a', c'][a, b, c][b', a', b][b', c, c'] = 0.$$

*Démonstration.* Cela résulte de la proposition précédente (si  $a$  est égal à l'un des points  $a', b, c, c'$  le résultat est trivial).

**4.7. Corollaire.** *Le théorème de Pascal.*

*Démonstration.* On considère les points  $a', b, c, c'$ . Comme ils sont distincts et que la conique est propre, ils forment un repère. Comme  $a$  et  $b'$  sont sur la conique, on conclut avec  $(*)$  et la formule magique.

**4.8. Remarque.** La condition  $(*)$  n'est autre que l'égalité des birapports :

$$\llbracket aa', ac, ab, ac' \rrbracket = \llbracket b'a', b'c, b'b, b'c' \rrbracket.$$

**4.9. Remarques.**

1) En fait, six points  $a, b, c, a', b', c'$  de  $\mathbf{P}^2$  sont sur une même conique si et seulement si on a la relation  $(*)$ , et ce, indépendamment du fait qu'ils sont "génériques" (par exemple que quatre forment un repère). En effet, la condition revient à l'existence d'une solution non triviale du système de six équations linéaires en  $u, v, w, u', v', w'$ . Elle s'exprime par la nullité d'un déterminant  $\Delta$  qui est un polynôme homogène de degré 12, homogène de degré 2 en chaque paquet de variables correspondant aux points, par exemple  $(a_1, a_2, a_3)$ , etc. La condition  $(*)$  est, elle aussi, la nullité d'un polynôme homogène  $F$  de degré 12, enfin la condition  $a, b, c, d$  formant repère est le

complémentaire du fermé défini par  $G(a, b, c, d) := [a, b, c][a, b, d][a, c, d][b, c, d] = 0$ . On a montré  $V(\Delta) \subset V(F) \cup V(G)$ . Si  $V(\Delta)$  est contenu dans  $V(F)$  ils sont égaux pour une raison de degré. Sinon, c'est qu'il y a un facteur de  $F$  qui est égal à un facteur de  $G$ . Or, les quatre déterminants  $[a, b, c]$ , etc. sont irréductibles (de degré 1 en chaque variable). Il faudrait donc que l'une des hypersurfaces définies par ces déterminants soit contenue dans  $V(\Delta)$  c'est-à-dire formée de sextuplets tracés sur une conique. Or, c'est impossible, par exemple  $[a, b, c] = 0$  signifie  $a, b, c$  alignés et si  $d, e, f$  sont génériques, les six points ne sont pas sur une conique.

2) On a des formules analogues pour exprimer que 10 points sont sur une cubique, etc. En effet, la condition est encore donnée par la nullité d'un déterminant qui est un invariant sous  $SL(E)$  donc s'écrit avec les crochets.

**4.10. Remarque.** Dans le cas où deux des points viennent à coïncider, disons  $c$  et  $b'$ , on a une autre relation. Il faut remplacer la droite  $(b'c)$  par une droite d'équation  $l$  passant par  $c$  et calculer le crochet  $[u, v, w]$  qui devient :

$$[(b \wedge c') \wedge l, (c \wedge a') \wedge (c' \wedge a), (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)].$$

Le calcul est analogue à celui mené plus haut. On utilise la formule du double produit et la formule  $(a \wedge b) \wedge l = l(a)b - l(b)a$ . On obtient :

$$[u, v, w] = l(b)[c, c', a][a, a', b][c', a', c] - l(c')[a', c', a][c, a', b][b, c, a].$$

Par ailleurs, l'hypothèse c'est que la droite  $l$  est tangente en  $c$  à la conique  $C$  définie par les cinq points  $a, a', b, c, c'$ . Cette hypothèse peut s'écrire de la façon suivante. On part de l'égalité des birapports (dans le cas de six points  $a, b, c, a', b', c'$  distincts) :  $[[ba', bc, ba, bb']] = [[c'a', c'c, c'a, c'b']]$  qui s'écrit en termes de crochets :

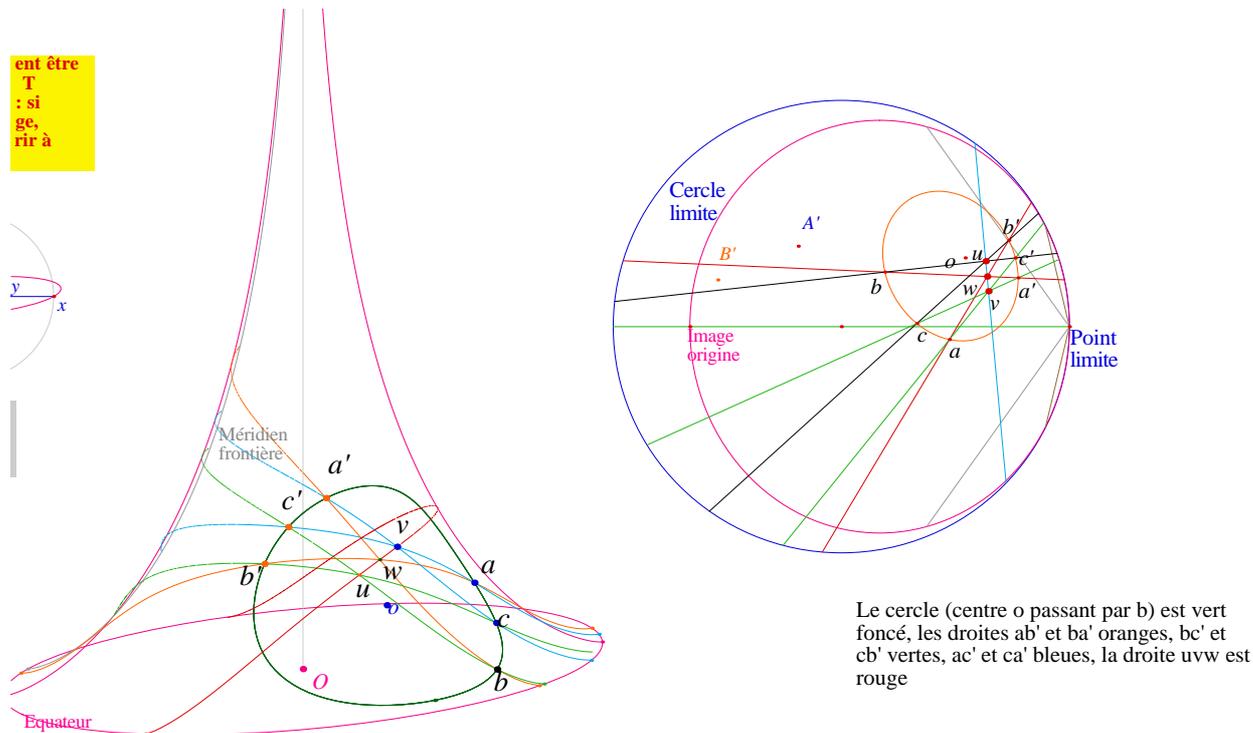
$$[b, a', a][b, c, b'][c', c, a][c', a', b'] = [c', a', a][c', c, b'][b, c, a][b, a', b'],$$

et on fait  $b' = c$  dans cette égalité en remplaçant  $[m, c, b']$ , équation de la droite  $(cb')$  par  $l(m)$  (pour justifier cela, utiliser la forme  $q$  qui définit la conique et sa forme polaire  $\varphi$ ). Il vient :

$$l(b)[b, a', a][c', c, a][c', a', c] = l(c')[c', a', a][b, c, a][b, a', c].$$

On constate que cette relation n'est autre que la condition  $[u, v, w] = 0$ .

Une dernière page de publicité : le théorème de Pascal sur la pseudosphère, toujours avec les macros d'Yves Martin.



## 5 Pascal et la géométrie algébrique

### 5.1 La variante élémentaire

Dans ce paragraphe, nous établissons le théorème de Pascal par une méthode de géométrie algébrique, qui repose sur le théorème de Bézout et qui est susceptible de multiples généralisations.

Le cadre est l'espace projectif  $\mathbf{P}_k^2$  sur un corps  $k$  infini, avec les coordonnées homogènes  $x, y, t$ . Si  $F$  est un polynôme homogène de degré  $d$ , on

pose

$$V(F) = \{(x, y, t) \in \mathbf{P}^2 \mid F(x, y, t) = 0\}$$

(dans les bons cas  $V(F)$  est la courbe projective, de degré  $d$ , définie par  $F$ , mais il y a des surprises lorsque le corps  $k$  n'est pas algébriquement clos).

On commence par montrer la variante de Bézout qui nous sera utile :

**5.1. Théorème.** *Soient  $A, F$  des polynômes homogènes de degrés respectifs 2 et 3. On suppose  $A$  irréductible (“une conique propre”) et  $F$  non multiple de  $A$ . Alors on a  $|V(A) \cap V(F)| \leq 6$ .*

*Démonstration.* Le plus simple est de paramétrer la conique. Par changement de repère (si  $V(A)$  est non vide) on peut supposer  $A = YT - X^2$  et  $V(A)$  est alors l'ensemble des points  $(u^2, uv, v^2)$  avec  $u, v \in k$ , non tous deux nuls. Alors, les points de  $V(A) \cap V(F)$  sont donnés par l'équation  $F(u^2, uv, v^2) = 0$  qui est de degré 6 et a donc au plus 6 zéros dans  $\mathbf{P}^2$  (sauf si  $V(A)$  est inclus dans  $V(F)$  ce qui impose que  $A$  divise  $F$ ).

On en déduit Pascal :

**5.2. Théorème.** *Soit  $\Gamma = V(A)$  une conique propre de  $\mathbf{P}_k^2$  et soit  $S = \{a, b, c, a', b', c'\}$  un ensemble de six points distincts de  $\Gamma$ . Les droites  $(bc')$  et  $(b'c)$  (resp.  $(ca')$  et  $(c'a)$ , resp.  $(ab')$  et  $(a'b)$ ) se coupent en  $u$  (resp.  $v$ , resp.  $w$ ). Alors,  $u, v, w$  sont alignés.*

*Démonstration.* Soit  $F = (ab')(ca')(bc')$  (il s'agit de l'équation de degré 3 qui définit la réunion des trois droites), et  $G = (ac')(b'c)(a'b)$ . Soit  $p$  un point de  $V(A)$  non dans  $F$  (ça existe car  $V(A)$  est infini). On a donc  $F(p) \neq 0$ , de sorte qu'il existe  $\lambda \in k$  tel que  $G(p) - \lambda F(p) = 0$ . Posons  $H = G - \lambda F$ . Alors  $V(A) \cap V(H)$  contient 7 points (ceux de  $S$ , plus le point  $p$ ). Il résulte alors de 5.1 que  $H$  est multiple de  $A$ ,  $H = UA$ . Alors,  $U$  est de degré 1 donc définit une droite et les points  $u, v, w$  sont sur cette droite. En effet, ces points sont sur  $F$  et  $G$ , donc sur  $H$ , et on vérifie qu'ils ne sont pas sur  $\Gamma$ , de sorte qu'ils sont sur  $U$ .

**5.3. Remarque.** On peut montrer Pappus de manière analogue.

## 5.2 La variante généralisée : énoncé

Le but de ce paragraphe est de prouver une généralisation du théorème de Pascal. Le cadre est toujours l'espace projectif  $\mathbf{P}_k^2$  sur un corps  $k$  infini, avec les coordonnées homogènes  $x, y, t$ . On pose  $R = k[X, Y, T]$  et

on note  $R_d$  l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $d$ . On a  $\dim_k R_d = \binom{d+2}{2}$ . Le résultat que nous allons prouver est le suivant :

**5.4. Théorème.** *Soient  $A, B, F, G \in R$  des polynômes homogènes de degrés respectifs  $a, b, s, t$ . On suppose que  $S = V(A) \cap V(B)$  est fini de cardinal  $ab$ , que  $Z = V(F) \cap V(G)$  est fini de cardinal  $st$  et que  $S$  est inclus dans  $Z$ . Alors il existe  $H \in R$ , homogène de degré  $s+t-a-b$  tel que  $Z-S \subset V(H)$ .*

On vérifie aussitôt que ce théorème implique le théorème de Pascal (et celui de Pappus).

**5.5. Remarques.**

- 1) Le théorème 5.4 est beaucoup plus général que le théorème de Pascal. Il a pour conséquence de nombreux autres résultats, cf. par exemple [Fulton].
- 2) Si on fait vraiment de la géométrie algébrique, i.e. si utilise le langage des schémas on n'est pas obligé de supposer les points de  $S$  et  $Z$  distincts, il peut y avoir des multiplicités.
- 3) En fait, ce théorème est un résultat de liaison :  $S$  et  $Z-S$  sont des groupes de points "liés" par l'intersection complète  $Z = V(F) \cap V(G)$ , cf. [P], [PS], [MDP], etc.

## 5.3 La démonstration du théorème de Pascal généralisé

### 5.3.1 Le théorème de Noether

La preuve de 5.4 repose essentiellement sur le résultat suivant, qui calcule les équations d'une intersection complète. Il s'agit de la forme faible du théorème dit  $AU + BV$  de Max Noether, cf. par exemple [Fulton].

**5.6. Théorème.** *Soient  $A, B \in R$  des polynômes homogènes de degrés respectifs  $a, b$ . On suppose que  $S = V(A) \cap V(B)$  est fini de cardinal  $ab$ . Alors les polynômes homogènes de degré  $d$  nuls sur  $S$  sont les polynômes de la forme  $AU + BV$  avec  $U, V$  homogènes de degrés respectifs  $d-a$  et  $d-b$ . (Autrement dit, l'idéal  $I = I(S)$  des polynômes nuls sur  $S$  est égal à l'idéal  $J$  engendré par  $A$  et  $B$ .)*

*Démonstration.* On commence par montrer 5.6 dans le cas  $d \geq ab - 1$ . On a besoin de deux lemmes :

**5.7. Lemme.** *Soit  $r$  un entier et  $S = \{s_1, \dots, s_r\}$  un ensemble fini de cardinal  $r$  de  $k^3$ , avec  $s_i = (x_i, y_i, t_i)$  et soit  $d$  un entier avec  $d \geq r - 1$ . Soit  $\varphi : R_d \rightarrow k^r$  l'application qui à  $F$  associe le  $r$ -uplet des  $F(x_i, y_i, t_i)$ . Alors,  $\varphi$  est surjective.*

*Démonstration.* On pense à la fois les  $s_i$  dans  $k^3$  et dans  $\mathbf{P}^2$ . Pour  $i$  fixé, il existe une droite  $L_i$  passant par  $s_i$  et pas par les  $s_j$ ,  $j \neq i$  (c'est le fait que  $k$  est infini). Alors, le polynôme  $L_1 \cdots \widehat{L}_i \cdots L_r$  (qui correspond à la réunion de ces droites) est nul en tous les  $s_j$  pour  $j \neq i$  et non nul en  $s_i$  et, quitte à multiplier par un scalaire, il s'envoie par  $\varphi$  sur le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $k^r$ .

**5.8. Lemme.** *On a "une résolution" de l'idéal  $J$ , c'est-à-dire une suite exacte :*

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\beta} R \oplus R \xrightarrow{\alpha} J \rightarrow 0$$

avec  $\alpha(U, V) = AU + BV$  et  $\beta(W) = (BW, -AW)$ . Précisément, pour  $d \geq 0$ , on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow R_{d-a-b} \xrightarrow{\beta} R_{d-a} \oplus R_{d-b} \xrightarrow{\alpha} J_d \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que si l'on a  $AU + BV = 0$ , alors on a  $(U, V) = (BW, -AW)$ . Cela résulte du fait que  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux (sinon  $S$  serait infini) et du théorème de Gauss.

**5.9. Corollaire.** *On suppose  $d \geq a + b$ . On a*

$$\dim J_d = \binom{d-a+2}{2} + \binom{d-b+2}{2} - \binom{d-a-b+2}{2} = \binom{d+2}{2} - ab.$$

On peut alors prouver 5.6 dans le cas  $d \geq ab - 1$ . Il est clair que l'espace vectoriel  $J_d$  des polynômes de degré  $d$  de la forme  $UA + VB$  est inclus dans  $I_d$ . En vertu de 5.9 on a  $\dim J_d = \binom{d+2}{2} - ab$ . Par ailleurs, avec les notations de 5.7,  $I_d$  est le noyau du morphisme  $\varphi$  de  $R_d$  dans  $k^{ab}$  et, comme ce morphisme est surjectif en vertu de 5.7, le noyau a même dimension que  $J_d$ , d'où le résultat.

Il reste à prouver le théorème 5.6 dans le cas  $d < ab - 1$ . Pour cela, on choisit une forme linéaire  $L$  qui ne s'annule pas sur  $S$  (il en existe car  $k$  est infini). Alors, pour  $n$  assez grand,  $L^n F$ , qui s'annule sur  $S$ , est dans  $J$  en vertu du premier cas. Il ne reste plus qu'à montrer le lemme suivant :

**5.10. Lemme.** *Avec les notations de 5.6, soit  $L$  une forme linéaire qui ne s'annule pas sur  $S$ . Alors la multiplication par  $L$  :*

$$\mu_S : R/(A, B) \rightarrow R/(A, B)$$

*est injective.*

*Démonstration.* Soit  $F$  tel que  $LF = AU + BV$ . Il s'agit de voir que  $F$  est encore de cette forme. Quitte à faire un changement de coordonnées on peut supposer  $L = T$ . On réduit alors modulo  $T$  et on a  $\overline{AU} = -\overline{BV}$ . Mais les polynômes  $\overline{A}, \overline{B} \in k[X, Y]$ , sont premiers entre eux (sinon,  $A$  et  $B$  auraient un zéro commun sur la droite  $T = 0$ ). On en déduit, par Gauss, que  $\overline{A}$  divise  $\overline{B}$  :  $\overline{B} = \overline{AC}$  et il s'ensuit  $\overline{U} = -\overline{BC}$ . Revenant dans  $R$ , cela donne  $V = AC + TV'$  et  $U = -BC + TU'$ , d'où  $TF = T(AU' + BV')$  et la conclusion.

**5.11. Remarque.** Là encore, le théorème vaut même si les points de  $S$  ne sont pas distincts, mais il faut quelques définitions supplémentaires.

### 5.3.2 Fin de la démonstration

Comme  $F$  et  $G$  sont nuls sur  $S$  ils s'écrivent, en vertu du théorème de Noether,  $F = AU + BV$ ,  $G = AU' + BV'$  avec  $U, V, U', V'$  respectivement homogènes de degrés  $s-a, s-b, t-a, t-b$ . On considère alors  $H = UV' - VU'$  qui est homogène de degré  $s + t - a - b$ . On montre aisément (cf. [Perrin]) que  $H$  est non nul et il reste à voir que  $H$  est nul sur  $Z - S$ . Mais on a  $AH = V'(AU + BV) - V(AU' + BV') = V'F - VG$  et, de même,  $BH = UG - U'F$ , de sorte que  $AH$  et  $BH$  sont nuls sur  $Z$ . Si le point  $p$  est dans  $Z - S$  il annule donc  $AH$  et  $BH$ , mais, comme il n'annule pas à la fois  $A$  et  $B$  (puisqu'il n'est pas dans  $S$ ), il annule  $H$ .